BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les groupes pseudo-nuls et non commutatifs de quantités hypercomplexes

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 187-200

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__187_1>

SUR LES GROUPES PSEUDO-NULS ET NON COMMUTATIFS DE QUANTITÉS HYPERCOMPLEXES.

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans deux Notes précédentes (¹) j'ai étudié les groupes commu-

---

(¹) I. FROBENIUS, *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, avril 1903).

II. CARTAN, *Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de l'Université de Toulouse*, t. XII, 1898).

III. AUTONNE, *Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1909).

IV. AUTONNE, *Sur les groupes commutatifs de quantités hypercomplexes*, (même Recueil, 1911).

On renverra à la présente liste par une notation telle que celle-ci (*Index*, II), pour désigner, par exemple, le travail de M. Cartan.

Un Mémoire assez étendu sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls paraîtra dans les *Annales de l'Université de Lyon* en 1912.

tatifs et pseudo-nuls de quantités hypercomplexes. Dans cette troisième Note, je me propose d'examiner jusqu'à quel point les résultats obtenus s'étendent aux groupes pseudo-nuls généraux, c'est-à-dire non commutatifs.

Les notations et la terminologie précédemment employées sont conservées ; cela me dispensera de les rappeler ici.

Dans un groupe (ε), m-aire, pseudo-nul et non commutatif, de quantités hypercomplexes x, la matrice antistrophe $T(x) = T_x$ ne se confond plus avec la matrice $S(x) = S_x$ du groupe. On a, pour x et y arbitraires, la relation $S_x T_y = T_y S_x$, qui exprime que dans (ε) la multiplication est associative.

Voici les principaux résultats qu'on trouve :

A tout groupe (ε) *correspond sans ambiguïté un système de* k *entiers positifs* g_λ, $\{\lambda = 1, 2, \ldots, k;\ k \leq m\}$, $\sum_\lambda g_\lambda = m$, *tels que* (*pour un choix convenable de variables*) *on ait à la fois*

$$(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, k), \qquad S_x = (p_{\rho\mu}(x)), \qquad T_x = (q_{\lambda\mu}(x)),$$

où $p_{\lambda\mu}$ *et* $q_{\lambda\mu}$ *sont des Tableaux à* g_λ *lignes et* g_μ *colonnes, formés avec des éléments de* S_x *et de* T_x *avec* $p_{\lambda\mu}(x) \equiv 0$, $q_{\lambda\mu}(x) \equiv 0$, *pour* $\mu \geqq \lambda$.

On a ainsi une *forme réduite* entièrement analogue à celle qui se présente pour les groupes commutatifs.

Répartissons comme précédemment (*Index*, IV, 18) les m unités ε_α, $\{\alpha = 1, 2, \ldots, m\}$ en k systèmes ε_λ, à g_λ termes. On a encore la proposition : *le produit d'une unité de* ε_μ *par une unité de* ε_ν *ne dépend que des unités de* $\varepsilon_\lambda, \varepsilon_{\lambda+1}, \ldots, \varepsilon_k$, λ étant le plus petit entier qui surpasse à la fois μ et ν.

Le *prolongement* d'un groupe se fait comme en matière de groupes commutatifs.

J'en profite pour démontrer que tous les groupes, où $g_\lambda = 1$ et, par suite, $k = m$, sont commutatifs et sont parmi ceux construits précédemment.

Décembre 1911.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. Prenons un groupe non commutatif (ε), dont les m unités ε_α, $\{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m\}$ se multiplient suivant les formules (les $a_{\nu\beta\gamma}$ étant des constantes ordinaires, réelles ou complexes),

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}. \tag{1}$$

Si $z = xy$ est le produit des deux quantités hypercomplexes $x = \sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta$ et $y = \sum_\gamma \varepsilon_\gamma y_\gamma$, dans l'ordre indiqué des facteurs, on a

$$z_\alpha = \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta y_\gamma. \tag{2}$$

2. Nommons u_α, x_β, y_γ, trois m paramètres quelconques et $F(u, x, y)$ la forme trilinéaire

$$F(u, x, y) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha x_\beta y_\gamma. \tag{3}$$

Soient

$$r_{\beta\gamma}(u) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \, \partial y_\gamma} = \sum_\alpha u_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}$$

$$s_{\alpha\gamma}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \, \partial y_\gamma} = \sum_\beta x_\beta a_{\alpha\beta\gamma},$$

$$t_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \, \partial x_\beta} = \sum_\gamma y_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

M. Frobenius (*Index*, I) introduit trois matrices m-aires : la matrice du groupe

$$S(x) = S_x = [s_{\alpha\gamma}(x)],$$

la matrice antistrophe

$$T(y) = T_y = [t_{\alpha\beta}(y)],$$

la matrice parastrophe

$$R(u) = R_u = [r_{\beta\gamma}(u)].$$

Le groupe (ε) est défini sans ambiguïté par une quelconque de ces trois matrices.

3. Désignons par $f_\alpha(x\,;y)$ la forme bilinéaire (1)

$$z_\alpha = (xy)_\alpha = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta y_\gamma\,;$$

on a

$$s_{\alpha\gamma}(x) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\gamma}; \qquad t_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

La connaissance des m formes bilinéaires $f_\alpha(x\,;y)$ assure sans ambiguïté celle du groupe (ε) et l'on peut écrire

$$(\varepsilon) = (f_1, f_2, \ldots, f_\alpha, \ldots, f_m).$$

Pour que (ε) soit commutatif, il faut et il suffit que chacune des formes bilinéaires f_α soit symétrique.

4. Rappelons enfin les formules (*Index*, I)

$$\begin{gathered} \mathrm{S}(xy) = \mathrm{S}_x \mathrm{S}_y; \qquad \mathrm{T}(xy) = \mathrm{T}_y \mathrm{T}_x, \\ \mathrm{S}_x \mathrm{T}_y = \mathrm{T}_y \mathrm{S}_x \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R}_u \mathrm{S}_x = \mathrm{T}'_x \mathrm{R}_u \end{gathered}$$

pour x, y, u quelconques, dont les deux dernières expriment, l'une ou l'autre, que la multiplication est, dans le groupe (ε), associative.

D'ailleurs tout système de m^3 constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$, telles que : 1° S_x et T_y soient échangeables; 2° les deux déterminants $|\rho \mathrm{E} - \mathrm{S}_x|$ et $|\rho \mathrm{E} - \mathrm{T}_y|$ soient égaux à ρ^m, définit sans ambiguïté un groupe pseudo-nul (ε).

5. Soit $\mathrm{B} = (b_{\alpha\beta})$ une matrice m-aire quelconque; posons

$$\mathrm{Y}_\alpha = \sum_\beta \mathrm{X}_\beta b_{\alpha\beta}.$$

On écrira symboliquement $\mathrm{Y} = \mathrm{B}[\mathrm{X}]$.
Alors on voit que la formule (2) du n° 1 s'écrit

$$xy = \mathrm{S}_x[y] = \mathrm{T}_y[x]. \tag{1}$$

6. $C = (c_{\alpha\beta})$ étant une matrice invertible, posons (*Index*, I, § 9) $\varepsilon = C'[\bar{\varepsilon}]$ c'est-à-dire $\varepsilon_\beta = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha c_{\alpha\beta}$.

On aura $\bar{x} = C[x]$, pour

$$x = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \bar{x}_\alpha,$$

et les formules de multiplication

$$\bar{\varepsilon}_\beta \bar{\varepsilon}_\gamma = \sum_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha \bar{a}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Nommons $\bar{S}$, $\bar{T}$, $\bar{R}$ les matrices construites avec les $\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}$, comme S, T, R sont construites avec les $a_{\alpha\beta\gamma}$. On a les formules

$$S_x = C^{-1}\bar{S}(\bar{x})\, C, \qquad T_y = C^{-1}\bar{T}(\bar{y})\, C,$$
$$R_u = C' \ \bar{R}(\bar{u})\, C, \qquad R'_u = C' \ \bar{R}'(\bar{u})\, C$$

avec $u = C'[\bar{u}]$.

Comme la forme bilinéaire $f_\alpha(x, y)$ n'est pas autre chose que la coordonnée $(xy)_\alpha$ de xy, on a

$$\bar{f}_\alpha(\bar{x}; \bar{y}) = C[f(x; y)],$$

en vertu des formules ci-dessus.

7. Supposons que (ε) soit un groupe pseudo-nul et prenons dans (ε) la quantité hypercomplexe quelconque x.

Nommons σ le plus petit entier positif tel que $x^\sigma = 0$. Comme $S(0) = T(0) = 0$, il vient

$$0 = S(x^\sigma) = S_x^\sigma = T(x^\sigma) = T_x^\sigma$$

et

$$|\rho E - S_x| = |\rho E - T_x| = \rho^m.$$

Une certaine puissance de S_x et T_x est nulle ; soient p et q les entiers positifs minima, tels que

$$S_x^p = S(x^p) = 0, \qquad T_x^q = T(x^q) = 0.$$

Les formules (1) du n° 5 donnent

$$x^{p+1} = S_{x^p}[x] = 0, \qquad x^{q+1} = T_{x^q}[x] = 0;$$

donc

$$\sigma \leqq p + 1, \qquad \sigma \leqq q + 1.$$

Les déterminants $|\rho E - S_x|$ ou $|\rho E - T_x|$ décomposés en leurs successifs (*Elementarteiler*) donnent, en vertu de théories connues,

$$|\rho E - S_x| = \rho^p \rho^{p'}, \qquad \ldots \qquad p \geqq p' \geqq \ldots,$$
$$|\rho E - T_x| = \rho^q \rho^{q'}, \qquad \ldots \qquad q \geqq q' \geqq \ldots.$$

Cela fournit la manière de calculer p et q. Il est évident que si l'on particularise x en lui attribuant une valeur $x = \xi$ convenablement choisie, on peut avoir une autre décomposition

$$|\rho E - S_\xi| = \rho^\varpi \rho^{\varpi'}, \qquad \ldots \qquad \varpi \geqq \varpi' \geqq \ldots,$$
$$|\rho E - T_\xi| = \rho^\chi \rho^{\chi'}, \qquad \ldots \qquad \chi \geqq \chi' \geqq \ldots.$$

seulement, en vertu même de la théorie des successifs, $\varpi \leqq p$, $\chi \leqq q$.

Voici comment on s'en assure :

Nommons par exemple $\Delta_{\alpha\beta}(\rho; x)$, les premiers mineurs du déterminant $|\rho E - S_x|$, $\{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m\}$. On aura, par définition,

$$\Delta_{\alpha\beta}(\rho; x) = \rho^{m-p} \{ P_{\alpha\beta 0}(x) + \rho P_{\alpha\beta 1}(x) + \ldots \},$$

un au moins des m^2 polynomes $P_{\alpha\beta 0}(x)$ étant donné $\neq 0$. Pour $x = \xi$, il peut se faire que tous les polynomes $P_{\alpha\beta 0}(\xi)$, $P_{\alpha\beta 1}(\xi)$, ..., $P_{\alpha\beta, h-1}(\xi)$ soient nuls à la fois. Les $\Delta_{\alpha\beta}(\rho; \xi)$ sont divisibles par ρ^{m-p+h}, sans l'être par $\rho^{m-p+h+1}$. Il vient alors par définition $\varpi = p - h \leqq p$.

De même pour le déterminant $|\rho E - T_x|$.

CHAPITRE II.

FORME RÉDUITE.

8. Un théorème dû à M. Cartan (*Index*, II, 35) dit ceci : *dans tout groupe pseudo-nul, il existe au moins un nombre* η, $\eta \neq 0$, *tel que, pour* x *quelconque dans le groupe, on ait à la fois* $y\eta = \eta x = 0$.

Alors [formules (1) du n° 5]

$$0 = S_\eta[x] = T_\eta[x];$$

comme x est quelconque, il vient les $2m^2$ équations

$$S_\eta = 0 = s_{\alpha\beta}(\eta), \qquad T_\eta = 0 = t_{\alpha\beta}(\eta)$$

aux m inconnues η_α.

Ces $2m^2$ équations doivent se réduire à h distinctes, $h < m$, qu'on peut toujours (6) supposer être $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_h = 0$, $\eta_{h+1}, \ldots, \eta_m$ restant arbitraires. S_η et T_h ne contiennent que $\eta_1, \ldots, \eta_h$; par suite

$$\begin{array}{rl} \text{pour } S_\eta,\ a_{\alpha\beta\gamma} = 0 & (\text{pour } \beta > h,\ \alpha \text{ et } \gamma \text{ quelconques}), \\ \text{pour } T_\eta,\ a_{\alpha\beta\gamma} = 0 & (\text{pour } \gamma > h,\ \alpha \text{ et } \beta \text{ quelconques}); \\ t_{\alpha\beta}(y) \equiv 0 & (\text{pour } \alpha \text{ quelconque, } \beta > h), \\ s_{\alpha\gamma}(x) \equiv 0 & (\text{pour } \alpha \text{ quelconque, } \gamma > h). \end{array}$$

S_x et T_y ont, pour x et y quelconques, leurs $m - h$ dernières colonnes composées de zéros.

Par suite

$$S_x = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \mathfrak{L}(x) & 0 \\ \mathfrak{P}(x) & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} h \\ m-h \end{array}, \\ h,\quad m-h, & \end{array} \qquad T_y = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}(y) & 0 \\ \mathfrak{Q}(y) & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} h \\ m-h \end{array}, \\ h,\quad m-h, & \end{array}$$

$\mathfrak{L}(x)$, $\mathfrak{M}(y) =$ matrice h-aire

$\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(y) =$ Tableau à $m - h$ lignes et h colonnes.

9. Les matrices S_x et T_y sont échangeables (4); les matrices h-aires $\mathfrak{L}(x)$ et $\mathfrak{M}(y)$ le sont donc aussi.

Les relations (7)

$$|\rho E - S_x| = |\rho E - T_y| = \rho^m$$

entraînent, $\{E_h = h\text{-aire unité}\}$

$$|\rho E_h - \mathfrak{L}(x)| = |\rho E_h - \mathfrak{M}(y)| = \rho^h.$$

Donc (n° 4, *in fine*) $\mathfrak{L}(x)$ *et* $\mathfrak{M}(y)$ *sont la matrice et la matrice antistrophe d'un groupe* $(\mathfrak{I})$ *h-aire et pseudo-nul, aux h unités* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h$.

On peut reprendre sur $(\mathfrak{I})$ le même raisonnement que sur (ε) et les mêmes considérations que précédemment (*Index*, IV, 16 à 22). On arrive ainsi à diverses propositions que j'énoncerai sans démonstration et qui sont la généralisation de ce qui se passe pour les groupes commutatifs.

10. S_x et T_y peuvent se mettre sous la *forme réduite*

$$S_x = \begin{vmatrix} o \\ p_{21} & o \\ p_{31} & p_{32} & o \\ \dots & \dots & . \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & . & p_{\lambda\mu} & \dots & p_{\lambda,\lambda-1} & o \\ \dots & \dots & . & \dots \\ p_{k1} & \dots & & & & & p_{k,k-1} & o \end{vmatrix},$$

$$T_y = \begin{pmatrix} o \\ q_{21} & o \\ \dots & . \end{pmatrix},$$

où $p_{\lambda\mu} = p_{\lambda\mu}(x)$ et $q_{\lambda\mu} = q_{\lambda\mu}(y)$ sont des Tableaux à g_λ lignes et g_μ colonnes empruntées respectivement à S_x et T_y, avec $m = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$, $\{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, k\}$, $k \leqq m$. De plus, $p_{\lambda\mu}(x) = q_{\lambda\mu}(y) \equiv o$ pour $\mu \geqq \lambda$.

Si l'on considère $p_{\lambda\mu}$ ou $q_{\lambda\mu}$ comme une lettre unique, on a deux matrices k-aires

$$P = (p_{\lambda\mu}), \qquad Q = (q_{\lambda\mu})$$

qui sont respectivement le canevas de S_x et de T_y.

11. On répartira

Les unités ε_α....................	en systèmes...	$\mathcal{E}_\lambda$
Les variables x_α...............	» ...	$\mathfrak{X}_\lambda$
Les variables y_α...............	» ...	$\mathfrak{Y}_\lambda$
Les formes bilinéaires $f_\alpha(x, y)$.	» ...	$\mathfrak{F}_\lambda$
$(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$	$(\lambda = 1, 2, \ldots, k)$.	

de la même façon que précédemment (*Index*, IV, 18), le système d'indice λ étant à g_λ termes.

On dira que l'entier α, pris dans la suite $1, 2, \ldots, m$, appartient à l'indice λ, pris dans la suite $\lambda = 1, 2, \ldots, k$, si x_α, par exemple, figure dans le système $\mathfrak{X}_\lambda$. Pour mettre en évidence les k entiers g_λ, on emploiera la notation

$$(\varepsilon) = \{ x_1, \ldots, x_{g_1}; x_{g_1+1}, \ldots, x_{g_1+g_2}; \ldots; \ldots, x_{m-1}, x_m \}.$$

Autrement dit, on séparera :

1° Par le point et virgule, les différents systèmes $\mathfrak{X}_\lambda$;

2° Par la virgule, les différentes variables x_α d'un même système $\mathfrak{X}_\lambda$.

12. On aura encore (*Index*, IV, **20**) la proposition que voici : *le produit d'une unité du système $\mathcal{E}_\mu$ par une unité du système $\mathcal{E}_\nu$ ne dépend que des unités de $\mathcal{E}_\lambda$, $\mathcal{E}_{\lambda+1}$, ..., $\mathcal{E}_k$, où λ désigne le plus petit entier qui dépasse à la fois μ et ν.*

13. Les formes bilinéaires $f_\alpha(x;y)$ du système $\mathfrak{F}_\lambda$ ne contiennent que les variables des systèmes $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, ..., $\mathfrak{X}_{\lambda-1}$ et $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, ..., $\mathfrak{Y}_{\lambda-1}$. Si une variable x_α de $\mathfrak{X}_{\lambda-1}$ ne figure dans aucune des expressions $f_\alpha(x;y)$ de $\mathfrak{F}_\lambda$, alors la variable y_α de $\mathfrak{Y}_{\lambda-1}$ figurera sûrement dans une au moins des formes bilinéaires $f_\alpha(x;y)$ de $\mathfrak{F}_\lambda$.

Cela résulte immédiatement du raisonnement du paragraphe 8.

CHAPITRE III.

PROLONGEMENT D'UN GROUPE.

14. Je dirai qu'un groupe (ζ) pseudo-nul et $(m+1)$-aire a la forme Z (*Index*, IV, **27**) si l'on a, pour un nombre quelconque x de (ζ),

$$x\,\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1}\,x = 0.$$

Tout groupe peut être mis sous la forme Z, car tout groupe peut-être mis sous la forme réduite, laquelle n'est qu'un cas particulier de la forme Z.

Un groupe conserve la forme Z après transformation par une collinéation (*Index*, IV, **27**)

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & 1 \end{array} & \end{array},$$

laquelle, laissant ε_{m+1} fixe, soumet les m premières unités à une collinéation quelconque m-aire D.

15. Si, pour x quelconque $x\varepsilon_{m-1} = \varepsilon_{m-1}x = 0$, on a

$$0 = \varepsilon_\beta \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1} \varepsilon_\beta$$
$$0 = a_{\alpha\beta,\, m+1} = a_{\alpha,\, m+1,\, \beta} \qquad \{\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m+1\}.$$

Nommons $\mathcal{S}_x$ et $\mathfrak{T}_y$ la matrice et la matrice antistrophe du groupe $(m+1)$-aire (ζ). On voit que $\mathcal{S}_x$ et $\mathfrak{T}_y$ ont leur dernière colonne composée de zéros :

$$\mathcal{S}_x = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ L_x & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & 1 \end{array} & \end{array}, \qquad \mathfrak{T}_y = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ M_y & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & 1 \end{array} & \end{array}.$$

Le même raisonnement qu'au n° 9 montre que S_x et T_y sont la matrice et la matrice antistrophe d'un groupe m-aire (ε) pseudo-nul.

On dira encore (*Index*, IV, 29) que le groupe (ζ) est le *prolongement* du groupe (ε), qu'on passe de (ε) à (ζ) par *prolongement*, qu'on obtient (ζ) en *prolongeant* (ε), etc.

16. (ζ) reste le prolongement de (ε) quand on fait intervenir la collinéation $(m+1)$-aire C du n° 14. On peut profiter de l'indétermination de la collinéation m-aire D, qui transforme (ε), pour mettre (ε) sous forme réduite. Donc encore (*Index*, IV, 30) *tous les groupes $(m+1)$-aires pseudo-nuls s'obtiennent en prolongeant des groupes pseudo-nuls m-aires, mis sous forme réduite.*

17. Voici comment (*Index*, IV, 31) s'opérera le calcul effectif du groupe prolongé (ζ), le groupe (ε) étant supposé connu et pris sous forme réduite.

On a à exprimer que les deux matrices $(m+1)$-aires $\mathcal{S}_x$ et $\mathfrak{T}_y$ (15) sont échangeables. Les deux matrices m-aires S_x et T_y le sont déjà par hypothèse. On n'a donc plus qu'à écrire les m égalités $\{\beta = 1, 2, \ldots, m\}$

$$(0) \qquad \sum_\rho s_{m+1,\rho}(x)\, t_{\rho\beta}(y) = \sum_\rho t_{m+1,\rho}(y)\, s_{\rho\beta}(x),$$

où $\rho = \beta+1, \beta+2, \ldots, m$, puisque, dans les matrices T_y et S_x, sont nuls les éléments où le premier indice ne surpasse pas le second. Cela résulte de la forme réduite. Les formules (o) développées sont

$$\sum_{\rho}\sum_{\lambda} x_\lambda a_{m+1,\lambda\rho} \sum_{\mu} y_\mu a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\rho}\sum_{\mu} a_{m+1,\rho\mu} y_\mu \sum_{\lambda} x_\lambda a_{\rho\lambda\beta}.$$

Identifions de part et d'autre les coefficients de $x_\lambda y_\mu$; il vient

$$\sum_{\rho} a_{m+1,\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\rho} a_{m+1,\rho\mu} a_{\rho\lambda\beta};$$

sont connus tous les coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$ où $\alpha < m + 1$, puisque ces coefficients figurent dans le groupe (ε). Posons $a_{m+1,\beta\gamma} = b_{\beta\gamma}$. Les m^2 quantités $b_{\beta\gamma}$ $\{\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m\}$ sont ceux de la forme bilinéaire $f_{m+1}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m)$.

18. Tout compte fait, on a à résoudre par rapport aux m^2 inconnues $b_{\beta\gamma}$ le système des m^3 équations linéaires et homogènes, $\{\beta = 1, 2, \ldots, m\}$

$$[\beta] \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\rho} b_{\lambda\rho} a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\rho} b_{\rho\mu} a_{\rho\lambda\beta} \\ (\rho = m, m-1, \ldots, \beta+1;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m). \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

19. J'ai construit (*Index*, IV, 23 à 25) les groupes commutatifs et pseudo-nuls, pour lesquels, dans la forme réduite (10), $k = m$ et tous les g_λ sont égaux à l'unité. Ces groupes se confondent avec les groupes commutatifs et pseudo-nuls de rang maximum, c'est-à-dire avec ceux où la matrice S_x a le rang maximum $m - 1$. On a pour la forme réduite $s_{\alpha\beta}(x) = x_{\alpha-\beta}$.

20. On va montrer que *tous les groupes, où tous les g_λ sont égaux à l'unité, sont des groupes commutatifs*. On ne parle, bien entendu, que des groupes pseudo-nuls.

Faisons d'abord $m = 2$ et, avec les notations du n° 11, $(\varepsilon) = (x_1; x_2)$. Alors $f_1(x; y) = 0$, $f_2(x; y) = a_{211} x_1 y_1$. Les deux formes bilinéaires $f_\alpha(x\,;\,y)$ sont symétriques et le groupe est commutatif (3).

Montrons que, si la proposition est vraie pour $m - 1$, elle est vraie aussi pour m.

Il est évident que, pour construire le groupe m-aire cherché, il faut prolonger le groupe commutatif $(m-1)$-aire de rang maximum.

21. On a à appliquer les formules des nos 17 et 18, en changeant m en $m-1$.

Il faut calculer les coefficients de la forme bilinéaire $f_m(x\,;\,y)$, où ne peuvent figurer ni x_m, ni y_m, mais où figure effectivement une au moins des deux variables x_{m-1} et y_{m-1} des systèmes $\mathfrak{X}_{m-1}$ et $\mathfrak{Y}_{m-1}$ (13). On ne peut donc avoir simultanément

$$s_{m,m-1}(x) = \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} = 0, \qquad t_{m,m-1}(y) = \frac{\partial f_m}{\partial x_{m-1}} = 0.$$

22. Exprimons que les deux matrices S_x et T_y du groupe m-aire cherché sont échangeables. Il suffira, en vertu de la théorie du prolongement, d'exprimer que $(S_x T_y)_{m\beta} = (T_y S_x)_{m\beta}$, pour $\beta = 1, 2, \ldots, m-2$, car on a évidemment

$$0 = (S_x T_y)_{mm} = (T_y S_x)_{mm} = (S_x T_y)_{m,\,m-1} = (T_y S_x)_{m,\,m-1}.$$

Il vient ainsi les $m - 2$ équations

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_\rho s_{m,\rho}(x)\, t_{\rho\beta}(y) = \sum_\sigma t_{m,\sigma}(y)\, s_{\sigma\beta}(x) \\ &(\rho,\,\sigma = \beta+1,\ \beta+2,\ \ldots,\ m-1;\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-2). \end{aligned}\right.$$

Les deux sommes comprennent $m - 1 - \beta$ termes.

23. Posant

$$s_{m,\rho}(x) = \frac{\partial f_m}{\partial y_\rho} = s_\rho(x),$$
$$t_{m,\sigma}(y) = \frac{\partial f_m}{\partial x_\sigma} = t_\sigma(y),$$

et remarquant que (19) $s_{\sigma\beta}(x) = x_{\sigma-\beta}$, $t_{\rho\beta}(y) = y_{\rho-\beta}$, on écrira plus simplement

$$\sum_{\rho} y_{\rho-\beta}\, s_{\rho}(x) = \sum_{\sigma} x_{\sigma-\beta}\, t_{\sigma}(y).$$

Tout compte fait, les expressions $s_{\rho}(x)$ et $t_{\sigma}(y)$ sont liées par les $m-2$ relations, $\{\beta = 1, 2, \ldots, m-2\}$

$$[\beta] \qquad \begin{aligned} & y_1 s_{\beta+1}(x) + y_2 t_{\beta+2}(x) + \ldots + y_{m-1-\beta} s_{m-1}(x) \\ & = x_1 t_{\beta+1}(y) + \ldots + x_{m-1-\beta} t_{m-1}(y). \end{aligned}$$

24. Désignons par $Q_{\sigma}(x\,;y) = Q_{\sigma}(y\,;x)$ la forme bilinéaire symétrique $x_1 y_{\sigma-1} + x_2 y_{\sigma-2} + \ldots + x_{\sigma-1} y_1$.

LEMME. — *On a* $s_{\rho}(x) = t_{\rho}(x) = Q_{m+1-\rho}(K\,;x)$, *les* K *étant des constantes.*

Je dis que le lemme est vrai pour $\rho = m-1$. En effet, la relation $[\beta]$ ci-dessus donne

$$y_1 s_{m-1}(x) = x_1 t_{m-1}(y).$$

On ne peut avoir (21)

$$s_{m,m-1}(x) = s_{m-1}(x) = t_{m,m-1}(y) = t_{m-1}(y) \equiv 0\,;$$

donc

$$s_{m-1}(x) = t_{m-1}(x) = k_1 x_1 = Q_2(K\,;x),$$

ce qui est conforme au lemme.

On va établir que, si le lemme est vrai pour

$$\rho = m-1,\ m-2,\ \ldots,\ \beta+2,$$

il est vrai aussi pour $\beta+1$, c'est-à-dire que le lemme est vrai pour $\rho = m-1, m-2, \ldots, 3, 2$.

Cela suffit pour établir la symétrie de la forme bilinéaire $f_m(x\,;y)$, c'est-à-dire la commutabilité du groupe m-aire.

En effet, des égalités

$$\left.\begin{aligned} s_{\rho}(x) &= s_{m\rho}(x) = \sum_{\alpha} a_{m\alpha\rho} x_{\alpha} \\ t_{\rho}(x) &= t_{m\rho}(x) = \sum_{\alpha} a_{m\rho\alpha} x_{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (\rho = 2, 3, \ldots, m-1)$$

on tire

$$a_{m\alpha\rho} = a_{m\rho\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1\,;\ \rho = 2, 3, \ldots, m-1)\,;$$

la symétrie de la forme bilinéaire $(m-1)$-aire $f_m(x\,;y)$ devient évidente.

25. Si le lemme est supposé vrai pour

$$\rho = \beta+2,\ \beta+3,\ \ldots,\ m-1,$$

la relation $[\beta]$ du n° 23 devient

$$[\beta_1] \qquad y_1 s_{\beta+1}(x) + \Omega(y\,;x) = x_1 t_{\beta+1}(y) + \Omega(x\,;y),$$

où

$$\begin{aligned}
\Omega(y\,;x) &= y_2 Q_{m-1-\beta}(K\,;x) + y_3 Q_{m-2-\beta}(K\,;x) + \ldots \\
&\quad + y_{m-1-\beta} Q_2(K\,;x) \\
&= y_2(K_1 x_{m-2-\beta} + K_2 x_{m-3-\beta} + K_3 x_{m-4-\beta} + \ldots \\
&\quad + K_{m-3-\beta} x_2 + K_{m-2-\beta} x_1) \\
&\quad + y_3(K_1 x_{m-3-\beta} + K_2 x_{m-4-\beta} + K_3 x_{m-5-\beta} + \ldots \\
&\quad + K_{m-4-\beta} x_2 + K_{m-3-\beta} x_1) + \ldots \\
&\quad + y_{m-2-\beta}(K_1 x_2 + K_2 x_1) + y_{m-1-\beta} K_1 x_1 \\
&= K_1(x_1 y_{m-1-\beta} + x_2 y_{m-2-\beta} + \ldots + x_{m-3-\beta} y_3 + x_{m-2-\beta} y_2) \\
&\quad + K_2(x_1 y_{m-2-\beta} + \ldots + x_{m-4-\beta} y_3\, x_{m-3-\beta} y_2) + \ldots \\
&\quad + K_{m-2-\beta} x_1 y_2 \\
&= K_1[Q_{m-\beta}(x\,;y) - y_1 x_{m-\beta-1}] \\
&\quad + K_2[Q_{m-1-\beta}(x\,;y) - y_1 x_{m-2-\beta}] + \ldots \\
&\quad + K_{m-2-\beta}[Q_3(x\,;y) - y_1 x_2] \\
&= \Phi(x\,;y) - y_1(K_1 x_{m-\beta-1} + K_2 x_{m-\beta-2} + \ldots + K_{m-2-\beta} x_2),
\end{aligned}$$

où

$$\Phi(x\,;y) = \Phi(y\,;x) = K_1 Q_{m-\beta}(y\,;x) + \ldots + K_{m-2-\beta} Q_3(x\,;y).$$

26. Transportons dans la relation $[\beta_1]$ ci-dessus les expressions de $\Omega(x\,;y)$ et de $\Omega(y\,;x)$ qui viennent d'être construites. L'expression symétrique Φ en x et y disparaît de part et d'autre et il reste la relation

$$\begin{aligned}
[\beta_2] \qquad & y_1[s_{\beta+1}(x) - K_1 x_{m-\beta-1} - \ldots - K_{m-\beta-2} x_2] \\
&= x_1[t_{\beta+1}(y) - K_1 y_{m-\beta-1} - \ldots - K_{m-\beta-2} y_2].
\end{aligned}$$

Introduisons la constante arbitraire $K_{m-\beta-1}$; la condition $[\beta_2]$ donne

$$s_{\beta+1}(x) = Q_{m-\beta}(x\,;K), \qquad t_{\beta+1}(y) = Q_{m-\beta}(y\,;K).$$

C. Q. F. D.