BULLETIN DE LA S. M. F.

E. DELASSUS

Sur le principe des travaux virtuels

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 244-265
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__244_1>

SUR LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS [1];

PAR ÉT. DELASSUS.

1. Le principe des travaux virtuels et celui de Dalembert, qui en découle rigoureusement, sont absolument généraux ; ils expriment rigoureusement les conditions nécessaires et suffisantes, soit de l'équilibre, soit du mouvement, tant qu'ils sont applicables, c'est-à-dire tant que l'on n'arrive pas à une position singulière où les hypothèses fondamentales de la Mécanique cessent d'avoir un sens.

On est donc tenté de considérer ces principes comme des espèces de mécanismes transformant automatiquement un problème de mécanique en un système d'équations rigoureusement équivalent. Il n'est pas nécessaire de chercher des exemples bien compliqués pour s'apercevoir que cette conception est fausse et que les équations de Lagrange peuvent donner des solutions étrangères au problème proposé.

Prenons le mouvement d'un solide pesant suspendu par un point O. Traçons dans le corps une droite Δ issue de O et cherchons s'il peut arriver que cette droite garde une position fixe verticale dans l'espace.

Prenons trois axes fixes Ox_1, y_1, z_1, et trois axes Ox, y, z,

---

(1) Dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *Sur la mise en équation des problèmes de Mécanique*, mars 1906, M. Hadamard a donné quelques indications sur les cas où les équations du mouvement ne traduisent pas exactement le principe de Dalembert.

L'article que je publie maintenant, bien que la discussion qui y figure ait fait partie de mon enseignement dès 1902-1903, peut être considéré comme la suite et le développement de celui de M. Hadamard en se bornant, pour avoir des propriétés précises, aux seules équations de Lagrange et sans faire intervenir aucune intégrale première.

attachés au solide, Ox étant la droite Δ. Soient θ, φ, ψ les trois angles d'Euler et

$$F(x, y, z) = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie. On aura

$$2T = F[\psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,\ \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,\ \psi' \cos\theta + \varphi']$$

et, comme on peut toujours supposer le centre de gravité dans le plan zOx,

$$U = -Mg(a \sin\varphi \sin\theta + c \cos\theta).$$

Il n'y a aucune difficulté à former les équations de Lagrange; si nous y introduisons alors les hypothèses

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta' = \theta'' = 0,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi' = \varphi'' = 0,$$

qui expriment que Δ reste toujours en coïncidence avec Oz_1, nous obtenons

$$A\psi'' = 0,$$
$$E\psi'' - E\psi'^2 = Mgc,$$
$$E\psi'' - F\psi'^2 = 0,$$

il en résulte

$$F = 0$$

sans quoi, en vertu de la première, la troisième donnerait

$$\psi' = 0$$

et il n'y aurait pas mouvement. Cette condition étant réalisée, la seconde donnera, pour ψ', une valeur constante

$$\sqrt{\frac{Mgc}{-E}}.$$

Il est donc nécessaire que le plan mené par Δ perpendiculaire au plan contenant Δ et le centre de gravité coupe l'ellipsoïde d'inertie suivant une ellipse admettant Δ pour axe et, de plus, que la rotation initiale, dirigée suivant Δ placée verticalement, ait une valeur bien déterminée.

Traitons maintenant le problème en prenant Δ pour Oz et avec trois paramètres θ, φ, u, le dernier étant défini par

$$u = \varphi + \psi.$$

Si nous prenons encore zox contenant le centre de gravité, les axes seront les mêmes que précédemment, sauf que Ox et Oz se sont permutés et que Oy a changé de sens ; l'équation de l'ellipsoïde d'inertie est donc

$$F(Z, -Y, X) = 0,$$

donc

$$2T = F\begin{bmatrix} (u'-\varphi')\cos\theta + \varphi',\ \theta'\sin\varphi - (u'-\varphi')\sin\theta\cos\varphi \\ \theta'\cos\varphi + (u'-\varphi')\sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix},$$

$$U = -Mg(a\cos\theta + c\sin\varphi\sin\theta).$$

Si nous écrivons alors les équations de Lagrange et introduisons l'hypothèse

$$\theta = \theta' = \theta'' = 0,$$

l'équation relative à φ devient une identité et il reste les deux équations

$$A u'' = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[u'(E\cos\varphi + F\sin\varphi)] + u'(u' - \varphi')(F\cos\varphi - E\sin\varphi) = Mgc\sin\varphi;$$

la première donne

$$u' = \alpha$$

et la seconde devient alors

$$\alpha^2(F\cos\varphi - E\sin\varphi) = Mgc\sin\varphi$$

et donne pour φ une valeur constante β. Les équations de Lagrange admettent donc la solution

$$\theta = 0, \qquad \varphi = \beta, \qquad u = \alpha t + \gamma,$$

α, β, γ étant trois constantes dont les deux premières sont liées par la relation

$$\alpha^2(F\cos\beta - E\sin\beta) = Mgc\sin\beta.$$

L'hypothèse $\theta = 0$ exprime que la droite Δ reste verticale et, comme u est variable, le corps tourne réellement autour de Δ.

Les équations de Lagrange, au moyen des paramètres θ, φ, u, donnent donc une infinité de mouvements autour de Δ restant verticale sans aucune condition relative à la position de Δ et du centre de gravité dans l'ellipsoïde d'inertie et à la vitesse initiale de rotation. D'après la première façon de traiter le problème, les droites Δ doivent satisfaire à une condition, c'est-à-dire être les génératrices d'un certain cône. On peut donc affirmer que toutes les solutions fournies par la seconde mise en équations et qui correspondent à des droites non situées sur ce cône sont des solutions étrangères au problème proposé, elles donnent des mouvements qui ne peuvent se produire effectivement sans l'action des forces auxquelles le système est soumis.

De cet exemple résulte que les équations de Lagrange ne sont pas toujours rigoureusement équivalentes au problème de dynamique qui les fournit. L'équation générale de Dalembert est la traduction exacte du problème, mais les équations de Lagrange ne traduisent pas rigoureusement le principe de Dalembert; c'est dans cette traduction que l'équivalence se perd.

Comme le principe de Dalembert est une conséquence du principe des travaux virtuels, nous commencerons par étudier, à ce point de vue, les équations d'équilibre d'un système et nous appliquerons ensuite à la Dynamique les résultats obtenus.

2. P étant une position d'un système matériel soumis à des liaisons définies géométriquement, les déplacements virtuels relatifs à cette position et compatibles avec les liaisons se définissent sans ambiguïté et les δx, δy, δz d'un point quelconque du système sont alors des fonctions d'un certain nombre de paramètres qui sont les mêmes pour tous les points du système.

Nous dirons que la position P est une *position ordinaire* si, pour cette position, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons forment un *groupe linéaire*, c'est-à-dire sont tels que les δx, δy, δz d'un point quelconque puissent s'exprimer comme fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre de paramètres indépendants. Nous désignerons, d'une façon générale, par (G) un tel groupe.

L'ensemble des déplacements virtuels relatifs à une position peut ne pas être linéaire, mais il peut arriver qu'il se décompose en plusieurs autres ensembles dont certains peuvent constituer des groupes linéaires. Nous dirons alors que la position P est la superposition de plusieurs positions dont certaines sont ordinaires.

C'est, en définitive, la même notion que celle qui conduit à considérer un point double d'une courbe comme réunion de deux points simples appartenant respectivement aux deux branches qui viennent s'y couper. Nous pourrons dire que les diverses positions appartiennent à des nappes différentes de la liaison et supposer toujours que l'on considère séparément ces positions superposées.

Nous poserons en principe (la vérification en est immédiate dans les cas simples) que *le problème de l'équilibre n'a de sens que pour les positions ordinaires* et nous laisserons systématiquement de côté toutes les positions qui ne seront pas de cette nature.

3. Pour ne pas compliquer inutilement, bornons-nous au cas d'un système holonome défini par des paramètres $q_1, \ldots, q_n$ que nous ne supposerons pas forcément indépendants et qui seront alors liés par les équations finies

$$(1) \qquad \begin{cases} \theta_1(q_1, \ldots, q_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_h(q_1, \ldots, q_n) = 0. \end{cases}$$

La représentation du système est rigoureuse au point de vue ponctuel, mais il n'en est plus forcément de même au point de vue tangentiel, c'est-à-dire quand on considère les déplacements virtuels.

Si l'on donne aux q des variations infiniment petites du premier ordre et satisfaisant aux équations linéaires

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta\theta_1 = \dfrac{\partial\theta_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial q_n}\delta q_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta\theta_h = \dfrac{\partial\theta_h}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \dfrac{\partial\theta_h}{\partial q_n}\delta q_n = 0, \end{cases}$$

on définit ainsi des déplacements virtuels formant un groupe linéaire (Γ) qui, en général, est d'ordre $n - h$, c'est-à-dire dépend linéairement de $n - h$ paramètres indépendants.

En général, ce groupe coïncide avec (G), mais il peut exister des positions ordinaires qui, à ce point de vue, soient singulières, c'est-à-dire pour lesquelles (Γ) ne coïncide pas avec (G).

Une position ordinaire sera *singulière de première classe* si (Γ) est entièrement contenu dans (G), *singulière de seconde classe* si (G) est entièrement contenu dans (Γ), et *singulière de troisième classe* si aucun des deux groupes (G) et (Γ) n'est entièrement contenu dans l'autre.

4. Considérons les q comme des paramètres indépendants et donnons-leur des accroissements δq arbitraires. Nous définissons ainsi des déplacements virtuels du système libéré des liaisons exprimées par les équations (1), déplacements compatibles avec les liaisons et qui forment un groupe linéaire (Γ') dont l'ordre n' est égal ou inférieur à n. Si, pour une position du système, n' est inférieur à n, nous dirons qu'il y a réduction sur n.

On obtient évidemment tous les déplacements du groupe (Γ) en cherchant tous les déplacements de (Γ') qui satisfont aux équations (2); le nombre h' de ces équations qui sont distinctes est égal ou inférieur à h. Si, pour une position du système, h' est inférieur à h, nous dirons qu'il y a réduction sur h.

S'il n'y a réduction ni sur n, ni sur h, on a évidemment une position ordinaire non singulière de sorte que : *toute position singulière donne une réduction de l'un, au moins, des deux nombres n, h.*

Considérons d'abord une position donnant une réduction de n seulement ($n' < n$, $h' = h$). Soit (G') le groupe véritable, pour la position considérée, du système fictif dont les q seraient indépendants.

Dans le cas actuel, (Γ') n'est qu'une portion de (G'). Les équations (2), étant toutes distinctes, expriment exactement les conditions pour qu'un déplacement (G') soit un déplacement (G); en les appliquant aux déplacements (Γ') on n'obtiendra donc, en général, qu'une partie de (G), de sorte que (Γ) sera contenu dans (G) et la position sera singulière de première classe. Le raisonnement peut être en défaut, car il peut arriver que les déplacements (G') qui ne font pas partie de (Γ') ne satisfassent jamais aux équations (2); en appliquant alors ces équations aux déplacements (Γ') on trouve le même résultat qu'avec (G'), c'est-à-dire (G); (Γ) coïncide donc avec (G) et la position n'est pas singulière.

Ainsi :

Une position pour laquelle il y a réduction sur n seulement est une position non singulière ou singulière de première classe.

Lorsque les paramètres sont indépendants, (G) et (Γ) coïncident respectivement avec (G′) et (Γ′); donc, s'il y a réduction sur n, (Γ) est contenu dans (G) et la position est singulière de première classe. Ainsi :

Quand les paramètres sont indépendants, toute position pour laquelle il y a réduction sur n est forcément singulière de première classe.

Considérons maintenant une position pour laquelle il y a réduction sur h seulement ($n' = n$, $h' < h$), (Γ′) coïncide avec (G′), mais les équations (2) n'expriment plus complètement les conditions que doivent remplir les déplacements (G′) pour être des déplacements (G); donc, en les appliquant à (Γ′), on obtiendra des déplacements plus généraux que ceux de (G) et le groupe (G) sera contenu dans (Γ), donc la position sera singulière de seconde classe.

Pour qu'un déplacement (Γ′) soit un déplacement (G), il faut qu'il satisfasse aux équations (2) et à des conditions complémentaires se traduisant par de nouvelles relations entre les δq et comme, dans les déplacements (Γ′), les δq sont tous arbitraires, il est impossible que les (Γ′) vérifient tous ces conditions complémentaires, de sorte que (Γ) ne peut coïncider avec (G). Ainsi :

Une position pour laquelle il y a réduction sur h seulement est forcément singulière de seconde classe.

Considérons enfin une position pour laquelle il y a réduction simultanée sur n et sur h ($n' < n$, $h' < h$).

Pour former (Γ) on ne prend qu'une partie (Γ′) du groupe (G′) et on ne lui impose qu'une partie des conditions qui définissent (G) au moyen de (G′). Il n'y a plus aucune relation entre (Γ) et (G) et tous les cas pourront se présenter.

Par exclusion, on peut formuler les réciproques suivantes :

Les positions singulières de première classe sont forcément des positions pour lesquelles il y a réduction sur n.

Les positions singulières de seconde classe sont forcément des positions pour lesquelles il y a réduction sur h.

Les positions singulières de troisième classe sont forcément des positions pour lesquelles il y a réduction simultanée sur n et sur h.

5. En général, une position du système matériel est définie par un système de valeurs des q vérifiant les équations (1) et, réciproquement, une position définit un système de valeurs des q satisfaisant à ces conditions.

Il peut arriver qu'une position du système ne définisse pas complètement les paramètres, c'est-à-dire qu'il existe des q, dépendants d'un certain nombre de paramètres arbitraires, vérifiant identiquement les équations (1) et fournissant toujours la même position du système; autrement dit, tous les systèmes de valeurs des q vérifiant les équations distinctes

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta_1(q_1, \ldots, q_n) = 0, & \omega_1(q_1, \ldots, q_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \theta_h(q_1, \ldots, q_n) = 0, & \omega_k(q_1, \ldots, q_n) = 0, \end{cases}$$

dont le nombre $h + k$ est supposé inférieur à n, fournissent la même position du système matériel. Nous dirons alors que cette position est une *position d'indétermination paramétrique* et que l'indétermination est d'ordre

$$p = n - (h + k).$$

Si nous appelons *position paramétrique* un système de valeurs des q satisfaisant aux équations (1), nous pourrons dire qu'une position d'indétermination paramétrique d'ordre p est la superposition d'une suite à p paramètres de positions paramétriques.

Soit $q_1^0, \ldots, q_n^0$ une de ces positions paramétriques, donc vérifiant les équations (3). Si l'on fait varier les q à partir de ces valeurs en continuant à vérifier ces équations, les x, y, z des points du système matériel restent fixes; en particulier, si nous donnons aux q des variations δq satisfaisant aux équations

$$\begin{array}{ll} \delta\theta_1 = 0, & \delta\omega_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \delta\theta_h = 0, & \delta\omega_k = 0, \end{array}$$

qui sont distinctes, les δx, δy, δz seront nuls, donc seront des combinaisons linéaires et homogènes des $\delta\theta$ et des $\delta\omega$. Les δx, δy, δz, où l'on considère les δq comme absolument arbitraires, sont donc des fonctions linéaires et homogènes de $h + k$ paramètres $\delta\theta$, $\delta\omega$, de sorte que le groupe (Γ') est d'ordre au plus égal à $h + k$, c'est-à-dire à $n - p$. Il y a donc réduction sur n, de sorte que :

Les positions paramétriques qui constituent une position d'indétermination paramétrique sont toutes singulières de première classe ou non singulières; elles sont forcément singulières de première classe quand les paramètres sont indépendants.

A chacune de ces positions paramétriques correspond un groupe (Γ) et le groupe (G) relatif à la position du système est fourni par l'ensemble de tous les déplacements de tous ces groupes (Γ).

Comme exemples simples, on peut citer le point $r = 0$ en coordonnées polaires planes r, θ; il y a alors indétermination d'ordre 1, et le point $r = 0$ en coordonnées polaires de l'espace r, θ, φ, l'indétermination étant alors d'ordre 2.

Enfin il peut exister des suites continues de positions d'indétermination. Une suite à s paramètres de positions d'indétermination d'ordre p, étant définie par des équations telles que (3), mais les ω contenant s constantes arbitraires distinctes. On en a un exemple simple par les coordonnées semi-polaires r, θ, z, en prenant les positions

$$r = 0, \qquad z = a,$$

a étant une constante arbitraire et aussi, au moyen d'un solide ayant un point fixe et qu'on définit par les trois angles d'Euler θ, φ, ψ. La suite à considérer est ici

$$\theta = 0, \qquad \varphi + \psi = a.$$

6. Il est encore plus facile de donner des exemples de positions singulières de seconde classe.

L'exemple immédiat sera fourni par un point matériel défini par ses trois coordonnées rectilignes x, y, z et assujetti à rester sur une courbe

$$\theta_1(x, y, z) = 0,$$
$$\theta_2(x, y, z) = 0,$$

les deux surfaces $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ étant tangentes en un point.

En ce point, les deux équations

$$\delta\theta_1 = 0, \qquad \delta\theta_2 = 0$$

se réduisent à une, de sorte que (Γ) est d'ordre 2, il est constitué par tous les déplacements dans le plan tangent commun aux deux surfaces, tandis que (G) relatif au point considéré comme ordinaire sur l'une des branches est d'ordre 1, constitué par les déplacements sur la tangente à cette branche.

On peut avoir de telles positions singulières de seconde classe isolées ou formant des suites continues et il peut même arriver que toutes les positions du système soient singulières de seconde classe ; c'est ce qui arrivera, en particulier, si, dans l'exemple précédent, on suppose que les deux surfaces θ_1, θ_2 sont circonscrites tout le long de la courbe étudiée.

7. Reprenons le raisonnement par lequel on établit les équations générales d'équilibre.

Un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons est obtenu en prenant n'importe quel système de valeurs des δq satisfaisant aux équations

$$\delta\theta_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta\theta_h = 0. \tag{4}$$

Pour ces valeurs, le travail des forces données a une expression de la forme

$$\mathfrak{T} = Q_1\,\delta q_1 + \ldots + Q_n\,\delta q_n,$$

et il doit être nul en vertu des équations (4). Donc, considéré comme fonction linéaire et homogène des n variables indépendantes δq, il doit être une combinaison linéaire et homogène des premiers membres $\delta\theta$ des équations (4), ce qui revient à dire qu'il doit exister des multiplicateurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que l'identité

$$\mathfrak{G} + \lambda_1 \delta\theta_1 + \ldots + \lambda_h \delta\theta_h = 0 \tag{5}$$

ait lieu quels que soient les δq. En exprimant ce fait, on obtient les équations classiques

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial q_1} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial\theta_h}{\partial q_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_n + \lambda_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial q_n} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial\theta_h}{\partial q_n} = 0, \end{array} \right. \tag{6}$$

qui, jointes aux h équations qui relient les q, forment un système de $n+h$ équations aux $n+h$ inconnues $q_1, \ldots, q_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$.

Ces équations, d'après le raisonnement même qui les donne, ne sont évidemment la traduction exacte des conditions d'équilibre fournies par le principe des travaux virtuels que sous les deux hypothèses suivantes :

1° Il y a identité entre les déplacements virtuels (G) compatibles avec les liaisons et les déplacements virtuels (Γ) définis par les δq vérifiant les équations (4);

2° Les multiplicateurs λ sont tous finis, de façon que l'identité (4) soit bien de la forme considérée.

Pour mieux concevoir la seconde restriction, écrivons l'identité (5) sous la forme homogène

$$\mu_0 \mathfrak{G} + \mu_1 \delta\theta_1 + \ldots + \mu_h \delta\theta_h = 0. \tag{7}$$

Nous pourrons alors dire :

A toute position d'équilibre qui n'est pas singulière correspond une solution $q_1, \ldots, q_n, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ *des équations d'équilibre, solution dans laquelle* μ_0 *n'est pas nul.*

Réciproquement, *toute solution* $q_1, \ldots, q_n, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ *des équations d'équilibre pour laquelle* μ_0 *n'est pas nul donne une position du système qui, si elle n'est pas singulière, est forcément position d'équilibre.*

Enfin la considération de μ_0 conduit à considérer les équations d'équilibre (6) de deux façons bien distinctes.

La première consiste à n'admettre que les solutions dans lesquelles μ_0 n'est pas nul ou, ce qui revient au même, les solutions dans lesquelles les λ seront tous finis. Comme on doit, dans la solution, s'occuper des multiplicateurs, on est obligé de les conserver et nous dirons que les équations d'équilibre, considérées à ce point de vue, sont les *équations aux multiplicateurs finis*.

Les multiplicateurs μ figurent linéairement, leur élimination est une opération élémentaire très facile et, en outre, ces inconnues auxiliaires n'offrent, en général, aucun intérêt. On est donc amené souvent à les éliminer pour obtenir les équations ne contenant plus que les véritables inconnues q du problème d'équilibre proposé. Cette élimination ne fait aucune distinction entre μ_0 et les autres μ. On est ainsi amené à considérer les *équations sans multiplicateurs* en appelant ainsi indifféremment, soit les équations après élimination des multiplicateurs, soit les équations avec ces multiplicateurs, mais en ne leur imposant aucune condition restrictive.

8. Les équations aux multiplicateurs finis expriment rigoureusement que le travail virtuel est nul pour tous les déplacements du groupe (Γ); et il en résulte :

Pour une position ordinaire non singulière, (Γ) et (G) coïncident, donc les équations aux multiplicateurs finis expriment les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre. Toute position d'équilibre non singulière fournira une solution de ces équations et, réciproquement, toute solution de ces équations qui ne sera pas une position singulière sera une position d'équilibre.

Pour une position singulière de première classe, (Γ) est contenu entièrement dans (G), donc les équations aux multiplicateurs finis expriment des conditions nécessaires mais non suffisantes de l'équilibre. Une position d'équilibre singulière de première classe vérifie forcément les équations, mais une position singulière de première classe vérifiant les équations n'est pas forcément position d'équilibre.

Pour une position singulière de seconde classe, (G) est contenu dans (Γ), donc les équations aux multiplicateurs finis expriment des conditions suffisantes mais non nécessaires de l'équilibre. Une position d'équilibre singulière de seconde classe ne vérifie pas forcément les équations, mais si une position singulière de seconde classe les vérifie, elle est certainement position d'équilibre.

Enfin, pour une position singulière de troisième classe, aucun des deux groupes (Γ), (G) n'étant entièrement contenu dans l'autre, les équations aux multiplicateurs finis ne sont des conditions ni nécessaires ni suffisantes de l'équilibre, elles n'ont, pour ces positions, aucun sens au point de vue de l'équilibre.

Donc :

Les équations d'équilibre aux multiplicateurs finis peuvent fournir des solutions étrangères, c'est-à-dire des positions qui ne sont pas des positions d'équilibre ; ces positions sont forcément singulières de première ou de troisième classe. Elles peuvent aussi laisser de côté de véritables solutions du problème, c'est-à-dire ne pas admettre comme solutions certaines positions d'équilibre ; ces positions sont forcément singulières de deuxième ou de troisième classe.

9. Étudions maintenant, d'une façon analogue, les équations sans multiplicateurs. Elles sont équivalentes à l'identité (7) sans aucune restriction sur les μ, de sorte qu'elles expriment, si μ_0 n'est pas nul, que $\mathfrak{G}$ est nul pour tous les déplacements (Γ) et, si μ_0 est nul, que cette identité se réduit à

$$\mu_1\,\delta\theta_1 + \ldots + \mu_h\,\delta\theta_h = 0,$$

c'est-à-dire que les $\delta\theta$ ne sont pas indépendants ou, suivant l'expression adoptée antérieurement, que, pour la position considérée, il y a réduction sur h.

Considérons une position d'équilibre. Si elle est non singulière ou singulière de première classe, (G) coïncide avec (Γ) ou le contient; dans les deux cas, $\mathfrak{G}$ est nul pour les déplacements (Γ) et les équations sans multiplicateurs sont vérifiées. Si elle est singulière de seconde ou troisième classe, il y a forcément réduction sur h et ces équations sont encore vérifiées. Donc :

Toute position d'équilibre vérifie les équations d'équilibre sans multiplicateurs.

Voyons maintenant la réciproque. Toute position pour laquelle il y a réduction sur h vérifie les équations sans qu'on puisse en conclure qu'il y a équilibre. Une position, vérifiant les équations et pour laquelle il n'y a pas réduction sur h, est forcément non singulière ou singulière de première classe; ϖ est nul pour les déplacements (Γ), donc, si la position n'est pas singulière, il y a équilibre puisque (Γ) et (G) coïncident et, si la position est singulière de première classe, l'équilibre n'a pas lieu forcément puisque (Γ) est contenu dans (G).

En résumé :

Les équations d'équilibre sans multiplicateurs fournissent toutes les positions d'équilibre.

Elles admettent forcément, comme solutions étrangères, toutes les positions pour lesquelles il y a réduction sur h et qui ne sont pas des positions d'équilibre. Elles peuvent admettre d'autres solutions étrangères qui sont forcément des positions singulières de première classe sans réduction sur h.

Dans le cas des paramètres indépendants, il n'y a plus de multiplicateurs, il n'y a qu'une manière de considérer les équations d'équilibre, il n'y a pas à considérer les positions pour lesquelles il y a réduction sur h et enfin il existe une seule catégorie de positions singulières, celles de première classe que, pour abréger, nous appellerons simplement positions singulières. Le résultat précédent se simplifie alors et devient :

Dans le cas des paramètres indépendants, les équations d'équilibre fournissent toutes les positions d'équilibre, mais peuvent donner des solutions étrangères qui sont forcément des positions singulières.

10. Nous venons d'avoir un exemple de solutions étrangères s'introduisant normalement par les équations sans multiplicateurs, ce sont les positions pour lesquelles il y a réduction sur h et, en particulier, les positions singulières de deuxième et troisième classe.

En voici un autre exemple qui s'applique indifféremment aux deux manières de concevoir les équations, puisqu'il est relatif à des positions sans réduction sur h.

Supposons que le système admette une suite continue à r paramètres de positions d'indétermination d'ordre p. Pour un système de valeurs des paramètres q satisfaisant aux h équations θ et aux $n-p-h$ équations d'indétermination contenant les r constantes arbitraires, le groupe (Γ) est d'ordre $n-p-h$, de sorte que les égalités qui expriment que $\mathfrak{G}$ est nul pour les déplacements (Γ) se réduisent, par suite des équations d'indétermination, à $n-p-h$ distinctes.

On aura donc, en tout, à vérifier

$$h+2(n-p-h)=2n-2p-h$$

équations dans lesquelles figureront comme inconnues les n paramètres q et les r constantes arbitraires, soit

$$n+r \text{ inconnues.}$$

Si donc on a

$$n+r \geqq 2n-2p-h,$$

c'est-à-dire

$$2p+r \geqq n-h,$$

il y a plus d'inconnues que d'équations et, sauf le cas exceptionnel d'incompatibilité, la résolution sera possible et l'on obtiendra normalement des solutions étrangères formées par des positions d'indétermination paramétrique appartenant à la suite considérée.

Les équations d'indétermination peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= f_1(q_1, \ldots, q_n).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_r &= f_r(q_1, \ldots, q_n),\\
0 &= \varphi_1(q_1, \ldots, q_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 &= \varphi_{n-p-h-r}(q_1, \ldots, q_n).
\end{aligned}$$

Faisons un changement de paramètres en prenant

$$\begin{array}{llll}
c_1=f_1, & \ldots, & c_r=f_r, & \\
b_1=\varphi_1, & \ldots, & b_{n-p-r-h}=\varphi_{n-p-r-h}\, b_{n-p-r-h+1}=\theta_1, & \ldots, \quad b_{n-p-r}=\theta_h,\\
a_1=\psi_1, & \ldots, & a_p=\psi_p, &
\end{array}$$

les ψ étant des fonctions choisies arbitrairement. On voit qu'avec ces nouveaux paramètres la position considérée sera encore une position d'indétermination pour laquelle les a seront absolument arbitraires, les b nuls et les c égaux à des constantes arbitraires.

Dans un déplacement virtuel, les h derniers paramètres b subissent des variations nulles et tous les autres paramètres subissent des variations absolument arbitraires. Si le déplacement a lieu à partir d'une des positions d'indétermination considérées, la variation arbitraire des paramètres a, quand on laisse les b et les c constants, ne fait pas varier la position du système, donc ne donne aucun travail. Il en résulte que, pour une des positions considérées, on a

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{i=n-p-r-h} Q_{b_i}\,\delta b_i + \sum_{j=1}^{j=r} Q_{c_j}\,\delta c_j,$$

les Q étant des fonctions des a et des c, puisque les b sont tous nuls. On aura donc, pour la position d'indétermination, les équations

$$Q_{b_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-p-r-h),$$
$$Q_{c_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

c'est-à-dire

$$n-p-h \text{ équations},$$

aux $p+r$ inconnues a et c et la position s'obtiendra normalement comme solution étrangère si l'on a

$$p+r \geqq n-p-h$$

ou

$$2p+r \geqq n-h.$$

Nous retrouvons le résultat déjà donné par le raisonnement général, mais les équations sont mises en évidence.

Si nous remarquons que $n-h$ est le nombre λ des paramètres indépendants dont on peut faire dépendre le système, ou encore le nombre de ses degrés de liberté, on voit que :

Si le système à λ degrés de liberté possède une suite à r paramètres de positions d'indétermination d'ordre p, les équations d'équilibre, considérées de n'importe quelle façon, admettent normalement des solutions étrangères appartenant à cette suite si l'on a

$$2p+r \geqq \lambda.$$

Par exemple :

Pour l'équilibre d'un point dans un plan en coordonnées polaires planes, l'origine est une position d'indétermination ; on a

$$p = 1, \qquad r = 0, \qquad \lambda = 2,$$

donc

$$2p + r = \lambda,$$

et l'origine sera toujours fournie par les équations d'équilibre, quelle que soit la force agissant sur le point.

Pour l'équilibre d'un point entièrement libre en coordonnées polaires r, θ, φ de l'espace, l'origine est une position isolée d'indétermination d'ordre 2. On a

$$p = 2, \qquad r = 0, \qquad \lambda = 3;$$

donc

$$2p + r > \lambda$$

et l'on trouvera toujours l'origine comme solution étrangère.

Pour l'équilibre d'un point entièrement libre en coordonnées semi-polaires r, θ, z, tous les points de Oz sont des positions d'indétermination d'ordre 1. On a, pour cette suite,

$$p = 1, \qquad r = 1, \qquad \lambda = 3,$$

donc

$$2p + r = \lambda.$$

Quelle que soit la loi de force, on trouvera toujours comme solution étrangère une position sur Oz.

Considérons enfin un solide ayant un point fixe et défini par les trois angles d'Euler θ, φ, ψ. Toute position pour laquelle l'axe Oz attaché au solide coïncide avec l'axe fixe Oz_1 est une position d'indétermination d'ordre 1. On a la suite à un paramètre

$$\theta = 0, \qquad \varphi + \psi = \alpha$$

pour laquelle on a

$$p = 1, \qquad r = 1, \qquad \lambda = 3;$$

donc

$$2p + r = \lambda.$$

Quelle que soit la loi de force, on trouvera donc une solution étrangère qui sera une position pour laquelle Oz sera en coïncidence avec Oz_1.

11. Appliquons maintenant ces considérations à la Dynamique, c'est-à-dire aux équations générales du mouvement déduites du principe de Dalembert. On a, d'après ce principe, à traiter une question d'équilibre à condition d'introduire les forces d'inertie.

Nous pourrons, si les paramètres ne sont pas indépendants, considérer les équations aux multiplicateurs finis et les équations sans multiplicateurs.

Dans les premières, nous n'admettrons aucune solution où le multiplicateur μ_0 serait identiquement nul, tandis que dans les secondes nous admettrons de telles solutions.

Une solution étrangère du problème de mouvement sera une solution constituée par une suite de positions dépendant du paramètre t, c'est-à-dire par un système de valeurs des paramètres et des multiplicateurs fonctions de t, toutes ces positions étant des solutions étrangères au problème d'équilibre, c'est-à-dire pour lesquelles toutes les conditions suffisantes de l'équilibre sous l'action des forces données et des forces d'inertie ne sont pas réalisées.

Au contraire, une solution du problème de Dynamique ne sera pas fournie par les équations de mouvement, si toutes les positions successives du système sont des positions qui, supposées positions d'équilibre, sont laissées de côté par les équations d'équilibre.

Nous nous bornerons à étudier le cas le plus important, celui des équations sans multiplicateurs qui comprend, comme cas particulier, celui des paramètres indépendants, et comme conséquence immédiate de ce qui a été dit antérieurement, nous avons :

Les équations de Lagrange sans multiplicateurs fournissent tous les mouvements possibles du système.

Supposons que le système admette une suite continue à r paramètres de positions pour lesquelles il y a réduction sur h. Chacune de ces positions satisfait aux équations d'équilibre sans multiplicateurs et quelles que soient les forces. Supposons qu'on fasse parcourir au système matériel une succession de positions dépendant arbitrairement du temps et appartenant à cette suite. Dans chacune de ces positions, les équations d'équilibre, sous l'action des forces données et des forces d'inertie, seront vérifiées ; donc les équations de Lagrange sans multiplicateurs seront aussi vérifiées. Ainsi :

Si le système matériel admet une suite continue de positions *pour lesquelles il y a réduction sur h, tout mouvement dans lequel le système ne parcourt que des positions appartenant à cette suite est une solution des équations de Lagrange, quelles que soient les forces données, et est une solution étrangère au problème de Dynamique proposé.*

12. Considérons maintenant les suites de positions d'indétermination en supposant réalisée la condition

$$2p + r \geqq \lambda$$

d'existence normale des solutions étrangères appartenant à cette suite et reprenons les paramètres particuliers a, b, c déjà employés (§ 39). Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas des paramètres indépendants, c'est-à-dire supposons

$$\lambda = n.$$

Si nous désignons par q le nombre des paramètres b, on aura

$$q = n - p - r,$$

et l'inégalité de condition s'écrivant

$$p \geqq q$$

exprime que le nombre des paramètres a est supérieur à celui des paramètres b.

Lorsque les b sont nuls, les coordonnées des points du système sont indépendantes des a et complètement déterminées par la connaissance des c. Une quelconque de ces coordonnées est ainsi de la forme

$$\mathrm{F}(c_1, \ldots, c_r, t) + \sum_{i=1}^{i=q} b_i f_i(a_1, \ldots, a_p;\, b_1, \ldots, b_q;\, c_1, \ldots, c_r, t),$$

et sa variation de la forme

$$\Sigma \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}\, \delta c + \Sigma f_i\, \delta b_i + \Sigma b_i\, \delta f_i.$$

Les dérivées première et seconde de cette coordonnée sont de la forme

$$\Phi(c_1, \ldots, c_r; c'_1, \ldots, c'_r; t) + \Sigma f_i b'_i + \Sigma b_i \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

$$\Psi(c_1, \ldots, c_r; c'_1, \ldots, c'_r; c''_1, \ldots, c''_r; t) + \Sigma f_i b''_i + 2\Sigma \frac{df_i}{dt} b'_i + \Sigma b_i \frac{d^2 f_i}{dt^2}.$$

Enfin, supposant que les forces ne dépendent que de la position, ces forces seront déterminées par les c; l'une quelconque de leurs composantes sera, pour la position considérée du système, de la forme

$$\chi(c_1, \ldots, c_r; t) + \Sigma b_i \sigma_i.$$

Au moyen de ces expressions, nous pouvons former l'équation de Dalembert

$$\Sigma[(mx'' - X)\delta x + (my'' - Y)\delta y + (mz'' - Z)\delta z] = 0$$

rigoureusement équivalente à l'ensemble des équations de Lagrange, équations qu'on obtiendra en annulant les coefficients des δa, δb, δc.

Si l'on fait varier les a en laissant les b nuls et les c constants, le système ne bouge pas, les forces données et forces d'inertie n'effectuent aucun travail. Donc les coefficients des δa sont nuls, en vertu de ce que les b sont nuls. On le vérifie aisément en remarquant que les termes en δa ne peuvent provenir que des termes

$$\Sigma b_i \delta f_i$$

et sont nuls puisque les b le sont tous. Ainsi les équations de Lagrange qui correspondent aux paramètres a se réduisent à des identités si l'on y suppose les b identiquement nuls.

Formons alors les équations de Lagrange relatives aux b et aux c en y introduisant l'hypothèse relative aux b. Les quantités $mx'' - X$, $my'' - Y$, $mz'' - Z$ se réduisent alors à la forme

$$m\Psi(c_1, \ldots, c_r; c'_1, \ldots, c'_r; c''_1, \ldots, c''_r; t) - \chi(c_1, \ldots, c_2; t)$$

et les δx, δy, δz à la forme

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial c} \delta c + \Sigma f_i \delta b_i,$$

les f_i ne contenant plus alors que les a, les c et t.

Il en résulte immédiatement que les équations de Lagrange relatives aux paramètres c sont de la forme

$$\lambda_i(c_1, \ldots, c_r; c'_1, \ldots, c'_r; c''_1, \ldots, c''_r; t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

et que celles qui sont relatives aux paramètres b sont de la forme

$$\mu_k(c_1, \ldots, c_r; c'_1, \ldots, c'_r; c''_1, \ldots, c''_r; t) = \nu_k(a_1, \ldots, a_p; c_1, \ldots, c_r; t)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q).$$

les r premières constituent un système de r équations du second ordre aux r inconnues, $c_1, \ldots, c_r$ fonctions de t. Connaissant les c, les q dernières constituent alors un système de q équations finies aux p inconnues $a_1, \ldots, a_p$ et comme p est au moins égal à q, il y a plus d'inconnues que d'équations et, sauf les cas exceptionnels d'incompatibilité, la résolution sera possible en se donnant arbitrairement $p - q$ des inconnues a. En définitive, nous obtenons *une solution des équations de Lagrange dépendant de* $2r$ *constantes arbitraires et de* $2p + r - n$ *fonctions arbitraires de* t, *solution dont tous les mouvements qu'elle fournit sont des solutions étrangères du problème de Dynamique proposé.*

Prenons, par exemple, le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O au moyen des trois angles d'Euler θ, φ, ψ. On a la suite à un paramètre de positions d'indétermination d'ordre 1

$$\theta = 0, \qquad \varphi + \psi = \alpha$$

avec

$$p = 1, \qquad r = 1, \qquad n = 3, \qquad 2p + r = n.$$

Les équations de Lagrange admettront donc toujours une solution dépendant de deux constantes arbitraires et dans laquelle θ sera identiquement nul. Prenons une droite Δ_1 issue de O et fixe dans l'espace, puis une droite Δ issue de O et fixe dans le corps. Si l'on prend Δ_1 pour axe Oz_1 et Δ pour Oz, les équations de Lagrange avec les angles d'Euler donneront toujours des mouvements se réduisant à une rotation autour de la droite Δ fixe dans l'espace dans la position Δ_1. Ces solutions sont étrangères. Si, dans le problème de Lagrange et de Poisson, on ne trouve pas de telles solutions étrangères, cela tient à ce que l'axe fixe Oz_1 (vertical) et l'axe mobile Oz (axe de révolution) sont choisis d'une façon particulière, qui fait que les solutions qui, en général, sont des solutions étrangères, sont, en réalité, de véritables solutions du problème, solutions évidentes *a priori*.

Trouvant ces solutions étrangères, il est facile de s'assurer si elles sont de véritables solutions, il suffit, par exemple, de changer le nom des axes; par exemple, d'appeler Ox la droite qui avait été prise pour Oz. Les solutions à étudier correspondent alors à

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

et ψ est une fonction de t, connue et dépendant de deux constantes arbitraires. On formera les nouvelles équations de Lagrange du problème et il n'y aura qu'un simple calcul de vérification à faire, sans aucune intégration, pour voir si la solution les vérifie, quelles que soient les deux constantes ou en les particularisant.

C'est d'une façon analogue qu'on procédera dans le cas général; on fera un changement de paramètres, de façon que les positions d'indétermination considérées ne soient plus des positions d'indétermination et l'on verra si l'on peut particulariser les constantes et fonctions arbitraires, de façon que la solution trouvée vérifie les nouvelles équations. Les solutions satisfaisant à cette condition seront de véritables solutions du problème et les autres de véritables solutions étrangères.

En résumé, les équations de Lagrange qu'on est habitué à considérer (tout au moins dans le cas simple des paramètres indépendants), comme la traduction rigoureuse du mouvement, donnent fréquemment, par suite du choix des paramètres, des solutions étrangères au problème proposé. Si, dans la plupart des problèmes classiques ou des exemples simples, de telles solutions ne se présentent pas, cela tient à ce que les paramètres qu'on est naturellement conduit à prendre sont tels que les solutions qui s'introduiraient comme solutions étrangères, par suite de la nature des paramètres et indépendamment de la nature des forces, se trouvent être en réalité, par suite de la nature de ces forces, de véritables solutions du problème.