BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DENJOY

Sur quelques propriétés des séries à termes positifs

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 223-228

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__223_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

De toute série convergente à termes positifs, on peut déduire, suivant des règles fixes, des séries de même nature mais convergeant plus lentement que les premières. D'une façon précise, u_n étant le terme général de la première série, il est possible de définir une série convergente $v_n = u_n w_n$, w_n étant une fonction donnée des u, croissant indéfiniment avec n. Habituellement, r_n étant le reste de la série arrêtée au terme u_n, c'est-à-dire r_n étant la somme de la série $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, w_n est une fonction donnée de r_n et des restes voisins. Je veux, dans cette Note, déterminer d'un certain point de vue le champ où peut varier cette fonction w_n assurant la convergence de v_n, et, à cette fin, indiquer des types de fonctions w_n très voisins des précédents, mais entraînant la divergence de v_n; en un mot, et pour parler le langage de P. du Bois-Reymond, trouver parmi les fonctions w la séparation correspondant à la limite entre la convergence et la divergence des séries v_n.

1. J'utiliserai pour établir ces résultats, l'artifice employé par Cauchy pour découvrir par le calcul d'une intégrale indéfinie la convergence ou la divergence d'une série.

PREMIER THÉORÈME. — $\varphi(x)$ *étant une fonction positive, définie pour x positif et inférieur ou égal à a, décroissante* *(infiniment grande quand x est infiniment petit); selon que l'intégrale $\int_0^{a} \varphi(x)dx$ a ou non un sens, la série $u_n\varphi(r_{n-1})$ est convergente, ou la série $u_n\varphi(r_n)$ est divergente.*

Considérons une fonction $r(x)$ égale à r_x quand x est entier et variant linéairement entre deux valeurs entières consécutives de x. On vérifie immédiatement l'égalité

$$r(x) = u_n(n-x) + r_n \qquad \text{pour} \qquad n-1 \leqq x \leqq n.$$

La fonction $r(x)$ est une fonction décroissante et tendant vers zéro quand x croît indéfiniment. $\varphi[r(x)]$ est donc une fonction de x croissante et infiniment grande simultanément avec x. Elle peut d'ailleurs n'exister qu'à partir d'une certaine valeur de x, suffisamment grande pour rendre $r(x)$ inférieur à a. Nous supposons évidemment, dans l'énoncé du théorème, $n-1$ supérieur à cette valeur, ce qui est parfaitement loisible, la convergence ou la divergence d'une série ne dépendant pas des modifications apportées à un nombre fini de ses termes. x variant dans le champ que nous venons d'indiquer, on a les inégalites suivantes :

$$r_{n-1} > r(x) > r_n \qquad \text{pour} \qquad n-1 < x < n,$$
$$\varphi(r_{n-1}) < \varphi[r(x)] < \varphi(r_n).$$
$$\varphi(r_{n-1}) < \int_{n-1}^{n} \varphi[r(x)]\,dx < \varphi(r_n).$$

En multipliant par u_n les trois termes des deux dernières inégalités, et en remarquant que $u_n dx = -dr(x)$ dans l'intervalle $n-1$ à n, on trouve :

$$u_n\,\varphi(r_{n-1}) < \int_{r_n}^{r_{n-1}} \varphi(u)\,du < u_n\,\varphi(r_n).$$

Donc

$$\sum_{n_0}^{m} u_n\,\varphi(r_{n-1}) < \int_{r_m}^{r_{n_0}} \varphi(u)\,du < \sum_{n_0}^{m} u_n\,\varphi(r_n).$$

Il suffit maintenant de faire croître m indéfiniment pour rendre évident le résultat énoncé.

Si l'intégrale $\int_0^{r_{n_0}} \varphi(u)du$ a un sens, la série

$$u_1\,\varphi(s) + u_2\,\varphi(r_1) + u_3\,\varphi(r_2) + \ldots$$

est convergente, en désignant par $s = r_0$ la somme de la série u. La somme de la nouvelle série est même inférieure à $\int_0^s \varphi(u)du$.
Le reste de la série relatif au $n^{\text{ième}}$ terme est inférieur à $\int_0^{r_n} \varphi(u)du$.

Si au contraire l'intégrale $\int_0^a \varphi(u)du$ n'a pas de sens, c'est que l'intégrale $\int_\varepsilon^a \varphi(u)\,du$, croissant quand ε décroît, surpasse toute limite. Donc, la série

$$u_1\,\varphi(r_1) + u_2\,\varphi(r_2) + \ldots$$

est divergente et, plus précisément, la somme de ses n premiers termes surpasse $\int_{r_n}^{r_1} \varphi(u)\,du$.

2. Donnons quelques applications du théorème précédent.

Comme fonctions $\varphi(x)$ dont une primitive est finie pour $x = 0$, nous citerons les suivantes et toutes celles qu'elles surpassent en deçà d'une certaine valeur positive de x

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{x^{1-\alpha}}, \quad \frac{1}{x\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{x\mathrm{L}\frac{1}{x}\cdots\mathrm{L}_{p-1}\frac{1}{x}\left(\mathrm{L}_p\frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}},$$

α étant un nombre positif fixe, et $\mathrm{L}_p\frac{1}{x}$ désignant le logarithme népérien de $\mathrm{L}_{p-1}\frac{1}{x}$. (Il faut remarquer que $\mathrm{L}_p\frac{1}{x}$ n'est défini que si x est inférieur à $\frac{1}{e_p}$ qui joue alors le rôle du nombre a de l'énoncé. Je pose : $e_p = e^{e_{p-1}}$, et $e_1 = e$, base des logarithmes népériens.)
Les séries

$$\frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}}}, \quad \frac{u_n}{r_{n-1}^{1-\alpha}}, \quad \frac{u_n}{r_{n-1}\left(\mathrm{L}\frac{1}{r_{n-1}}\right)^{1+\alpha}}, \quad \ldots,$$

$$\frac{u_n}{r_{n-1}\mathrm{L}\frac{1}{r_{n-1}}\cdots\mathrm{L}_{p-1}\frac{1}{r_{n-1}}\left(\mathrm{L}_p\frac{1}{r_{n-1}}\right)^{1+\alpha}}, \quad \ldots$$

sont convergentes, tandis que les séries

$$\frac{u_n}{r_n}, \quad \frac{u_n}{r_n\mathrm{L}\frac{1}{r_n}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{r_n\mathrm{L}\frac{1}{r_n}\cdots\mathrm{L}_p\frac{1}{r_n}}$$

sont divergentes, quelle que soit la série convergente u_n à termes positifs.

La première série désignée dans cette liste diffère peu d'une autre donnée par M. Hadamard.

Si la série $\frac{u_n}{\sqrt{r_n}}$ est convergente, il en est *a fiortiori* de même de la série

$$\frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}}=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}.$$

La série $(\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n})$ à termes positifs et dont le terme général est un infiniment petit d'un ordre moindre que celui de u_n est convergente. C'est la série de M. Hadamard.

3. Peut-on, dans l'énoncé du théorème général, remplacer pour le cas de la convergence la série $u_n\varphi(r_{n-1})$ par la série à termes supérieurs $u_n\varphi(r_n)$?

Si l'on considère des séries u_n lentement convergentes, $\frac{r_{n-1}}{r_n}$ tend vers 1. Si alors la décroissance de φ est suffisamment régulière, il est vraisemblable que la série $u_n\varphi(r_n)$ sera convergente. Ceci se vérifie, par exemple si $u_n=\frac{1}{n^{1+\alpha}}$, $\varphi(x)=\frac{1}{x^{1-\beta}}$, α et β étant positifs.

Mais, *l'intégrale de φ étant convergente au voisinage de* o, il n'est pas possible, sans mettre en défaut l'énoncé, de remplacer dans tous les cas la série $u_n\varphi(r_{n-1})$ par la série $u_n\varphi(r_n)$. La première, nous l'avons montré, est toujours convergente. La seconde peut être divergente comme le montre l'exemple suivant :

Soit $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Prenons $u_{n+1}=u_n^2$, à partir d'une certaine valeur de n, pour laquelle u_n est inférieur à $\frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}r_n&=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots\\&=u_{n+1}+u_{n+1}^2+u_{n+1}^{2^2}+\ldots+u_{n+1}^{2^p}+\ldots<\frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}<2u_{n+1}.\end{aligned}$$

Donc, $u_n\varphi(r_n)$ est ici supérieur à $\frac{u_n}{2\sqrt{u_{n+1}}}=\frac{1}{2}$. La série $u_n\varphi(r_n)$ diverge.

On montrerait sans peine que, $\varphi(x)$ étant une fonction positive décroissante, si $\int_0^a \varphi(x)\,dx$ converge, ou même simplement si $x\varphi(x)$ tend vers zéro, avec x, la série définie par la formule de récurrence $u_n\varphi(u_{n+1}) = 1$ converge et cela assez rapidement pour que $\frac{r_n}{u_{n+1}}$ tende vers 1, ainsi que $\frac{\varphi(r_n)}{\varphi(u_{n-1})}$. La série $u_n\varphi(r_n)$ diverge donc, puisque son terme général tend vers 1. Quelle que soit la fonction φ dont l'intégrale converge, il est donc possible de mettre en défaut le théorème sur la convergence de la série $u_n\varphi(r_p)$, si l'on y prend $p = n$ au lieu de $p \leqq n - 1$.

Si l'intégrale de φ diverge au voisinage de l'origine, la série $u_n\varphi(r_{n-1})$ peut être convergente bien que $u_n\varphi(r_n)$ soit toujours divergente comme nous l'avons montré.

Cependant, la série $\frac{u_n}{r_{n-1}}$ diverge toujours, elle aussi, bien que la démonstration donnée plus haut établisse la divergence de $\frac{u_n}{r_n}$. On a en effet

$$\frac{u_n}{r_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p-1}} > \frac{1}{r_{n-1}}(u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) = \frac{r_{n-1} - r_{n+p}}{r_{n-1}};$$

p croissant indéfiniment, la dernière expression tend vers 1 et non pas vers une limite infiniment petite pour n infini, comme l'exigerait, d'après le théorème de Cauchy, la convergence de la série $\frac{u_n}{r_{n-1}}$, si cette convergence se produisait.

Plus généralement, si $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ et si ψ croît indéfiniment, la série $u_n\varphi(r_{n-1})$ diverge, et non pas seulement la série $u_n\varphi(r_n)$.

On a en effet

$$\begin{aligned} &u_n\varphi(r_{n-1}) + u_{n+1}\varphi(r_n) + \ldots + u_{n+p}\varphi(r_{n+p-1}) \\ &\qquad > \varphi(r_{n-1})[u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}] = \varphi(r_{n-1})(r_{n-1} - r_{n+p}). \end{aligned}$$

Si donc $\varphi(r_{n-1}) = \frac{\psi(r_{n-1})}{r_{n-1}}$, $\psi(u)$ ne tendant pas vers zéro avec u, la série est divergente.

Mais supposons $\varphi(x) = \frac{1}{x\psi(x)}$, ψ croissant indéfiniment quand x tend vers zéro par valeurs positives $\left[\text{exemple } \psi(x) = \mathrm{L}\,\frac{1}{x}\right]$. Alors, si u_n est une série très convergente, r_{n-1} est sensiblement égal à u_n, $u_n \varphi(r_{n-1})$ est comparable à $\frac{1}{\psi(u_n)}$. Si $\psi(u_n) = n^2$, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ est convergente, bien que $u_n \varphi(r_n)$ soit divergent.

Donc il n'est pas possible de modifier, dans l'énoncé du théorème, l'indice des r sans restreindre la généralité des séries convergentes u_n, ni celle des fonctions φ classées en deux catégories suivant la convergence ou la divergence de leurs intégrales au voisinage de l'origine.

5. On montre exactement de même le théorème suivant :

Second Théorème. — *Si la série à termes positifs u_n diverge, si $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, selon que l'intégrale $\int_a^\infty \Phi(x)dx$ a ou non un sens, Φ étant une fonction décroissante de x, la série $u_n \Phi(s_n)$ converge, ou la série $u_n \Phi(s_{n-1})$ diverge.*

Donc, les séries

$$\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}}, \quad \frac{u_n}{s_n(\mathrm{L}s_n)^{1+\alpha}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{s_n \mathrm{L}s_n \ldots \mathrm{L}_{p-1} s_n (\mathrm{L}_p s_n)^{1+\alpha}}, \quad \ldots \quad (\alpha > 0)$$

convergent. Les séries

$$\frac{u_n}{s_{n-1}}, \quad \frac{u_n}{s_{n-1} \mathrm{L}s_{n-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{s_{n-1} \mathrm{L}s_{n+1} \ldots \mathrm{L}_p s_{n-1}}, \quad \ldots$$

divergent.