CAMILLE JORDAN

Essai sur la géométrie à *n* dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 103-174

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__103_2>

Essai sur la géométrie à n dimensions; par M. Camille Jordan.

(Séance du 12 mai 1875)

On sait que la fusion opérée par Descartes entre l'algèbre et la géométrie ne s'est pas montrée moins féconde pour l'une de ces sciences que pour l'autre.

Car, si d'une part les géomètres ont appris, au contact de l'analyse, à donner à leurs recherches une généralité jusque-là inconnue, les analystes, de leur côté, ont trouvé un puissant secours dans les images de la géométrie, tant pour découvrir leurs théorèmes que pour les énoncer sous une forme simple et frappante.

Ce secours cesse lorsqu'on passe à la considération des fonctions de plus de trois variables; aussi la théorie de ces fonctions est-elle relativement fort en retard. Le moment semble venu de combler cette lacune en généralisant les résultats déjà obtenus pour ce cas de trois variables. Un grand nombre de géomètres s'en sont déjà occupés d'un manière plus ou moins immédiate. Nous ne connaissons cependant aucun travail d'ensemble sur ce sujet (*).

Nous nous proposons, dans le présent essai, de montrer comment les principales formules de la théorie de la ligne droite et du plan doivent être généralisées pour s'étendre aux fonctions linéaires d'un nombre quelconque de variables. L'étude de ces questions élémentaires doit naturellement précéder toute recherche relative aux fonctions de degré supérieur.

Bien que ces recherches soient purement algébriques, nous avons cru utile d'emprunter, ainsi que nos devanciers, quelques expressions à la géométrie. Ainsi, nous considérons un *point* comme défini dans l'espace à n dimensions, par les valeurs de *n coordonnées* $x_1,\ldots,x_n$. Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un plan ; k équations linéaires simultanées, un *k-plan ; n* — 1 équations, une droite. La *distance* de deux points sera $\sqrt{(x_1-x_1')^2+\ldots}$; etc.

Ces définitions posées, nous étudions, dans la section I de notre Mémoire, les divers degrés de parallélisme qui peuvent exister entre deux multiplans.

Dans la seconde section, nous donnons les conditions de perpendicularité.

Dans la troisième, les formules de transformation des coordonnées.

Les sections suivantes renferment des résultats plus intéressants.

Les sections IV et V sont consacrées à l'étude des relations indépendantes du choix des axes (les coordonnées restant rectangulaires), qui peuvent exister entre deux multiplans. Nos principaux résultats consistent dans les propositions suivantes :

1° *Un système formé d'un k-plan* P_k *et d'un l-plan* P_l *passant par un même point de l'espace a* ρ *invariants distincts,* ρ *étant le plus petit des nombres* k, l, $n-k$, $n-l$. *On peut considérer ces invariants comme définissant les* angles *des deux multiplans.*

2° *Les divers plans perpendiculaires à* P_k *et à* P_l *forment respectivement par leurs intersections un n—k plan* P_{n-k} *et un n—l plan* P_{n-l}, *formant entre eux les mêmes angles que* P_k *et* P_l.

3° *Si* P_k *et* P_l *n'ont pas de point commun, on aura un invariant de plus, à savoir leur plus courte distance. Cet invariant s'exprime par une fraction,*

(*) Un seul chapitre de cette nouvelle géométrie nous paraît pouvoir être considéré comme à peu près achevé; c'est celui de la courbure des surfaces. (Voir la thése de M. Morin, 1867, et les mémoires de M. Sophus Lie, *Gœttinger Nachrichten*, 1871.)

dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés de déterminants.

Dans la section VI, nous donnons le système des formules qui relient entre eux les angles mutuels des divers multiplans formés avec n plans donnés quelconques (se coupant au même point). Ces formules se réduisent, pour $n=3$, à celles de la trigonométrie sphérique. Nous les rattachons à la considération du déterminant de la forme quadratique qui donne la distance de deux points (les n plans donnés étant pris pour plans coordonnés).

Dans la section VII, nous montrons comment une substitution orthogonale de déterminant 1 peut être ramenée par un changement d'axes rectangulaires à une forme canonique simple, dépendant de $\frac{n}{2}$ invariants si n est pair, de $\frac{n-1}{2}$ s'il est impair. Nous donnons les équations différentielles partielles auxquelles satisfont ces invariants. De cette recherche, nous déduisons entre autres résultats la généralisation des théorèmes suivants :

Tout mouvement plan se réduit à une rotation autour d'un point.

Tout mouvement dans l'espace est un mouvement hélicoïdal.

Nous en tirons encore la généralisation de la loi de réciprocité signalée par M. Chasles, et qui a servi de fondement à ses belles recherches sur le mouvement d'un corps solide.

Nous terminons en donnant les lois de la composition des mouvements infiniment petits dans l'espace à 4 dimensions. Le résultat auquel nous arrivons se formule dans ce théorème :

Une rotation R, *autour d'un point dans l'espace à 4 dimensions, peut être représentée dans l'espace à 3 dimensions par deux droites* A *et* B, *de grandeur et de direction convenables. Deux rotations* R_1 *et* R_2, *respectivement représentées par les droites* A_1 *et* B_1, A_2 *et* B_2, *auront pour résultante une rotation représentée par les droites* A, *résultante de* A_1 *et* A_2, *et* B, *résultante de* B_1 *et* B_2 (*ces droites étant combinées suivant la règle du parallélogramme*).

I. DÉFINITIONS. — PARALLÉLISME.

1. Nous définirons la position d'un point dans l'espace à n dimensions au moyen de n coordonnées $x_1, \ldots, x_n$.

Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un *plan ;* deux équations linéaires simultanées, distinctes, et non incompatibles, définiront un *biplan; k* équations, un *k-plan ;* $n-1$ équations définiront une *droite ;* n équations, un point.

On pourra comprendre tous les êtres géométriques ci-dessus sous le nom générique de *multiplans.*

2. Soient

(1) $$A_1 = 0, \ldots, A_k = 0$$

les équations d'un k-plan P_k; en les combinant linéairement, on obtiendra une infinité d'équations de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = 0.$$

Les plans représentés par ces diverses équations auront évidemment P_k pour intersection commune, et nous les appellerons pour abréger *les plans générateurs de* P_k. Leurs intersections deux à deux, trois à trois,..., $k-1$ à $k-1$, donneront une infinité de biplans, de triplans, etc., contenant P_k, et qu'on pourra appeler *les biplans*, *les triplans générateurs*, etc., de P_k.

Il est clair que l'on pourra prendre pour définir P_k, au lieu des équations (1), les équations de k plans générateurs quelconques

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = 0, \quad \lambda'_1 A_1 + \ldots + \lambda'_k A_k = 0, \ldots,$$

pourvu que le déterminant des coefficients λ ne soit pas nul.

D'autre part, soit k' un entier quelconque $> k$, et ne dépassant pas n. Si l'on joint aux équations (1), qui déterminent P_k, $k' - k$ nouvelles équations $A_{k+1} = 0, \ldots, A_{k'} = 0$, l'ensemble de ces équations (supposées distinctes et non incompatibles) déterminera un k'-plan contenu en entier dans P_k. Nous dirons que les k'-plans ainsi obtenus sont *les* k'*-plans de* P_k.

Nous remarquerons enfin que les coordonnées courantes d'un k-plan quelconque

$$A_1 = 0, \ldots, A_k = 0,$$

pourront être exprimées linéairement en fonction de $n-k$ variables auxiliaires indépendantes. Il suffira en effet de poser

$$A_{k+1} = \lambda_1, \ldots, A_n = \lambda_{n-k},$$

$A_{k+1}, \ldots, A_n$ étant des fonctions linéaires quelconques de $x_1, \ldots, x_n$, et l'on aura un système de n équations qui permettront d'exprimer ces coordonnées en fonction des nouvelles variables λ.

3. *Un plan sera déterminé en général par* n *points.* En effet, l'équation générale du plan contient $n+1$ coefficients, dont les rapports seront déterminés par les n équations linéaires que l'on obtient en substituant successivement dans l'équation les valeurs des coordonnées des n points donnés.

Un k*-plan sera déterminé par* $n-k+1$ *points.*

En effet, considérons un plan quelconque assujetti à passer par les $n-k+1$ points. Cette condition donnera entre les $n+1$ coefficients du plan $n-k+1$ équations linéaires; éliminant $n-k+1$ coefficients au moyen de ces équations de condition, il restera dans l'équation du plan k coefficients arbitraires. Donc l'équation générale des plans passant par les $n-k+1$ points donnés sera de la forme

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0, \tag{2}$$

et le k-plan $A_1 = \dots = A_k = 0$, intersection commune de ces plans, passera par les $n-k+1$ points donnés. D'ailleurs ce k-plan sera le seul à jouir de cette propriété ; car si un k-plan P_k contient les points donnés, ses plans générateurs les contiendront *a fortiori*, ils seront donc de la forme (2); et P_k se confondra avec le k-plan $A_1 = \dots = A_k = 0$, intersection commune de ces plans.

4. *Deux plans donnés par les équations*

$$A = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + \alpha = 0,$$
$$B = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + \beta = 0,$$

se couperont en général suivant un biplan. Mais on doit excepter le cas où l'on aurait

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

car les deux équations $A = 0$, $B = 0$ seront incompatibles. On dira dans ce cas que les deux plans sont *parallèles.*

Enfin, si l'on avait

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta},$$

les deux équations $A = 0$, $B = 0$ n'en formeraient plus qu'une seule, et les deux plans seraient non-seulement parallèles, mais coïncidents.

5. *Soient* P_k *et* P_l *deux multiplans quelconques. Si, parmi les plans générateurs de* P_k, *il en est qui soient parallèles à ceux de* P_l, *ils engendreront un multiplan.*

Soient en effet

$$C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$$

des plans générateurs de P_k parallèles à des plans générateurs de P_l et choisis de telle sorte : 1° qu'ils soient indépendants les uns des autres, c'est-à-dire ne soient liés par aucune équation linéaire identique

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho = 0;$$

2° qu'il n'existe aucun plan générateur de P_k indépendant de ceux-là et parallèle à un plan générateur de P_l. Par définition, P_l aura parmi ses plans générateurs des plans

$$C_1 = \delta_1, \dots, C_\rho = \delta_\rho$$

respectivement parallèles aux précédents. P_k aura parmi ses plans générateurs tous les plans

$$(3) \qquad \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho = 0,$$

qui engendrent le ρ-plan

$$C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0,$$

que nous désignerons par P_ρ. De son côté, P_l aura parmi ses plans générateurs ceux de la forme

$$(4) \qquad \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_\rho C_\rho = \lambda_1 \delta_1 + \ldots + \lambda_\rho \delta_\rho$$

respectivement parallèles aux précédents et qui engendrent le ρ-plan

$$C_1 = \delta_1, \ldots, C_\rho = \delta_\rho,$$

que nous pourrons désigner par P'_ρ.

Donc, pour qu'un plan générateur de P_k soit parallèle à un plan générateur de P_l, il sera non-seulement nécessaire, mais suffisant, qu'il soit un plan générateur de P_ρ. Et réciproquement, pour qu'un plan générateur de P_l soit parallèle à l'un de ceux de P_k, il sera nécessaire et suffisant qu'il soit l'un des plans générateurs de P'_ρ.

Nous exprimerons cette relation en disant que deux multiplans P_k et P_l ont entre eux un *parallélisme d'ordre* ρ.

Nous dirons d'une manière absolue que P_k est *parallèle* à P_l, si tous ses plans générateurs sont parallèles à ceux de P_l. Il faut évidemment pour cela que l'on ait $k < l$. Si $k = l$, il est clair que P_l sera réciproquement parallèle à P_k.

Si l'on a à la fois $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_\rho = 0$, les divers plans de P_ρ seront non-seulement parallèles à ceux de P'_ρ, mais coïncidents; et P_l et P_k seront contenus dans le même ρ-plan P_ρ.

Au contraire, si λ_1 par exemple est différent de zéro, il faudra pour que les plans (3) et (4) se confondent, que l'on ait la relation

$$\lambda_1 \delta_1 + \ldots + \lambda_\rho \delta_\rho = 0.$$

Déterminant λ_1 par cette relation et substituant dans (3), on aura

$$\lambda_2 \left(C_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_1 \right) + \ldots + \lambda_\rho \left(C_\rho - \frac{\delta_\rho}{\delta_1} C_1 \right) = 0$$

pour l'équation générale des plans générateurs communs à P_k et à P_l; et l'on voit par là que ces plans ne seront autres que les plans générateurs du $\rho - 1$-plan

$$C_2 - \frac{\delta_2}{\delta_1} C_1 = 0, \ldots, C_\rho - \frac{\delta_\rho}{\delta_1} C_1 = 0,$$

lequel contiendra P_l et P_k.

6. Cherchons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients des équations de P_k et de P_l pour que ces multiplans aient entre eux un parallélisme d'ordre ρ, en étant ou non contenus dans un même ρ-plan.

Soient

$$(5)\qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_k = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0, \end{cases}$$

les équations de P_k;

$$(6)\qquad \begin{cases} B_1 = b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n + \beta_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ B_l = b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n + \beta_l = 0, \end{cases}$$

celles de P_l. Pour qu'un plan générateur de P_k soit parallèle à un plan générateur de P_l, il faudra qu'on ait la relation identique

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = \mu_1 B_1 + \dots + \mu_l B_l + \text{constante};$$

ou, en égalant séparément à zéro les coefficients des variables,

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_k a_{k1} = \mu_1 b_{11} + \dots \mu_l b_{l1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_k a_{kn} = \mu_1 b_{1n} + \dots + \mu_l b_{ln}; \end{cases}$$

et si l'on veut que les plans générateurs considérés soient non-seulement parallèles mais coïncidents, la constante devra être nulle, et l'on aura par suite une nouvelle équation

$$(8)\qquad \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_k\alpha_k = \mu_1\beta_1 + \dots + \mu_l\beta_l.$$

7. Cela posé, soit d'abord $k + l \leqslant n$; le nombre des paramètres λ, μ sera égal ou inférieur à celui des équations (7); si donc ces équations sont distinctes, ce qui est le cas général, on ne pourra y satifaire autrement qu'en annulant tous les paramètres. Donc dans ce cas P_k et P_l n'auront en général aucun parallélisme.

Mais cette conséquence sera en défaut, si les coefficients a, b sont choisis de telle sorte que les équations (7) se réduisent à un nombre p d'équations distinctes inférieur à $k + l$.

Il est d'ailleurs aisé de voir que p ne peut être inférieur à l. En effet, les équations (6) qui définissent P_l étant supposées distinctes et compatibles entre elles, l'un au moins des déterminants obtenus en prenant l colonnes du tableau

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{l1} & \dots & b_{ln} \end{vmatrix},$$

par exemple celui-ci

$$\Lambda = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ . & . & . \\ b_{l1} & \dots & b_{ll} \end{vmatrix},$$

différera de zéro. Cela posé, les l premières équations (7) seront distinctes, et permettront de déterminer $\mu_1, \dots, \mu_l$ en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; car le déterminant des coefficients par lesquels elles multiplient $\mu_1, \dots, \mu_l$, étant égal à Λ, sera différent de zéro.

Soit donc $p = k + l - \rho$, et $\rho < k$. Les équations (7) permettront de déterminer $\mu_1, \dots, \mu_l$ et $k - \rho$ des quantités λ, telles que $\lambda_{\rho+1}, \dots \lambda_k$, en fonction des ρ paramètres indéterminés $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$.

Soit

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda_{\rho+1} = m_{\rho+1}\lambda_1 + \dots + n_{\rho+1}\lambda_\rho, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_k = m_k\lambda_1 + \dots + n_k\lambda_k. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k = 0$$

des plans générateurs de P_k, et posant pour abréger

$$(10) \quad \begin{cases} C_1 = A_1 + m_{\rho+1}A_{\rho+1} + \dots + m_k A_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_\rho = A_\rho + n_{\rho+1}A_{\rho+1} + \dots + n_k A_k, \end{cases}$$

on aura l'équation

$$(11) \quad \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_\rho C_\rho = 0$$

pour définir ceux des plans générateurs de P_k qui sont parallèles à ceux de P_l. D'ailleurs les plans $C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$ sont indépendants les uns des autres; car si l'on avait une identité de la forme

$$\nu_1 C_1 + \dots + \nu_\rho C_\rho = 0,$$

on aurait, en substituant les valeurs de $C_1, \dots, C_\rho$ données par l'équation, une nouvelle identité de la forme

$$\nu_1 A_1 + \dots + \nu_\rho A_\rho + \nu_{\rho+1}A_{\rho+1} + \dots = 0,$$

ce qui est absurde, les équations $A_1 = 0, \dots, A_k = 0$ étant supposées distinctes.

Les plans définis par l'équation (11) ne seront donc autres que les plans générateurs du ρ-plan $C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$; et P_k aura avec P_l un parallélisme d'ordre ρ.

En outre, P_k et P_l seront dans un même ρ-plan, si l'équation (8) est une conséquence des équations (7).

8. Supposons maintenant que l'on ait $k+l>n$. On aura un parallélisme d'ordre $k+l-n$ dans le cas général où les équations (7) sont toutes distinctes; un parallélisme d'ordre $k+l-p$ si elles se réduisent à p équations distinctes. Enfin P_k et P_l seront dans un même ρ-plan si l'équation (8) est une conséquence des équations (7).

9. Pour écrire les conditions d'un parallélisme d'ordre quelconque, on n'aura donc qu'à exprimer que les équations (7) se réduisent à p distinctes. Or, on sait que pour cela il faut et il suffit : 1° que l'un au moins des mineurs de degré p formés avec les coefficients de ces équations soit différent de zéro; 2° que tous les mineurs de degré $p+1$ s'annulent.

Pour que P_k et P_l soient dans un même ρ-plan, il faudra de plus que l'équation (8) étant adjointe au système des équations (7), les nouveaux mineurs de degré $p+1$ où figurent les coefficients de cette nouvelle équation s'annulent comme les précédents.

10. *Si deux multiplans P_k et P_l n'ont aucun parallélisme, ils se coupent suivant un multiplan P_{k+l}.*

En effet, par hypothèse, on ne peut satisfaire à l'équation

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = \mu_1 B_1 + \ldots + \mu_l B_l + \text{constante},$$

ou, ce qui revient au même, à celle-ci

$$\lambda_1(A_1 - \alpha_1) + \ldots + \lambda_k(A_k - \alpha_k) = \mu_1(B_1 - \beta_1) + \ldots + \mu_l(B_l - \beta_l).$$

Donc les $k+l$ fonctions $A_1 - \alpha_1, \ldots, A_k - \alpha_k, B_1 - \beta_1, \ldots, B_l - \beta_l$ seront distinctes, et les équations

$$A_1 = 0, \ldots, A_k = 0, \ B_1 = 0, \ldots, B_k = 0$$

lesquelles peuvent se mettre sous la forme

$$A_1 - \alpha_1 = -\alpha_1, \ldots, B_l - \beta_l = -\beta_l,$$

seront distinctes et compatibles entre elles, et détermineront un $k+l$-plan.

11. *Si P_k et P_l ont un parallélisme d'ordre ρ, sans être dans un même ρ-plan, ils ne se couperont pas*

En effet, P_k et P_l ont par hypothèse des plans générateurs parallèles, mais non coïncidents, $C_1 = 0$ et $C_1 = \delta_1$. Les points de l'intersection devraient satisfaire à ces deux équations, qui sont incompatibles. Si donc P_k et P_l ont un parallélisme d'ordre ρ et se coupent, ils seront dans un même ρ-plan.

12. *Si P_k et P_l sont dans un même ρ-plan, ils se couperont suivant un $k+l-\rho$-plan.*

Soit en effet

$$C_1 = \ldots = C_\rho = 0$$

le ρ-plan formé par les plans générateurs communs à P_k et à P_l. On peut remplacer les équations

$$B_1 = \dots = B_l = 0,$$

qui définissent P_l, par les équations équivalentes

$$C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0, \; B_{\rho+1} = 0, \dots, B_l = 0,$$

dont les ρ premières ne sont que des combinaisons des équations $A_1 = 0$, ..., $A_k = 0$ qui définissent P_k. Le nombre des équations distinctes auxquelles satisfait l'intersection de P_l et de P_k se réduit donc à $k+l-\rho$.

13. *Un k-plan* P_k, *glissant parallèlement à lui-même sur un l-plan* P_l, *engendrera un multiplan.*

Les deux multiplans étant encore supposés définis par les équations (5) et (6), les équations d'un k-plan parallèle à P_k et passant par le point $\xi_1, \dots, \xi_n$ seront

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n + \alpha_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_k = a_{k1}\xi_1 + \dots + a_{kn}\xi_n + \alpha_n. \end{array} \right.$$

Mais si le point $\xi_1, \dots, \xi_n$ appartient à P_l, on aura

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_{11}\xi_1 + \dots + b_{1n}\xi_n + \beta_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ b_{l1}\xi_1 + \dots + b_{ln}\xi_n + \beta_n = 0. \end{array} \right.$$

Donc, en éliminant $\xi_1, \dots, \xi_n$ entre les équations (12) et (13), on aura les équations du lieu cherché, qui seront linéaires.

Supposons, pour fixer les idées, que P_k et P_l soient dans un même ρ-plan P_ρ. On pourra admettre que, parmi les plans choisis pour définir P_k et P_l, se trouvent les plans $C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0$ qui définissent P_ρ; on peut donc admettre que l'on ait

$$A_1 = B_1 = C_1, \dots, A_\rho = B_\rho = C_\rho .$$

Mais alors les seconds membres des ρ premières équations du système (12) s'annulent en vertu des équations (13). On aura donc, parmi les équations du lieu cherché, les suivantes

$$A_1 = 0, \dots, A_\rho = 0,$$

et l'on aura les autres en éliminant les n variables ξ entre les $k-\rho$ dernières équations du système (12) et les l du système (13). Cette élimination donnera $l+k-\rho-n$ équations nouvelles qui achèveront de déterminer le lieu cherché.

II. DISTANCES. — PERPENDICULARITÉ.

14. La *distance de deux points* ayant respectivement pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ sera définie par la formule

$$\Delta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

On appellera *distance d'un point p à un multiplan* sa distance au point du multiplan qui en est le plus rapproché. Ce point q sera la *projection* du point p sur le multiplan.

La *distance de deux multiplans* qui ne se coupent pas sera la distance de leurs points les plus voisins.

La *projection d'un multiplan sur un autre* sera le lieu des projections de ses points.

15. Cherchons les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de la projection q d'un point p, dont les coordonnées sont $y_1, \ldots, y_n$ sur le multiplan P_k ayant pour équations

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha_n = 0. \end{array} \right.$$

Le point q étant dans P_k, ses coordonnées satisferont aux équations (14). D'autre part, l'expression

$$\Delta^2 = (x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$$

doit être moindre que pour tout point voisin q' situé dans P_k, et ayant pour coordonnées $x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n$.

La différentielle de Δ^2, égalée à zéro, nous donnera l'équation

$$(15) \qquad (x_1 - y_1)dx_1 + \ldots + (x_n - y_n)dx_n = 0.$$

D'ailleurs q' étant situé dans P_k, $dx_1, \ldots, dx_n$ ne seront pas arbitraires, mais satisferont aux équations

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}dx_1 + \ldots + a_{kn}dx_n = 0. \end{array} \right.$$

L'équation (15), devant être satifaite toutes les fois que les équations (16) le seront, sera une combinaison linéaire de celles-ci; on aura donc, en désignant par $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des multiplicateurs convenables,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 - y_1 = \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_k a_{k1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n - y_n = \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_k a_{kn}. \end{array} \right.$$

Si l'on élimine entre ces équations les k paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, il restera, entre $x_1, \ldots, x_n$, $n-k$ équations distinctes

$$C_1 = 0, \ldots, C_{n-k} = 0, \tag{18}$$

qui, jointes aux équations (14), détermineront complétement ces quantités.

16. Supposons maintenant que $x_1, \ldots, x_n$, au lieu d'être des inconnues à déterminer, soient les coordonnées d'un point donné de P_k.

Les équations (17) ou (18), dans lesquelles $y_1, \ldots, y_n$ seront considérées comme coordonnées courantes, représenteront le lieu des points de l'espace dont la projection sur P_k tombe sur le point $x_1, \ldots, x_n$. Ce lieu sera donc un $n-k$-plan P_{n-k}. Nous dirons que P_{n-k} est le *$n-k$-plan perpendiculaire à P_k, élevé par le point $x_1, \ldots, x_n$.*

En général, un l-plan P_l sera dit *perpendiculair à un k-plan* P_k, si deux multiplans P'_k, P'_l respectivement parallèles à ceux-là étant menés par un point quelconque p de l'espace, chacun des points de P'_l se projette sur P'_k en un des points d'intersection de P'_k avec P'_l.

17. Cherchons à établir les conditions de perpendicularité.

Soient comme précédemment

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0 \end{array}\right. \tag{19}$$

les équations de P'_k;

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 = b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_l = b_{l1}x_1 + \ldots + b_{ln}x_n + \beta_l = 0 \end{array}\right. \tag{20}$$

celles de P'_l.

Un point quelconque de P'_l, tel que $y_1, \ldots, y_n$, sera lié à sa projection $x_1, \ldots, x_n$ par les relations (17); et, pour que P'_l soit perpendiculaire à P'_k, il faudra, par définition, que $x_1, \ldots, x_n$ satisfassent aux relations (20), ainsi que $y_1, \ldots, y_n$. On aura par suite les équations

$$\left\{\begin{array}{l} b_{11}(x_1 - y_1) + \ldots + b_{1n}(x_n - y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{l1}(x_1 - y_1) + \ldots + b_{ln}(x_n - y_n) = 0, \end{array}\right. \tag{21}$$

lesquelles devront être une conséquence identique des équations (17), toutes les fois que $x_1, \ldots, x_n$ satisferont aux équations (19), et $y_1, \ldots, y_n$ aux équations (20).

18. Supposons d'abord que P_k et P_l n'aient aucun parallélisme; P'_k et

P'_l n'auront aucun plan générateur commun. Les équations (19) auxquelles satisfont $x_1, \ldots, x_n$ et les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} B'_1 = b_{11}y_1 + \ldots + b_{1n}y_n + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B'_l = b_{l1}y_1 + \ldots + b_{ln}y_n + \beta_n = 0, \end{cases}$$

ne donneront aucune relation entre les quantités $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$.

Supposons en effet qu'on pût en déduire une relation de la forme

$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k + \nu_1 B'_1 + \ldots + \nu_l B'_l = c_1(x_1 - y_1) + \ldots + c_n(x_n - y_n) = 0.$$

Cette relation donnerait, en y changeant $y_1, \ldots, y_n$ en $x_1, \ldots, x_n$, l'identité

$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k + \nu_1 B_1 + \ldots + \nu_l B_l = 0;$$

donc P'_l et P'_k auraient contre l'hypothèse un plan générateur commun

$$\mu_1 A_1 + \ldots + \mu_k A_k = -(\nu_1 B_1 + \ldots + \nu_l B_l) = 0.$$

Donc les équations (21) devront se déduire des seules équations (17); ce qui donnera, en substituant les valeurs de $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$ tirées des équations (17), et égalant ensuite à zéro les coefficients des indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, le système d'équations suivant

$$(23)\qquad \begin{cases} b_{11}a_{11} + \ldots + b_{1n}a_{1n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{r1}a_{s1} + \ldots + b_{rn}a_{sn} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Chacune de ces kl équations, considérée séparément, exprime que l'un des plans $B_1, \ldots, B_l$ *est perpendiculaire à l'un des plans* $A_1, \ldots, A_k$. D'ailleurs leur forme symétrique montre que *si* P_l *est perpendiculaire à* P_k, *réciproquement* P_k *le sera à* P_l.

19. Supposons plus généralement que P_l et P_k aient un parallélisme d'ordre ρ; P'_k et P'_l seront contenus dans un même ρ-plan.

Soient

$$\begin{gathered} C_1 = \mu_{11}A_1 + \ldots + \mu_{1k}A_k = \nu_{11}B_1 + \ldots + \nu_{1l}B_l = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n + \gamma_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_\rho = \mu_{\rho 1}A_1 + \ldots + \mu_{\rho k}A_k = \nu_{\rho 1}B_1 + \ldots + \nu_{\rho l}B_l = c_{\rho 1}x_1 + \ldots + c_{\rho n}x_n + \gamma_\rho = 0 \end{gathered}$$

les équations de ce ρ-plan P'_ρ;

$$\begin{gathered} \nu_{11}B_1 + \ldots + \nu_{l1}B_l = C_1 - \delta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \nu_{\rho 1}B_1 + \ldots + \nu_{l\rho}B_\rho = C_\rho - \delta_\rho = 0 \end{gathered}$$

les plans générateurs correspondants de P_l. Les équations (19) et (22) donneront les suivantes

$$\begin{array}{l} \mu_{11}A_1 + \ldots + \mu_{k1}A_k - \nu_{11}B'_1 - \ldots - \nu_{l1}B'_l = c_{11}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{1n}(x_n - y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_{\rho 1}A_1 + \ldots + \mu_{\rho k}A_k - \nu_{\rho 1}B'_1 - \ldots - \nu_{\rho l}B'_l = c_{\rho 1}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{\rho n}(x_n - y_n) = 0. \end{array}$$

Substituant dans ces équations les valeurs de $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$ tirées des équations (17), on aura ρ équations de condition

$$D_1 = 0, \ldots, D_\rho = 0 \tag{24}$$

entre les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Et pour avoir les conditions de perpendicularité, il faudra, après avoir substitué les valeurs de $x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n$ tirées des équations (17) dans les équations (21), éliminer ρ des paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ à l'aide des équations (24), et alors seulement égaler à zéro les coefficients des paramètres restants ; les équations (21) se décomposeront chacune en $k - \rho$ équations distinctes. Et ces l systèmes de $k - \rho$ équations exprimeront respectivement que le point $x_1, \ldots, x_n$ se trouve sur les plans $B_1 = 0, \ldots, B_l = 0$.

Mais ces systèmes de conditions ne sont pas distincts. En effet, le point $x_1, \ldots, x_n$ se trouvant d'après les données de la question sur les plans $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$, il suffira qu'il se trouve en outre sur $l - \rho$ plans convenablement choisis dans la suite $B_1, \ldots, B_l$ pour qu'il se trouve sur les autres ; ce qui réduira à $(l - \rho)(k - \rho)$ le nombre des conditions distinctes nécessaires à la perpendicularité.

20. D'ailleurs, ici encore, *si* P_l *est perpendiculaire à* P_k, P_k *sera réciproquement perpendiculaire à* P_l. Pour constater avec évidence cette réciprocité, nous pourrons admettre que les plans $C_1, \ldots, C_\rho$ aient été choisis parmi ceux qui servent à définir P'_k et P'_l.

Les autres plans qui définissent ces deux multiplans pourront, en outre, être choisis de telle sorte qu'ils soient perpendiculaires aux précédents. En effet, soit

$$\pi_1 A_1 + \ldots + \pi_k A_k = 0$$

l'un des plans générateurs de P'_k. Il sera perpendiculaire aux plans $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$, si l'on a les équations

$$(\pi_1 a_{11} + \ldots + \pi_k a_{1k}) c_{r1} + \ldots + (\pi_1 a_{1n} + \ldots + \pi_k a_{kn}) c_{rn} = 0,$$

pour $r = 1, 2, \ldots, \rho$. Ces ρ équations détermineront ρ des constantes π, par exemple $\pi_{k-\rho+1}, \ldots, \pi_k$, en fonction des autres.

Soit, par exemple,

$$\begin{array}{l} \pi_{k-\rho+1} = m_1 \pi_1 + \ldots + n_1 \pi_{k-\rho}, \ldots, \\ \pi_k = m_\rho \pi_1 + \ldots + n_\rho \pi_{k-\rho}. \end{array}$$

Les plans cherchés seront donnés par la formule

$$\pi_1(A_1 + m_1 A_{k-\rho+1} + \dots + m_\rho A_n) + \dots + \pi_\rho(A_\rho + n_1 A_{k-\rho+1} + \dots + n_\rho A_n) = 0,$$

laquelle représente un $k-\rho$-plan, dans lequel on pourra choisir à volonté $k-\rho$ plans pour achever de définir P'_k.

Soient donc

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = C_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n + \gamma_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_\rho = C_\rho = c_{\rho 1}x_1 + \dots + c_{\rho n}x_n + \gamma_\rho = 0, \\ A_{\rho+1} = a_{\rho+1,1}x_1 + \dots + a_{\rho+1,n}x_n + \alpha_{\rho+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_k = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + \alpha_k = 0 \end{array}\right.$$

les plans qui définissent P'_k, choisis comme nous l'avons indiqué; on aura une série d'équations de condition contenues dans ce type général

$$(26)\qquad c_{r1}a_{s1} + \dots + c_{rn}a_{sn} = 0$$

On pourra de même définir P'_l à l'aide des plans

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0, \dots, C_\rho = 0, \\ B_{\rho+1} = b_{\rho+1,1}x_1 + \dots + b_{\rho+1,n}x_n + \beta_{\rho+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ B_l = b_{l1}x_1 + \dots + b_{ln}x_n + \beta_n = 0, \end{array}\right.$$

choisis de telle sorte que l'on ait

$$(28)\qquad c_{r1}b_{s1} + \dots + c_{rn}b_{sn} = 0.$$

En comparant les équations (25) et (27) aux équations (19) et (20), il viendra

$$(29)\qquad a_{11} = b_{11} = c_{11}, \dots, a_{\rho n} = b_{\rho n} = c_{\rho n}.$$

Substituons maintenant les valeurs (17) dans les équations (21). En tenant compte des équations (29), (26) et (28), et posant pour abréger

$$\begin{array}{r} c_{r1}c_{s1} + \dots + c_{rn}c_{sn} = K_{rs}, \\ a_{r1}b_{s1} + \dots + a_{rn}b_{sn} = L_{rs}, \end{array}$$

il viendra

$$\begin{array}{r} \lambda_1 K_{11} + \dots + \lambda_\rho K_{1\rho} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1 K_{\rho 1} + \dots + \lambda_\rho K_{\rho\rho} = 0, \\ \lambda_{\rho+1} L_{\rho+1,1} + \dots + \lambda_k L_{\rho+1,k} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{\rho+1} L_{l1} + \dots + \lambda_k L_{lk} = 0. \end{array}$$

Les ρ premières équations de ce système sont le résultat de la substitution des valeurs (17) dans les équations $C_1 = 0, \ldots, C_\rho = 0$; et toutes les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ qui satisfont à ces ρ équations doivent satisfaire identiquement aux autres équations du système; ce qui donne les relations

$$L_{\rho+1,1} = 0, \ldots, L_{lk} = 0,$$

lesquelles sont évidemment symétriques par rapport aux a et aux b, et et expriment que *chacun des plans* $A_{\rho+1}, \ldots, A_k$ *est perpendiculaire à chacun des plans* $B_{\rho+1}, \ldots, B_l$.

21. *Tout k-plan* P_k *peut être déterminé d'une infinité de manières par l'intersection de k-plans rectangulaires.*

Soit en effet $A_1 = 0$ un quelconque des plans générateurs de P_k. Nous avons vu que P_k contient un $k-1$-plan P_{k-1} perpendiculaire à P_k. Soit A_2 l'un quelconque des plans générateurs de P_{k-1}; il sera perpendiculaire à A_1. D'ailleurs P_k contiendra un $k-2$-plan P_{k-2} perpendiculaire au biplan (A_1, A_2). Soit A_3 un de ses plans générateurs ; il sera perpendiculaire à A_1 et à A_2. On pourra de même déterminer dans P_k un nouveau plan A_4 perpendiculaire aux trois précédents ; etc.

En posant $k = n$ dans la proposition qui précède, on voit que *par un point quelconque de l'espace on peut faire passer une infinité de systèmes de plans rectangulaires.*

22. *Soient p un point quelconque; q sa projection sur un multiplan* P_k; *r un point quelconque de* P_k; *on aura entre les distances des trois points p,q,r la relation*

$$\overline{pr}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2.$$

En effet, soient $y_1, \ldots, y_n$, $x_1, \ldots, x_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées des trois points p,q,r; et supposons P_k défini par les équations (14); on aura

$$\begin{aligned}\overline{pr}^2 &= (y_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (y_n - \xi_n)^2 \\ &= (y_1 - x_1 + x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n + x_n - \xi_n)^2 \\ &= \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2 + 2\{(y_1 - x_1)(x_1 - \xi_1) + \ldots + (y_n - x_n)(x_n - \xi_n)\}.\end{aligned}$$

Mais, si l'on remplace $y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (17), le terme entre parenthèses deviendra

$$\lambda_1\{a_{11}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{1n}(x_n - \xi_n)\} + \ldots + \lambda_k\{a_{k1}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{kn}(x_n - \xi_n)\},$$

expression dans laquelle les multiplicateurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ s'annulent évidemment; $x_1, \ldots, x_n$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ satisfaisant aux équations (14).

23. *Soit* P_{k+l} *un multiplan contenu dans* P_k; *la projection de p sur* P_{k+l} *tombera au même point s que la projection de q.*

En effet, r étant un point quelconque de P_{k+l}, on aura, d'après ce qui précède,

$$\overline{pr}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qr}^2.$$

En outre, s étant la projection de q sur P_{k+l}, on aura

$$\overline{qr}^2 = \overline{qs}^2 + \overline{rs}^2.$$

On a enfin

$$\overline{ps}^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qs}^2.$$

On déduit de tout cela

$$\overline{pr}^2 = \overline{ps}^2 + \overline{sr}^2,$$

équation qui montre que le point s est la projection de p sur P_{k+l}.

III. CHANGEMENTS DE COORDONNÉES.

24. *Des droites parallèles* D,D′, *limitées à des plans parallèles* P,P′, *ont la même longueur.*

Soient en effet

$$(30) \qquad \begin{cases} A_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_{n-1} = a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n}x_n + \alpha_{n-1} = 0 \end{cases}$$

les équations de la droite D;

$$(31) \qquad B = b_1x_1 + \dots + b_nx_n + \beta = 0$$

celle du plan P;

$$(32) \qquad A_1 = \alpha', \dots, A_{n-1} = \alpha'_{n-1}$$

celles de D′;

$$(33) \qquad B = \beta'$$

celle de P′.

Les coordonnées $\xi_1, \dots, \xi_n$ de l'intersection de D avec P satisferont aux équations (30) et (31); celles $\eta_1, \dots, \eta_n$ du point d'intersection de D avec P′ satisferont aux équations (30) et (32); on en déduira

$$(34) \qquad \begin{cases} a_{11}(\eta_1 - \xi_1) + \dots + a_{1n}(\eta_n - \xi_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n-1,1}(\eta_1 - \xi_1) + \dots + a_{n-1,n}(\eta_n - \xi_n) = 0, \\ b_1(\eta_1 - \xi_1) + \dots + b_n(\eta_n - \xi_n) + \beta' = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées $\xi'_1, \ldots, \xi'_n, \eta'_1, \ldots, \eta'_n$ des points d'intersection de D' avec P et avec P' satisferont à ces mêmes équations ; on en déduira

$$\eta'_1 - \xi'_1 = \eta_1 - \xi_1, \ldots, \eta'_n - \xi'_n = \eta_n - \xi_n,$$

d'où

$$(\eta'_1 - \xi'_1)^2 + \ldots + (\eta'_n - \xi'_n)^2 = (\eta_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (\eta_n - \xi_n)^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons d'ailleurs que les valeurs de $\eta_1 - \xi_1, \ldots, \eta_n - \xi_n$ déduites des équations (34) varient proportionnellement à la constante β' ; d'où cette conclusion :

Trois plans parallèles coupent proportionnellement deux droites quelconques.

25. *Le lieu des points dont la distance à un plan fixe* P, *comptée suivant une direction donnée, est constante sera donc un plan parallèle à* P.

Un système de n plans indépendants P, Q, ... étant donné, la position d'un point dans l'espace sera complétement déterminée lorsqu'on connaîtra sa distance à chacun d'eux, cette distance étant comptée, par exemple, dans la direction de l'intersection des $n - 1$ autres plans. En effet, ces distances détermineront n plans, respectivement parallèles à P, Q, ..., et dont l'intersection donnera le point cherché.

Les distances ci-dessus $X_1, \ldots, X_n$ formeront donc un nouveau système de coordonnées qui pourront servir, au lieu de $x_1, \ldots, x_n$, pour définir les points de l'espace.

26. Les nouvelles coordonnées sont liées aux anciennes par des équations linéaires.

Soient en effet

$$(35) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + \alpha_n = 0 \end{cases}$$

es équations des plans P, Q, ... Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées d'un point quelconque. La parallèle à l'intersection des plans Q, ..., menée par ce point, aura pour équations

$$(36) \qquad a_{r1}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{rn}(x_n - \xi_n) = 0 \quad (r = 2, \ldots, n),$$

et les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de son intersection avec P satisferont en outre à l'équation de P, ou ce qui revient au même à celle-ci

$$(37) \quad a_{11}(x_1 - \xi_1) + \ldots + a_{1n}(x_n - \xi_n) = a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n - \alpha_1.$$

Posons, pour abréger,

$$a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{1n}\xi_n - \alpha_1 = \mathrm{L},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\frac{d\Delta}{da_{rs}} = b_{rs},$$

$$\sqrt{b_{r1}^2 + \dots + b_{rn}^2} = \mathrm{M}_r;$$

on déduira des équations (36) et (37) les suivantes

$$x_1 - \xi_1 = \frac{b_{11}\mathrm{L}}{\Delta}, \dots, x_n - \xi_n = \frac{b_{1n}\mathrm{L}}{\Delta},$$

$$\mathrm{X}_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2} = \frac{\mathrm{M}_1}{\Delta}\mathrm{L} = \frac{\mathrm{M}_1}{\Delta}(a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n - \alpha_1).$$

On trouvera de même, pour toute valeur de r,

$$\mathrm{X}_r = \frac{\mathrm{M}_r}{\Delta}(a_{r1}\xi_1 + \dots + a_{rn}\xi_n - \alpha_r), \tag{38}$$

Renversant ces égalités, il viendra

$$\xi_r = \frac{b_{1r}}{\mathrm{M}_1}\mathrm{X}_1 + \dots + \frac{b_{nr}}{\mathrm{M}_n}\mathrm{X}_n + \frac{b_{1r}\alpha_1 + \dots + b_{nr}\alpha_n}{\Delta}. \tag{39}$$

27. Il est aisé d'exprimer la distance de deux points en fonction des nouvelles coordonnées.

Soient, en effet, $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ et $\mathrm{X}'_1, \dots, \mathrm{X}'_n$ les coordonnées d'un second point. Elles satisferont aux équation (36) et (39); on aura, par suite,

$$\xi_r - \xi'_r = \frac{b_{1r}}{\mathrm{M}_1}(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}'_1) + \dots + \frac{b_{nr}}{\mathrm{M}_n}(\mathrm{X}_n - \mathrm{X}'_n).$$

La distance D des deux points sera donnée par la formule

$$\mathrm{D}^2 = \sum_r (\xi_r - \xi'_r)^2 = \sum_r (\mathrm{X}_r - \mathrm{X}'_r)^2$$
$$+ 2\sum_{rs} \frac{b_{r1}b_{s1} + \dots + b_{rn}b_{sn}}{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_s}(\mathrm{X}_r - \mathrm{X}'_r)(\mathrm{X}_s - \mathrm{X}'_s).$$

Cette formule se simplifie lorsque les nouveaux plans coordonnés sont orthogonaux.

On a, en effet, par définition,

$$a_{r1}a_1 + \dots + a_{rn}a_{sn} = 0, \quad \text{si } r = s. \tag{40}$$

On peut d'ailleurs, sans rien changer au système des nouveaux plans, multiplier l'équation de chacun d'eux par une constante, telle que l'on ait

$$a_{r1}^2 + \dots + a_{rn}^2 = 1.$$

Mais alors $a_{11}, \dots, a_{nn}$ seront les coefficients d'une substitution orthogonale; et, d'après les propriétés connues de ces substitutions, on aura

$$a_{1r}^2 + \dots + a_{nr}^2 = 1, \quad a_{1r}a_{1s} + \dots + a_{nr}a_{ns} = 0,$$

$$\Delta = \pm 1, \quad \frac{b_{rs}}{\Delta} = a_{sr}, \quad M_r = \sqrt{\Delta^2(a_{1r}^2 + \dots + a_{nr}^2)} = 1,$$

$$(41) \qquad \frac{b_{r1}b_{s1} + \dots + b_{rn}b_{sn}}{M_r M_s} = \Delta^2(a_{1r}a_{1s} + \dots + a_{nr}a_{ns}) = 0;$$

de sorte que D^2 se réduit à une somme de carrés.

Réciproquement, si les équations (41) sont satisfaites, les équations (39) représenteront une substitution orthogonale. La substitution réciproque définie par les équations (38) sera aussi orthogonale. Les équations (40) seront donc satisfaites; les nouveaux plans coordonnés seront donc perpendiculaires entre eux.

IV. INVARIANTS ANGULAIRES.

28. La transformation des coordonnées dans l'espace à n dimensions présente les mêmes avantages que dans la géométrie ordinaire. Elle permet de changer les équations qui représentent une même figure, et de les simplifier par un choix convenable des indéterminées qui figurent dans les transformations.

Deux figures quelconques tracées dans l'espace sont considérées comme *pareilles*, lorsqu'en les rapportant à des systèmes de coordonnées orthogonales, convenablement choisis pour chacune d'elles, on peut les représenter par les mêmes équations.

Si les systèmes orthogonaux auxquels ces deux figures sont respectivement rapportées sont tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une substitution orthogonale de coefficient 1, ces deux figures seront considérées comme *égales* et ne différant que par leur situation dans l'espace; elles seront *symétriques*, si le déterminant de la substitutiin est égal à — 1.

29. *Tous les k-plans sont à la fois égaux et symétriques.* Nous avons vu en effet qu'un k-plan quelconque P_k peut être considéré comme résultant de l'intersection de k plans rectangulaires. En un point quelconque de P_k, élevons le P_{n-k} plan qui lui est perpendiculaire. Il sera lui-même l'intersection de $n-k$ plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires aux précédents. Prenant les n plans ainsi définis pour plans coordonnés, les équations de P_k prendront la forme

$$x_1 = 0, \dots, x_k = 0.$$

Les équations d'un k-plan quelconque étant réductibles à cette même forme, ce k-plan sera identique ou symétrique à P_k. Mais il sera à la fois identique et symétrique; car P_k est symétrique à lui-même, ses équations n'étant pas altérées lorsqu'on y change x en $-x$ (opération qui est une substitution orthogonale de déterminant -1).

30. Considérons maintenant un système de deux plans P,Q qui se coupent. Prenons pour origine l'un des points de l'intersection, pour plan des x_1 le plan P, pour plan des x_2 un plan rectangulaire à celui-là passant par le biplan (P,Q), et pour les autres plans coordonnés, $n-2$ plans rectangulaires, situés dans le $n-2$-plan perpendiculaire à (P,Q). Les équations des deux plans prendront la forme

$$x_1 = 0,$$
$$ax_1 + bx_2 = 0,$$

ou, en divisant la seconde équation par $\sqrt{a^2+b^2}$, ce qui est permis, et posant $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$,

$$(42) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha &= 0. \end{aligned}\right.$$

La forme canonique à laquelle nous pouvons réduire les équations d'un système de deux plans contient donc comme paramètre un angle α. Donc tous les systèmes de deux plans ne sont pas pareils, mais diffèrent entre eux par un élément caractéristique.

31. On pouvait voir *a priori* qu'il en devait être ainsi. Considérons en effet les équations de deux plans sous leur forme générale

$$P = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \alpha = 0,$$
$$Q = b_1x_1 + \dots + b_nx_n + \beta = 0,$$

Soient $y_1, \dots, y_n$ les coordonnées de l'un quelconque q des points de Q. Sa projection $x_1, \dots, x_n$ sur P sera donnée par les relations

$$x_1 - y_1 = \lambda a_1, \dots, x_n - y_n = \lambda a_n,$$

λ étant une constante à déterminer par la condition que $x_1, \dots, x_n$ satisfassent à l'équation $P=0$, ou ce qui revient au même, à la suivante

$$a_1(x_1 - y_1) + \dots + a_n(x_n - y_n) = L.$$

en posant, pour abréger, $L = a_1y_1 + \dots + a_ny_n - \alpha$.

On déduira de là

$$\lambda = \frac{L}{a_1^2 + \dots + a_n^2},$$

et la distance D des deux points $y_1, \ldots, y_n$ et $x_1, \ldots, x_n$ sera donnée par la formule

$$D^2 = \lambda^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = \frac{L^2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}. \tag{43}$$

Cherchons maintenant la distance Δ de q à l'intersection des plans P,Q. La projection $z_1, \ldots, z_p$ du point p sur son intersection sera donnée par les relations

$$z_1 - y_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \ldots, z_n - y_n = \lambda a_n + \mu b_n,$$

les paramètres λ, μ devant être déterminés par la condition que $z_1, \ldots, z_n$ satisfassent aux relations $P = 0$, $Q = 0$, ou, ce qui revient au même, à celles-ci

$$a_1(z_1 - y_1) + \ldots + a_n(z_n - y_n) = L,$$
$$b_1(z_1 - y_1) + \ldots + b_n(z_n - y_n) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda\Sigma_r a_r^2 + \mu\Sigma_r a_r b_r = L, \quad \lambda\Sigma_r a_r b_r + \mu\Sigma_r b_r^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\Sigma b_r^2 . L}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}, \quad \mu = -\frac{\Sigma a_r b_r . L}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\Delta^2 = (\lambda a_1 + \mu b_1)^2 + \ldots + (\lambda a_n + \mu b_n)^2,$$

il vient, en supprimant le facteur commun $\Sigma a_r^2 \, \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2$,

$$\Delta^2 = \frac{\Sigma b_r^2 . L^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}. \tag{44}$$

Cette équation, comparée à l'équation (43), donnera

$$\frac{D^2}{\Delta^2} = \frac{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2 - (\Sigma a_r b_r)^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2}. \tag{45}$$

Le rapport $\frac{D^2}{\Delta^2}$ est donc indépendant de la situation du point q dans le plan Q, et égal à une constante K.

Remplaçons maintenant le système actuel de coordonnées par un autre système quelconque, également rectangulaire. On aura $\frac{D^2}{\Delta^2} = K'$, K' étant la fonction analogue à K formée avec les nouveaux coefficients. Mais les distances D et Δ ne sont pas altérées par les substitutions orthogonales; on aura donc $K = K'$. Donc la fonction K est un *invariant* pour toute substitution orthogonale; et deux systèmes de deux plans ne pourront être pareils, s'ils donnent des valeurs différentes de cet invariant.

Les deux plans étant mis sous la forme canonique (42), il viendra

$$K = \sin^2\alpha.$$

La quantité

$$1 - K^2 = \frac{(\Sigma a_r b_r)^2}{\Sigma a_r^2 \Sigma b_r^2} = \cos^2\alpha$$

sera un autre invariant, symétrique comme le premier par rapport aux coefficients des deux plans.

L'angle α peut être appelé l'*angle des deux plans.*

32. Il est à remarquer que si $\sin^2\alpha$ et $\cos^2\alpha$ sont des invariants, il n'en est pas de même de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, coefficients de l'équation canonique du plan Q. En effet, en changeant le signe d'une des coordonnées x_1, x_2, ou de toutes deux, on pourra changer le signe de ces coefficients.

*33. Passons à la considération d'un système de deux multiplans P_k, P_l, ayant un point commun π. Pour traiter la question dans toute sa généralité, nous supposerons :

1° Que P_k et P_l sont dans un même ρ-plan P_ρ (sans être dans un même $\rho+1$-plan);

2° Que les multiplans P_{n-k}, P_{n-l} élevés par le point π perpendiculairement à P_k et à P_l sont dans un même σ-plan P_σ (sans être dans un même $\sigma+1$ plan);

3° Que P_{n-k} et P_l sont dans un même τ-plan P_τ (sans être dans un même $\tau+1$-plan);

4° Que P_{n-l} et P_k sont dans un même υ-plan P_υ (sans être dans un même $\upsilon+1$-plan).

Nous prendrons pour plans coordonnés :

1° ρ plans rectangulaires

$$x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_ρ ;

2° σ plans rectangulaires

$$y_1 = 0, \ldots, y_\rho = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_σ ;

3° τ plans rectangulaires

$$z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_τ ;

4° υ plans rectangulaires

$$u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0$$

pris parmi les plans générateurs de P_υ ;

5° $k - \rho - \upsilon = \alpha$ plans rectangulaires

$$v_1 = 0, \ldots, v_\alpha = 0$$

choisis abitrairement parmi les plans générateurs du multiplan P_α mené par P_k perpendiculairement à P_ρ et à P_υ;

6° $n - k - \sigma - \tau = \beta$ plans rectangulaires

$$w_1 = 0, \ldots, w_\beta = 0$$

choisis abitrairement parmi les plans générateurs du multiplan P_β mené par P_{n-k} perpendiculairement à P_σ et à P_τ.

Il est clair que les plans coordonnés ainsi choisis seront tous rectangulaires entre eux, et que les équations de P_k prendront la forme

$$\begin{gathered} x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0, \\ u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0, \\ v_1 = 0, \ldots, v_\alpha = 0. \end{gathered}$$

Quant à P_l, il résultera de l'intersection des plans

$$\begin{gathered} x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0, \\ z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0 \end{gathered}$$

avec un $l - \rho - \tau = \gamma$-plan P_γ perpendiculaire à ceux-ci. P_γ étant d'ailleurs perpendiculaire à P_{n-l}, le sera aux plans

$$y_1 = 0, \ldots, y_\sigma = 0, \quad u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0$$

contenus dans P_{n-l}. Donc les équations de ses plans générateurs se réduiront à la forme

$$(46) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = a_{11} v_1 + \ldots + a_{1\alpha} v_\alpha + b_{11} w_1 + \ldots + b_{1\beta} w_\beta = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_\gamma = a_{\gamma 1} v_1 + \ldots + a_{\gamma\alpha} v_\alpha + b_{\gamma 1} w_1 + \ldots + b_{\gamma\beta} w_\beta = 0. \end{array} \right.$$

La comparaison des deux multiplans P_k et P_l se trouve ainsi ramenée à celle du γ-plan P_γ avec le α-plan P_α intersection des plans

$$v_1 = 0, \ldots, v_\alpha = 0.$$

Cherchons à effectuer cette dernière comparaison.

34. Il est aisé de voir en premier lieu que *les trois entiers α, β, γ sont égaux.*

En effet, si γ était $> \alpha$, on pourrait en combinant les γ équations (46) éliminer $v_1, \ldots, v_\alpha$ et obtenir l'équation d'un plan générateur de P_γ et dont l'équation se réduirait à la forme

$$(47) \qquad c_1 w_1 + \ldots + c_\beta w_\beta = 0.$$

Ce plan serait perpendiculaire à P_α et par suite à P_k; et en joignant son équation à celles qui déterminent P_τ, on aurait un $\tau+1$ plan contenant à la fois P_{n-k} et P_l, contrairement à ce qui a été supposé.

Si γ était $<\alpha$, on pourrait déterminer dans P_α un $\alpha-\gamma$-plan perpendiculaire à P_γ. Car l'équation générale des plans générateurs de P_α

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_\alpha v_\alpha = 0$$

contient α paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ et les conditions de perpendicularité sont au nombre de γ seulement; donc $\alpha-\gamma$ paramètres resteraient indéterminés. En joignant les équations de ce $\alpha-\gamma$-plan à celles de P_υ, on obtiendrait, contre l'hypothèse, un $\upsilon+\alpha-\gamma$-plan contenant à la fois P_k et P_{n-l}.

Donc $\gamma=\alpha$.

Si γ était $>\beta$, on pourrait éliminer $w_1, \ldots, w_\beta$ entre les équations (46) de manière à obtenir un plan générateur de P_γ, dont l'équation serait de la forme

$$c_1 v_1 + \ldots + c_\alpha v_\alpha = 0.$$

Ce plan serait donc l'un des plans générateurs de P_k, et en joignant son équation à celle de P_ρ on obtiendrait, contre l'hypothèse, un $\rho+1$-plan contenant à la fois P_k et P_l.

Si γ était $<\beta$, on pourrait déterminer dans P_β un $\beta-\gamma$-plan perpendiculaire à P_γ. En joignant les équations de ce $\beta-\gamma$-plan à celles de P_σ, on aurait, contre l'hypothèse, un $\sigma+\beta-\gamma$-plan contenant à la fois P_{n-k} et P_{n-l}.

Donc $\gamma=\beta=\alpha$.

Les équations (46) pourront donc s'écrire sous la forme

$$(48)\quad A_r = a_{r1}v_1 + \ldots + a_{r\alpha}v_\alpha + b_{r1}w_1 + \ldots + b_{r\alpha}w_\alpha = 0 \quad (r=1,2,\ldots,\alpha).$$

35. En second lieu, *les α fonctions de la forme*

$$(49)\qquad B_r = a_{r1}v_1 + \ldots + a_{r\alpha}v_\alpha$$

sont toutes distinctes; car, si elles étaient liées par une équation linéaire

$$k_1 B_1 + \ldots + k_\alpha B_\alpha = 0,$$

P_γ aurait un plan générateur

$$k_1 A_1 + \ldots + k_\alpha A_\alpha = 0$$

dont l'équation se réduirait à la forme (47), résultat dont nous avons démontré l'impossibilité (n° 34).

Les fonctions B_r étant distinctes, on pourra résoudre les équations (49) par rapport à $v_1, \ldots, v_\alpha$ et en tirer des relations inverses, de la forme

$$v_r = e_{r1}B_1 + \ldots + e_{r\alpha}B_\alpha \quad (r=1,2,\ldots,\alpha).$$

Cela posé, il est clair que les équations des plans

$$\text{(50)} \qquad C_r = e_{r1}A_1 + \ldots + e_{r\alpha}A_\alpha = 0$$

se réduiront à la forme

$$\text{(51)} \qquad C_r = v_r + b'_{r1}w_1 + \ldots + b'_{r\alpha}w_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

et l'on pourra considérer P_γ comme déterminé, non plus par l'intersection des plans

$$A_1 = 0, \ldots, A_\alpha = 0,$$

mais par l'intersection des plans

$$C_1 = 0, \ldots, C_\alpha = 0$$

dont les équations ont déjà une forme plus simple.

36. Pour obtenir une simplification ultérieure, considérons la fonction

$$\Sigma_\rho (b'_{1\rho}w_1 + \ldots + b'_{\alpha\rho}w_\alpha)^2 = \Phi(w_1, \ldots, \Phi w_\alpha).$$

On peut déterminer une substitution orthogonale, à coefficients réels,

$$\text{(52)} \qquad \left| \begin{array}{ll} w_1 & f_{11}w_1 + \ldots + f_{\alpha 1}w_\alpha \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_\alpha & f_{\alpha 1}w_1 + \ldots + f_{\alpha\alpha}w_\alpha \end{array} \right|,$$

qui, étant opérée sur cette fonction, en fasse disparaître les rectangles (Cauchy, *Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires, etc.*; *Exercices de mathématiques*, t. IV). Ces coefficients étant ainsi déterminés, remplaçons les plans coordonnés

$$v_1 = 0, \ldots, v_\alpha = 0,$$

dont l'intersection détermine P_α, par de nouveaux plans rectangulaires

$$\text{(53)} \qquad v'_1 = 0, \ldots, v'_\alpha = 0$$

déterminés par les relations

$$\text{(54)} \qquad v'_r = f_{r1}v_1 + \ldots + f_{r\alpha}v_\alpha = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

D'autre part, employons pour définir P_γ, au lieu des équations

$$C_r = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

le système équivalent formé des équations suivantes

$$\text{(55)} \qquad A'_r = f_{r1}C_1 + \ldots + f_{r\alpha}C_{r\alpha} = v'_r + b''_{r1}w_1 + \ldots + b''_{r\alpha}w_\alpha = 0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$b''_{r\rho} = f_{r1} b'_{1\rho} + \dots + f_{r\alpha} b'_{\alpha\rho} \quad \begin{pmatrix} r = 1,2,\dots,\alpha \\ \rho = 1,2,\dots,\alpha \end{pmatrix}.$$

On aura

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho (b''_{1\rho} w_1 + \dots + b''_{\alpha\rho} w_\alpha)^2 &= \Sigma_\rho [\Sigma_r b'_{r\rho} (f_{r1} w_1 + \dots + f_{r\alpha} w_\alpha)]^2 \\ &= \Phi (f_{11} w_1 + \dots + f_{\alpha 1} w_\alpha, \dots, f_{1\alpha} w_1 + \dots + f_{\alpha\alpha} w_\alpha). \end{aligned}$$

Donc cette expression ne contiendra pas les rectangles des variables, ce qui donnera les équations de condition

$$(56) \qquad \Sigma_\rho b''_{r\rho} b''_{s\rho} = 0 \quad (r \gtrless s),$$

lesquelles expriment que les plans $A'_1, \dots, A'_\alpha$ sont rectangulaires entre eux.

37. Soit d'ailleurs

$$(57) \qquad \Sigma_\rho b''^2_{r\rho} = g_r^2 \quad (r = 1,2,\dots,\alpha).$$

Les relations (56) et (57), étant respectivement divisées par $g_r g_s$ et par g_r^2, montrent que les quantités

$$\frac{b''_{11}}{g_1}, \dots, \frac{b''_{r\rho}}{g_r}, \dots, \frac{b''_{\alpha\alpha}}{g_\alpha}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Prenant pour coordonnées, au lieu de $w_1, \dots, w_\alpha$, les suivantes

$$(58) \qquad w'_r = \frac{b''_{r1}}{g_r} w_1 + \dots + \frac{b''_{r\alpha}}{g_r} w_\alpha \quad (\alpha = 1,2,\dots,r),$$

P_α sera toujours déterminé par les équations (53); mais les équations de P_γ se réduiront à la forme simple

$$(59) \qquad A'_r = v'_r + g_r w'_r = 0 \quad (r = 1,2,\dots,\alpha)$$

où ne figurent plus que α paramètres $g_1, \dots, g_r$.

Posons

$$g_r = \operatorname{tang} \theta_r,$$

et multiplions les équations (59) par $\cos \theta_r$; elles prendront la forme

$$(60) \qquad A'_r = v'_r \cos \theta_r + w'_r \sin \theta_r = 0.$$

Nous dirons que $\theta_1, \dots, \theta_\alpha$ sont *les angles des deux α-plans* P_α *et* P_γ.

38. Les quantités $\cos^2\theta_r$, $\sin^2\theta_r$ sont des invariants orthogonaux. On peut le démontrer de deux manières.

En premier lieu, soient

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_\alpha v_\alpha$$

l'un quelconque des plans générateurs de P_α,

$$\mu_1(v'_1 \cos\theta_1 + w'_1 \sin\theta_1) + \ldots + \mu_\alpha(v'_\alpha \cos\theta_\alpha + w'_\alpha \sin\theta_\alpha)$$

l'un quelconque des plans générateurs de P_γ. L'angle φ de ces deux plans sera donné par la formule

$$\cos^2\varphi = \frac{(\lambda_1\mu_1 \cos\theta_1 + \ldots + \lambda_\alpha\mu_\alpha \cos\theta_\alpha)^2}{(\mu_1^2 + \ldots + \mu_\alpha^2)(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_\alpha^2)} = \frac{N^2}{ML}. \tag{61}$$

Si l'on fait varier les indéterminées λ et μ, les maxima et minima de cette expression seront évidemment des invariants.

Supposons d'abord que les λ soient seuls variables. Si les λ sont déterminés de manière à donner à $\frac{M}{N}$ sa valeur maximum ou minimum t^2, on aura

$$t^2 = \frac{N^2}{ML} = \frac{N^2 + d.N^2}{ML + MdL},$$

quelles que soient les variations $d\lambda_1, \ldots, d\lambda_\alpha$. On en déduit

$$d.N^2 = t^2 M dL,$$

et, par suite,

$$\frac{dN^2}{d\lambda_1} = t^2 M \frac{dL}{d\lambda_1}, \ldots, \frac{dN^2}{d\lambda_\alpha} = t^2 M \frac{dL}{d\lambda_\alpha},$$

ou

$$N\mu_1 \cos\theta_1 = t^2 M\lambda_1, \ldots, N\mu_\alpha \cos\theta_\alpha = t^2 M\lambda_\alpha. \tag{62}$$

Tirant de là les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, substituant dans (61) et réduisant, il vient

$$t^2 = \cos^2\varphi = \frac{\mu_1^2 \cos^2\theta_1 + \ldots + \mu_\alpha^2 \cos^2\theta_\alpha}{\mu_1^2 + \ldots + \mu_\alpha^2} = \frac{R}{S}. \tag{63}$$

39. Faisons maintenant varier les quantités $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$. La loi de variation de t^2, qui résulte de la formule (63) peut être représentée géométriquement. En effet, t^2 ne dépendant que des rapports des quantités $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$, on peut supposer qu'on les fait varier de telle sorte qu'on ait toujours $S = 1$. Cela posé, prenons dans un espace à α dimensions une droite de longueur $r = \frac{1}{t^2}$, et faisant avec les axes coordonnés les angles $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$. Le lieu des extrémités de ces droites sera l'ellipsoïde à α dimensions

$$1 = X_1^2 \cos^2\theta_1 + \ldots + X_\alpha^2 \cos^2\theta_\alpha.$$

40. Il reste à obtenir les maxima et minima de t^2. Soit s^2 l'un d'eux : on aura

$$s^2 = \frac{R}{S} = \frac{R + dR}{S + dS} = \frac{dR}{dS},$$

d'où

$$\frac{dR}{d\mu_1} = s^2 \frac{dS}{d\mu_1}, \ldots, \frac{dR}{d\mu_\alpha} = s^2 \frac{dS}{d\mu_\alpha},$$

ou

$$(64) \qquad \mu_1 \cos^2\theta_1 = \mu_1 s^2, \ldots, \mu_\alpha \cos^2\theta_\alpha = \mu_\alpha s^2.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$s^2 = \cos^2\theta_\rho, \ \mu_1 = \ldots = \mu_{\rho-1} = \mu_{\rho+1} = \ldots = \mu_\alpha = 0,$$

et les équations (62) donneront ensuite les valeurs correspondantes des indéterminées λ :

$$(65) \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\rho-1} = \lambda_{\rho+1} = \ldots = \lambda_\alpha = 0.,$$

Il existe donc α maxima et minima distincts qui correspondront aux angles respectivement formés par les plans $A_1, \ldots, A_\alpha$ avec les plans correspondants $A'_1, \ldots, A'_\alpha$.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Étant donnés deux α-plans P_α et P_γ, n'ayant qu'un seul point commun, si l'on cherche ceux de leurs plans générateurs dont l'angle est maximum ou minimum, on obtiendra deux systèmes associés de plans rectangulaires réels $A_1, \ldots, A_\alpha$ et $A'_1, \ldots, A'_\alpha$: les maxima et minima cherchés ne sont autres que les angles des multiplans P_α et P_γ.

41. Soient, en second lieu, $v'_1, \ldots, v'_\alpha, w'_1, \ldots, w'_\alpha$ les coordonnées d'un point quelconque de P_γ. Sa distance h au multiplan P_α défini par les équations

$$v'_1 = \ldots = v'_\alpha = 0$$

sera évidemment donnée par la formule

$$h^2 = v'^2_1 + \ldots + v'^2_\alpha.$$

D'autre part, sa distance k à l'origine des coordonnées sera donnée par la formule

$$k^2 = v'^2_1 + \ldots + v'^2_\alpha + w'^2_1 + \ldots + w'^2_\alpha,$$

ou, en tenant compte des équations (60),

$$k^2 = v'^2_1 + \ldots + v'^2_\alpha + v'^2_1 \cot^2\theta_1 + \ldots + v'^2_\alpha \cot^2\theta_\alpha = \frac{v'^2_1}{\sin^2\theta_1} + \ldots + \frac{v'^2_\alpha}{\sin^2\theta_\alpha}.$$

Cela posé, les maxima et minima de $\frac{h^2}{k^2}$ sont évidemment des invariants. Soit u^2 l'un d'entre eux. On aura, comme tout à l'heure,

$$u^2 = \frac{h^2}{k^2} = \frac{h^2 + d.h^2}{y^2 + d.k^2},$$

d'où

$$\frac{d.h^2}{dv_1'} = u^2 \frac{d.k^2}{dv_1'}, \ldots, \frac{d.h^2}{dv_\alpha'} = u^2 \frac{d.k^2}{dv_\alpha'},$$

ou

$$v_1' = \frac{u^2 v_1'}{\sin^2 \theta_1}, \ldots, v_\alpha' = u^2 \frac{v_\alpha'}{\sin^2 \theta_\alpha}.$$

On satisfera à ces équations en posant

$$u^2 = \sin^2 \theta_\rho, \; v_1' = \ldots = v_{\rho-1}' = v_{\rho+1}' = \ldots = v_\alpha' = 0.$$

On aura donc α invariants distincts, qui seront les carrés des sinus des angles $\theta_1, \ldots, \theta_\alpha$.

42. On remarquera ici encore que les quantités $\cos \theta_r$, $\sin \theta_r$, $\operatorname{tang} \theta_r = g_r$ ne sont pas des invariants, car on peut changer à volonté leur signe en changeant le signe d'une des coordonnées. Leurs carrés seulement sont des invariants.

43. Considérons deux systèmes quelconques de deux α-plans P_α et P_γ, P_α' et P_γ'. S'ils ont les mêmes invariants, ils seront pareils, car nous venons de voir qu'on peut les ramener par une substitution orthogonale à une même forme canonique. Mais il est utile de distinguer le cas où ces deux systèmes sont égaux de celui où ils sont symétriques.

Si $n > 2\alpha$, les deux systèmes seront à la fois égaux et symétriques ; car chacun d'eux est symétrique à lui-même, son équation ne changeant pas par la substitution orthogonale de déterminant -1 qu'on obtient en changeant le signe d'une des coordonnées qui ne figurent pas dans ses équations canoniques.

Il n'en est plus de même si $n = 2\alpha$. On aura égalité ou symétrie. Voyons comment ces deux cas pourront être distingués l'un de l'autre.

44. Soient, comme précédemment,

$$v_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots \alpha),$$

et

$$A_r = a_{r1} v_1 + \ldots + a_{r\alpha} v_\alpha + b_{r1} w_1 + \ldots + b_{r\alpha} w_\alpha = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

les équations initiales qui définissent respectivement P_α et P_γ. On pourra de même met re les équations qui définissent respectivement P'_α et P'_γ sous la forme

$$V_r = 0 \quad (r=1,2,\ldots,\alpha),$$

et

$$A_{r1}V_1 + \ldots + A_{r\alpha}V_\alpha + B_{r1}W_1 + \ldots + B_{r\alpha}W_\alpha = 0 \quad (r=1,2,\ldots,\alpha),$$

$V_1=0,\ldots,W_\alpha=0$ désignant des plans rectangulaires.

La substitution

$$| \; v_1, \ldots, w_\alpha \;\; V_1, \ldots, W_\alpha \; |$$

est orthogonale, et suivant que son déterminant sera égal à ± 1, il est clair que le système P'_α, P'_γ sera égal ou symétrique au système des deux multiplans P_α, P_γ respectivement définis par les équations

$$v_r = 0 \quad (r=1,2,\ldots,\alpha),$$

et

$$\mathcal{A}_r = A_{r1}v_1 + \ldots + A_{r\alpha}v_\alpha + B_{r1}w_1 + \ldots + B_{r\alpha}w_\alpha \quad (r=1,2,\ldots,\alpha).$$

La question se trouve ainsi ramenée à déterminer dans quel cas ce nouveau système est égal au système P_α, P_γ et dans quel cas, au contraire, il lui est symétrique,

45. Nous allons prouver que *l'égalité a lieu si le produit des deux déterminants*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{1\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ A_{\alpha 1} \ldots A_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_{11} \ldots B_{1\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ B_{\alpha 1} \ldots B_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

est de même signe que le produit des deux déterminants

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{\alpha 1} \ldots a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} \ldots b_{1\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ b_{\alpha 1} \ldots b_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas contraire, on aura la symétrie.

46. Prenons pour définir P_γ, au lieu des plans

$$A_r = 0,$$

les plans

$$C_r = 0$$

définis par les relations (50) ou (51).

Les déterminants analogues à δ_1 et δ_2 par rapport à ce nouveau système de plans seront évidemment égaux à

$$\delta'_1 = \varepsilon\delta_1 = 1, \quad \delta'_2 = \varepsilon\delta_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1} = \begin{vmatrix} b'_{11} \ldots b'_{1\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ b'_{\alpha 1} \ldots b'_{\alpha\alpha} \end{vmatrix},$$

ε_1 désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_{11} \dots e_{1\alpha} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_{\alpha 1} \cdot\ \cdot e_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

réciproque de δ_1

On voit par là que δ'_2 aura le même signe que $\delta_1\delta_2$.

Prenons maintenant pour coordonnées, au lieu de $v_1, \dots, v_\alpha$, les quantités $v'_1, \dots, v'_\alpha$ déterminées par les relations (54), et définissons P_γ par l'intersection des plans $A'_r = 0$ donnés par la formule (55). Le déterminant

$$\delta''_2 = \begin{vmatrix} b''_{11} \dots b''_{1\alpha} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b''_{\alpha 1} \dots b''_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

sera évidemment égal à $\delta'_2\psi$, ψ étant le déterminant des coefficients $f_{11}, \dots, f_{\alpha\alpha}$. Ce déterminant est égal à ± 1, la substitution (52) étant orthogonale. On peut le supposer égal à 1 ; car, pour changer son signe, il suffirait de changer simultanément le signe de $f_{11}, \dots, f_{1\alpha}$, ce qui peut se faire sans altérer la propriété qu'a la substitution (52) de faire disparaître les rectangles dans la fonction Φ. On aura, dans cette hypothèse,

$$\delta''_2 = \delta_2.$$

Cela posé, on a évidemment

$$\delta''_2 = g_1 \dots g_\alpha \psi', \tag{66}$$

ψ' étant le déterminant des équations (58). Ces relations étant orthogonales, on aura

$$\psi' = \pm 1$$

D'ailleurs, le signe des quantités $g_1, \dots, g_\alpha$ est arbitraire ; on pourra donc supposer $g_2, \dots, g_\alpha$ positifs, et déterminer le signe de g_1 de telle sorte que ψ' soit égal à 1. On voit alors par l'équation (66) que g_1 aura le même signe que δ''_2, ou que le produit $\delta_1\delta_2$.

On pourra donc, par des transformations orthogonales de déterminant 1, donner aux équations de P_α et P_γ les formes suivantes

$$v'_1 = 0, \dots, v'_\alpha = 0, \tag{67}$$

$$v'_1 + g_1 w'_1 = 0, \dots, v'_\alpha + g_\alpha w'_\alpha = 0. \tag{68}$$

47. Opérant de la même manière sur le système P_α, P_γ, qui a par hypothèse les mêmes invariants $g_1^2, \dots, g_\alpha^2$, on pourra, par des transformations orthogonales de déterminant 1, mettre ses équations sous une forme canonique identique à la précédente, si $\Delta_1\Delta_2$ a le même signe que $\delta_1\delta_2$; sous une forme qui diffère de la précédente par le signe de g_1, si $\Delta_1\Delta_2$ est de signe contraire à $\delta_1\delta_2$. Il est clair que, dans le premier cas, les deux systèmes P_α, P_γ et P'_α, P'_γ seront égaux; dans le second cas, ils seront symétriques, puisque pour ramener leurs formes canoniques à l'identité, il faudra changer le signe d'une coordonnée.

Notre proposition est donc établie.

48. Nous avons vu, dans ce qui précède, qu'on peut déterminer un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_\rho$, $y_1, \ldots, y_\sigma$, $z_1, \ldots, z_\tau$, $u_1, \ldots, u_\upsilon$, $v'_1, \ldots, v'_\alpha$, $w'_1, \ldots, w'_\alpha$, tel que P_k et P_l soient respectivement déterminés par les équations

$$(69)\qquad \begin{cases} x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0, \\ u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0, \\ v'_1 = 0, \ldots, v'_\alpha = 0. \end{cases}$$

et par les équations

$$(70)\qquad \begin{cases} x_1 = 0, \ldots, x_\rho = 0, \\ z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0, \\ v'_1 \cos\theta_1 + w'_1 \sin\theta_1 = 0, \ldots, v'_\alpha \cos\theta_\alpha + w'_\alpha \sin\theta_\alpha = 0. \end{cases}$$

Les multiplans P_{n-k} et P_{n-l} menés par l'origine perpendiculairement aux précédents auront évidemment pour équations

$$(71)\qquad \begin{cases} y_1 = 0, \ldots, y_\sigma = 0, \\ z_1 = 0, \ldots, z_\tau = 0, \\ w'_1 = 0, \ldots, w'_\alpha = 0, \end{cases}$$

et

$$(72)\qquad \begin{cases} y_1 = 0, \ldots, y_\sigma = 0, \\ u_1 = 0, \ldots, u_\upsilon = 0, \\ -v'_1 \sin\theta_1 + w'_1 \cos\theta_1 = 0, \ldots, -v'_\alpha \sin\theta_\alpha + w'_\alpha \cos\theta_\alpha = 0. \end{cases}$$

La comparaison de ces équations montre :

1° Que P_{n-l} *forme avec* P_k *des angles en nombre* α, *respectivement égaux à* $\frac{\pi}{2} + \theta_1, \ldots, \frac{\pi}{2} + \theta_\alpha$;

2° Que P_{n-k} *et* P_{n-l} *forment entre eux des angles en nombre* α, *respectivement égaux à* $\pi + \theta_1, \ldots, \pi + \theta_\alpha$.

Il résulte de là que P_{n-k} *et* P_{n-l} *auront les mêmes invariants que* P_k *et* P_l.

49. *Un système formé d'un k-plan* P_k *et d'un l-plan* P_l *aura en général* α *invariants angulaires,* α *étant le plus petit des quatre nombres* $k, l, n-k, n-l$.

Admettons en effet que les coefficients de P_k et de P_l ne soient liés par aucune relation particulière, et supposons d'abord que k soit le plus petit des quatre nombres ci-dessus. On aura $k+l\leqslant n$, $k+n-l\leqslant n$. Donc P_k n'aura en général aucun plan générateur commun avec P_l ou P_{n-l}. On aura par suite (33)

$$\rho=0,\ \upsilon=0,\ \alpha=k-\rho-\upsilon=k.$$

On voit aisément que les cas particuliers où P_k aurait ρ plans générateurs communs avec P_l et υ plans générateurs communs avec P_{n-l} se déduisent du cas général en exprimant que, parmi les k angles de P_k et de P_l, il y en a ρ égaux à zéro et υ égaux à $\frac{\pi}{2}$.

Soit au contraire $n-k\leqslant k, n, n-l$. Les multiplans P_{n-k}, P_{n-l} auront en général $n-k$ invariants angulaires, d'après ce qui précède, et P_k, P_l qui leur sont respectivement perpendiculaires, auront les mêmes invariants (48).

50. Nous avons vu (33) que la recherche des angles de deux multiplans quelconques se ramène immédiatement à celle des angles de deux α-plans, α étant au plus égal à $\frac{n}{2}$. Cette dernière question peut se résoudre, ainsi que nous l'avons fait (34 et suivants), par la réduction des deux α-plans à leur forme canonique. Mais on peut aussi la traiter directement.

Soient en effet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots &,\\ a_{\alpha 1}x_1 + \dots + a_{\alpha n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots &,\\ b_{\alpha 1}x_1 + \dots + b_{\alpha n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

les équations des deux α-plans considérés P et Q.

Les plans générateurs de P auront pour équation générale

$$A_1x_1 + \dots + A_nx_n = 0,$$

en posant pour abréger

$$(73)\qquad A_1 = a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{\alpha 1}\lambda_\alpha,\ \dots,\ A_n = a_{1n}\lambda_1 + \dots + a_{\alpha n}\lambda_\alpha.$$

Ceux de Q auront de même pour équation

$$(74)\qquad B_1x_1 + \dots + B_nx_n = 0,$$

en posant

$$B_1 = b_{11}\mu_1 + \dots + b_{\alpha 1}\mu_\alpha,\ \dots,\ B_n = b_{1n}\mu_1 + \dots + b_{\alpha n}\mu_\alpha.$$

L'angle φ des deux plans sera donné par l'expression

$$(75)\qquad \cos^2\varphi = \frac{\left(\sum A_\rho B_\rho\right)^2}{\sum A_\rho^2 \sum B_\rho^2} = \frac{M}{N},$$

dont il reste à déterminer le minimum.

Soit s^2 un des minima cherchés. Les valeurs correspondantes des indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ d'une part, et $\mu_1, \ldots, \mu_\alpha$ d'autre part, ne sont déterminées que par leur rapport, $\frac{M}{N}$ étant homogène et du degré zéro par rapport à chacun de ces systèmes de variables. On pourra donc déterminer les λ et les μ de telle sorte qu'on ait, outre la condition

$$\frac{M}{N} = s^2,$$

les deux conditions auxiliaires suivantes

$$\sum A^2 = 1, \quad \sum B^2 = 1,$$

et par suite

$$N = \sum A^2 \sum B^2 = 1, \quad s = \sqrt{\frac{M}{N}} = \sqrt{M} = \sum A_\rho B_\rho.$$

Cela posé, donnons aux variables λ, μ des accroissements infiniment petits quelconques. On aura, d'après la condition du minimum,

$$s^2 = \frac{M}{N} = \frac{M + dM}{N + dN}.$$

Chassant les dénominateurs et égalant séparément à zéro les coefficients de $d\lambda_1, \ldots, d\lambda_\sigma, d\mu_1, \ldots, d\mu_\alpha$, il viendra

$$(76)\qquad \frac{dM}{d\lambda_\sigma} = s^2 \frac{dN}{d\lambda_\sigma},$$

$$(77)\qquad \frac{dM}{d\mu_\sigma} = s^2 \frac{dN}{d\mu_\sigma}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Mais on a

$$\frac{dM}{d\lambda_\sigma} = 2 \sum A_\rho B_\rho \sum a_{\sigma\rho} B_\rho = 2s \sum a_{\sigma\rho} B_\rho,$$

$$\frac{dN}{d\lambda_\sigma} = 2 \sum B^2 \sum a_{\sigma\rho} A_\rho = 2 \sum a_{\sigma\rho} A_\rho.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (76), et supprimant le facteur commun s, il viendra

$$(78)\qquad \sum a_{\sigma\rho} B_\rho = s \sum a_{\sigma\rho} A_\rho \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

L'équation (77) donnera de même

$$(79)\qquad \sum b_{\sigma\rho} A_\rho = s \sum b_{\sigma\rho} B_\rho \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Les équations (73), (74), (78) et (79) forment un système de $2n + 2\alpha$ équations linéaires entre les $2n + 2\alpha$ quantités λ, μ, A, B. En égalant à zéro le déterminant de ce système, on aura l'équation caractéristique qui détermine s. Cette équation est du degré 2α. Mais il est aisé de voir qu'elle ne contiendra que des puissances paires de s.

V. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX MULTIPLANS.

51. Passons maintenant à la considération de deux multiplans P_k, P'_l qui n'aient aucun point commun. Par un point quelconque de P_k menons un l-plan P_l parallèle à P'_l. On pourra choisir les coordonnées de manière à ramener P_k et P_l aux formes canoniques (69) et (70). P_l, rapporté aux mêmes axes, aura pour équations

$$(80)\qquad x_1 = a_1, \;\ldots,\; x_\rho = a_\rho,$$

$$(81)\qquad z_1 = b_1, \;\ldots,\; z_\tau = b_\tau,$$

$$(82)\qquad v'_1 \cos\theta_1 + w'_1 \sin\theta_1 = c_1, \;\ldots,\; v'_\alpha \cos\theta_\alpha + w'_\alpha \sin\theta_\alpha = c_\alpha.$$

Mais, si l'on prend pour coordonnées, au lieu de

$$z_1, \;\ldots,\; z_\tau, w'_1, \;\ldots,\; w'_\alpha,$$

les quantités

$$z_1 - b_1, \;\ldots,\; z_\tau - b_\tau,\; w'_1 - \frac{c_1}{\sin\theta_1}, \;\ldots,\; w'_\alpha - \frac{c_\alpha}{\sin\theta_\alpha},$$

on fera disparaître les constantes b et c. D'autre part, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ des paramètres quelconques assujettis à la relation

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_\rho a_\rho = 0\,;$$

l'équation générale

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_\rho x_\rho = 0$$

représente un $\rho - 1$-plan, résultant de la combinaison de $\rho - 1$ plans générateurs rectangulaires

$$x'_2 = 0, \;\ldots,\; x'_\rho = 0,$$

D'ailleurs P_ρ résulte de l'intersection de $P_{\rho-1}$ et d'un plan x'_1 perpendiculaire à $P_{\rho-1}$. Prenons pour plans coordonnés

$$x'_1=0, \ldots, x'_\rho=0,$$

au lieu de

$$x_1=0, \ldots, x_\rho=0.$$

La forme des équations de P_k ne sera pas changée; mais les équations (80) deviendront

$$x'_1=\alpha'_1,\ x'_2=0, \ldots, x'_\rho=0.$$

Les équations de P'_l ne contiendront donc plus qu'un seul terme constant α'_1. Il est aisé de voir que cette dernière constante représente la *plus courte distance* de P_k et de P'_l; c'est donc un invariant nouveau à ajouter aux invariants angulaires précédemment étudiés.

52. Cherchons maintenant comment on pourra calculer *a priori* cette plus courte distance.

Soient $A_1=0, \ldots, A_k=0$ les équations de P_k; $B_1=0, \ldots, B_l=0$ celles de P'_l. On pourra exprimer les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ d'un point quelconque de P_k en fonction linéaire de $n-k$ variables indépendantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$.

En effet, soient $A_{k+1}, \ldots, A_n$ des fonctions linéaires quelconques de x_1, $\ldots, x_n$, choisies de manière à former avec $A_1, \ldots, A_k$ un système de n fonctions distinctes, et posons

$$A_{k+1}=\lambda_1, \ldots, A_n=\lambda_{n-k}.$$

Ces équations, jointes aux suivantes

$$A_1=0, \ldots, A_k=0,$$

fourniront un système de n équations linéaires. En les résolvant par rapport à $x_1, \ldots, x_n$, on obtiendra pour ces variables des expressions de la forme

$$x_\rho=c_{\rho 1}\lambda_1+\ldots+c_{\rho,n-k}\lambda_{n-k}+d_\rho.$$

On pourra, de la même manière, exprimer les coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ d'un point quelconque de P'_l en fonction linéaire de $n-l$ variables indépendantes, $\lambda_{n-k+1}, \ldots, \lambda_{2n-k-l}$, par des expressions de la forme suivante

$$-X_\rho=c_{\rho,n-k+1}\lambda_{n-k+1}+\ldots+c_{\rho,2n-k-l}\lambda_{2n-k-l}+D_\rho.$$

Cela posé, le carré de la plus courte distance cherchée Δ s'obtiendra en cherchant le minimum de l'expression

$$(x_1-X_1)^2+\ldots+(x_n-X_n)^2,$$

ou, en substituant pour les x et les X leurs valeurs et posant pour abréger $2n - k - l = m$, $d_\rho + D_\rho = \delta_\rho$, le minimum de l'expression

$$(83) \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (c_{\rho 1}\lambda_1 + \ldots + c_{\rho m}\lambda_m + \delta_\rho)^2,$$

où toutes les variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont indépendantes.

Ce minimum sera évidemment nul, si $m > n$.

53. Soit au contraire $m < n$. Posons, pour abréger,

$$(84) \qquad c_{\rho 1}\lambda_1 + \ldots + c_{\rho m}\lambda_m + \delta_\rho = -\mu_\rho.$$

On obtiendra le minimum cherché en égalant à zéro les dérivées de l'expression (83) par rapport aux variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, ce qui donnera une série d'équations de la forme

$$(85) \qquad c_{1\sigma}\mu_1 + c_{2\sigma}\mu_2 + \ldots + c_{n\sigma}\mu_n = 0.$$

Les équations (84) et (85) sont au nombre de $m+n$, et linéaires par rapport aux $m+n$ variables λ et μ. On pourra donc calculer ces variables sans difficulté ; on obtiendra des expressions de la forme

$$\lambda_1 = -\frac{P_1}{R}, \ldots, \lambda_n = -\frac{P_n}{R}, \mu_1 = -\frac{Q_1}{R}, \ldots, \mu_n = -\frac{Q_n}{R},$$

en posant pour abréger

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{1m} & c_{2m} & \ldots & c_{nm} \end{vmatrix},$$

$$P_1 = \begin{vmatrix} \delta_1 & c_{12} & \ldots & c_{1m} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \delta_2 & c_{22} & \ldots & c_{2m} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_n & c_{n2} & \ldots & c_{nm} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{1m} & c_{2m} & \ldots & c_{nm} \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

$$Q_1 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & \delta_2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} & \delta_n & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{2m} & \dots & c_{nm} \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

et le minimum cherché sera donné par la formule

$$\Delta^2 = \frac{Q_1^2 + \dots + Q_n^2}{R^2}.$$

Cette expression peut être simplifiée. Nous allons montrer, en effet, que son numérateur est divisible par R.

54. Et d'abord il résulte évidemment de la forme du déterminant R que l'on aura

$$R = \sum A_{\alpha\beta\dots}^2,$$

en désignant par $A_{\alpha\beta\dots}$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} \\ c_{\beta 1} & \dots & c_{\beta m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

et la sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs distinctes des m indices $\alpha, \beta, \dots$ compris entre 1 et n.

On aura de même

$$P_\rho = \sum A_{\alpha\beta\dots} D^\rho_{\alpha\beta\dots},$$

$D^\rho_{\alpha\beta\dots}$ étant ce que devient $A_{\alpha\beta\dots}$ lorsqu'on y remplace $c_{\alpha\rho}$, $c_{\beta\rho}$, ... par δ_α, δ_β, ...

On aura enfin, d'une manière analogue,

$$Q_\rho = (-1)^{\rho+1} \sum^\rho B_{\rho\alpha\beta\dots} A_{\alpha\beta\dots},$$

où $B_{\rho\alpha\beta\dots}$ représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_{\rho 1} & \dots & c_{\rho m} & \delta_\rho \\ c_{\alpha 1} & \dots & c_{\alpha m} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & \dots & c_{\beta m} & \delta_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

et où la sommation $\sum^{\rho}$ s'étend aux systèmes de valeurs distincts des indices $\alpha, \beta, \ldots$ à l'exclusion de la valeur ρ.

55. Substituons dans Δ^2 les valeurs de $R, Q_1, \ldots, Q_n$, il viendra, en appelant M^2 le minimum cherché,

$$M^2 = \frac{S\left(\sum^{\rho} B_{\rho\alpha\beta\ldots} A_{\alpha\beta\ldots}\right)^2}{\left(\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}\right)^2}$$

la nouvelle sommation représentée par S s'étendant à toutes les valeurs de ρ.

On voit déjà que le numérateur de M^2 est une fonction du second degré des déterminants $A_{\alpha\beta\ldots}$. Nous allons montrer qu'on peut le mettre sous la forme suivante

$$\left(S B^2_{\rho\alpha\beta\ldots}\right)\left(\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}\right),$$

la nouvelle sommation S s'étendant à tous les différents systèmes de valeurs de $\rho, \alpha, \beta, \ldots$.

56. Nous commencerons par l'examen de quelques cas particuliers.

Soit d'abord $n - m = 1$. L'indice ρ étant déterminé, les indices en nombre m, $\alpha, \beta, \ldots$, n'auront plus qu'un seul système de valeurs, la valeur ρ étant écartée. La somme représentée par $\sum^{\rho}$ se réduira donc à un seul terme, et l'on aura, pour le numérateur de Δ^2,

$$S B^2_{\rho\alpha\beta\ldots} A^2_{\alpha\beta\ldots}.$$

D'ailleurs les indices $\rho, \alpha, \beta, \ldots$, en nombre $m+1$, ne sont susceptibles que d'un seul système de valeurs, et en les permutant on changera tout au plus le signe du déterminant $B_{\rho\alpha\beta\ldots}$. Le facteur $B^2_{\rho\alpha\beta\ldots}$ sera donc le même dans tous les termes de la somme S; et il s'y trouvera multiplié par les divers termes de la somme $\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}$. Le numérateur de Δ^2 sera donc égal à $B^2_{\rho\alpha\beta\ldots}\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}$; ce qu'il fallait démontrer.

57. Soit en second lieu $m = 1$, n quelconque. On aura

$$\Delta^2 = (c_{11}\lambda_1 + \delta_1)^2 + \ldots + (c_{n1}\lambda_1 + \delta_n)^2,$$

et la valeur de λ_1 qui donne le minimum sera fournie par l'équation

$$c_{11}(c_{11}\lambda_1 + \delta_1) + \ldots + c_{n1}(c_{n1}\lambda_1 + \delta_n) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda_1 = -\frac{\sum_1^n c_{\alpha 1}\,\delta_\alpha}{\sum_1^n c_{\alpha 1}^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression

$$\Delta^2 = \sum\left(c_{\alpha 1}\lambda_1 + \delta_\alpha\right)^2 = \lambda_1^2 \sum c_{\alpha 1}^2 + 2\lambda_1 \sum c_{\alpha 1}\delta_\alpha + \sum \delta_\alpha^2,$$

on aura l'expression du minimum

$$(86)\qquad \sum c_{\alpha 1}^2 \frac{\left(\sum c_{\alpha 1}\delta_\alpha\right)^2 - 2\left(\sum c_{\alpha 1}\delta_\alpha\right)^2 + \sum \delta_\alpha^2 \sum c_{\alpha 1}^2}{\left(\sum c_{\alpha 1}^2\right)^2}$$

$$= \sum c_{\alpha 1}^2 \frac{\mathbf{S}\left(\delta_\rho c_{\alpha 1} - \delta_\alpha c_{\rho 1}\right)^2}{\left(\sum c_{\alpha 1}^2\right)^2},$$

la sommation $\mathbf{S}$ s'étendant à tous les différents systèmes de valeurs des indices ρ, α. Mais les deux sommes $\sum c_{\alpha 1}^2$ et $\mathbf{S}\,(\delta_\rho c_{\alpha 1} - \delta_\alpha c_{\rho 1})^2$ sont précisément ce que deviennent dans le cas particulier que l'on considère les expressions $\sum A_{\alpha\beta\ldots}^2$ et $\mathbf{S}\,B_{\rho\alpha\beta\ldots}^2$. Le théorème se trouve donc démontré.

58. Cela posé, pour établir d'une manière générale que quels que soient m et n (m étant $< n$), on a la relation

$$(87)\qquad M^2 = \frac{\mathbf{S}\,B_{\rho\alpha\beta\ldots}^2}{\sum A_{\alpha\beta\ldots}^2},$$

il nous suffira de démontrer que si cette relation est vraie pour m et n, ainsi que pour $m+1$ et n (en supposant $m+1 < n$), elle sera encore vraie pour $m+1$, $n+1$. En effet, la proposition est déjà prouvée, quel que soit n, pour $m = 1$ et pour $m = n-1$.

Or, soit

$$(88)\qquad \Delta^2 = \sum_{\rho=1}^{\rho=n+1}\left(c_{\rho 1}\lambda_1 + \ldots + c_{\rho m}\lambda_m + c_{\rho, m+1}\lambda_{m+1} + \delta_\rho\right)^2.$$

Posons

$$(89)\qquad \lambda_\rho = a_{\rho 1}\Lambda_1 + \ldots + a_{\rho, m+1}\Lambda_{m+1},$$

$\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{m+1}$ étant de nouvelles variables, et $a_{\rho 1}, \ldots, a_{\rho, m+1}$ des coefficients quelconques. La quantité Δ^2 sera une fonction quadratique des nouvelles variables Λ; mais il est clair que son minimum M^2 ne sera pas altéré par cette transformation. Il en est de même de l'expression

$$\frac{\mathrm{S}B^2_{\rho\alpha\beta\ldots}}{\sum A^2_{\alpha\beta\ldots}},$$

car chacun des déterminants partiels qui figurent tant au numérateur qu'au dénominateur se trouvera multiplié après la transformation par un même facteur, égal au déterminant de la substitution (89).

Or on pourra évidemment choisir les nouvelles variables de telle sorte que

$$c_{n+1,1}\lambda_1 + \ldots + c_{n+1,m+1}\lambda_{m+1}$$

se réduise au produit de Λ_{m+1} par un facteur constant. On voit par là que, pour démontrer l'égalité (87) dans le cas général, il suffira de considérer le cas particulier où l'on a $c_{n+1,1} = \ldots = c_{n+1,m} = 0$. Mais, dans ce cas particulier, la démonstration devient facile, comme on va le voir.

59. Supposons, pour simplifier l'écriture, qu'on ait $m=1$, $n=3$ (on verra aisément que le procédé de démonstration est général). L'expression dont on aura à chercher le minimum sera

$$\Delta^2 = (c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + \delta_1)^2 + (c_{21}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \delta_2)^2 + (c_{31}\lambda_1 + c_{32}\lambda_2 + \delta_3)^2 + (c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2.$$

Pour l'obtenir, on pourra évidemment opérer de la manière suivante: on supposera λ_2 constant et λ_1 seul variable, on obtiendra ainsi un certain minimum $\mathfrak{M}^2$, qui sera fonction de λ_2; puis on fera varier λ_2 de manière à obtenir un minimum minimorum, qui sera la quantité cherchée M^2.

Or le théorème étant établi pour $m=1$, $n=3$, on aura immédiatement le minimum de la somme des trois premiers carrés, en supposant λ_2 constant. Ce minimum sera égal à

$$\frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\lambda_2 + \delta_1 \\ c_{21} & c_{22}\lambda_2 + \delta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_{21} & c_{22}\lambda_2 + \delta_2 \\ c_{31} & c_{32}\lambda_2 + \delta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_{31} & c_{32}\lambda_2 + \delta_3 \\ c_{11} & c_{12}\lambda_2 + \delta_1 \end{vmatrix}^2}{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2}.$$

En y ajoutant le terme constant $(c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2$, on aura pour $\mathfrak{M}^2$ l'expression suivante

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{(\mathfrak{A}_{12}\lambda_2 + \mathfrak{C}_{12})^2 + (\mathfrak{A}_{23}\lambda_2 + \mathfrak{C}_{23})^2 + (\mathfrak{A}_{31}\lambda_2 + \mathfrak{C}_{31})^2 + (c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)(c_{42}\lambda_2 + \delta_4)^2}{c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2},$$

en posant pour abréger

$$\mathfrak{A}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} \\ c_{\beta 1} & c_{\beta 2} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{C}_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} c_{\alpha 1} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & \delta_\beta \end{vmatrix}.$$

Cela posé, $\mathfrak{M}^2$ ne contenant plus qu'une seule variable λ_2, son minimum M^2 sera égal à

$$(90) \qquad \frac{U + V(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)}{W(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)},$$

en posant pour abréger

$$U = (\mathcal{A}_{12}\mathcal{C}_{23} - \mathcal{A}_{23}\mathcal{C}_{12})^2 + (\mathcal{A}_{12}\mathcal{C}_{31} - \mathcal{A}_{31}\mathcal{C}_{12})^2 + (\mathcal{A}_{23}\mathcal{C}_{31} - \mathcal{A}_{31}\mathcal{C}_{23})^2,$$
$$V = (\mathcal{A}_{12}\delta_4 - \mathcal{C}_{12}c_{42})^2 + (\mathcal{A}_{23}\delta_4 - \mathcal{C}_{23}c_{42})^2 + (\mathcal{A}_{31}\delta_4 - \mathcal{C}_{31}c_{42})^2,$$

et

$$W = (\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{31}^2 + c_{42}^2\,(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2).$$

Or les six termes de W sont précisément les carrés des déterminants binaires $A_{\alpha\beta}$ formés avec les quantités

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & c_{42}. \end{matrix}$$

En second lieu, les termes de V sont précisément les carrés de ceux des déterminants ternaires

$$B_{\rho\alpha\beta} = \begin{vmatrix} c_{\rho 1} & c_{\rho 2} & \delta_\rho \\ c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} & \delta_\alpha \\ c_{\beta 1} & c_{\beta 2} & \delta_\beta \end{vmatrix},$$

pour lesquels $\rho = 4$.

Enfin, si l'on avait $c_4 = \delta_4 = 0$, M^2 se réduirait à

$$\frac{U}{(\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{31}^2)\,(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)}.$$

Mais, dans ce cas, la fonction Δ contenant dans son expression un carré de moins que précédemment, le théorème lui serait applicable, par hypothèse. L'expression de son minimum serait donc $\dfrac{B_{123}^2}{\mathcal{A}_{12}^2 + \mathcal{A}_{23}^2 + \mathcal{A}_{31}^2}$. On aura par suite

$$U = (c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)\,B_{123}^2,$$

et, substituant cette valeur dans l'expression (90), il viendra

$$M^2 = \frac{\mathbf{S}\,B_{\rho\alpha\beta}^2}{\sum A_{\alpha\beta}^2},$$

le signe $\mathbf{S}$ s'étendant à tous les systèmes de valeurs de ρ, α, β. C'est précisément l'égalité qu'il s'agissait de démontrer.

60. De la formule que nous venons d'établir pour exprimer le minimum d'une somme de carrés de fonctions linéaires, on peut déduire de nombreuses relations entre les déterminants formés avec les coefficients de ces fonctions. Pour les obtenir, il suffit d'observer que le minimum cherché peut s'obtenir en laissant d'abord constantes une partie des variables, et les faisant varier ensuite de manière à obtenir le minimum minimorum.

VI. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

61. Considérons un système quelconque de n plans $x_1=0, \ldots, x_n=0$ se coupant en un point quelconque, et prenons-les pour plans coordonnés. La distance de deux points, ayant pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $x'_1, \ldots, x'_n$ sera donnée, comme on l'a vu, par une formule quadratique

$$(91) \qquad (x_1-x'_1)^2+\ldots+(x_n-x'_n)^2+2a_{12}(x_1-x'_1)(x_2-x'_2)+\ldots=0.$$

Posant $a_{12}=a_{21}$ et introduisant pour la symétrie de nouveaux coefficients $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ égaux à l'unité, on pourra mettre l'expression (91) sous la forme

$$f(x_1-x'_1, \ldots, x_n-x'_n)=\sum a_{rs}(x_r-x'_r)(x_s-x'_s)=0.$$

D'ailleurs cette expression ne peut s'annuler sans qu'on ait identiquement $x_1-x'_1=\ldots=x_n-x'_n=0$. Donc la forme f est définie et positive. Il faudra, pour que cela ait lieu, que le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

et ses mineurs de tous les ordres pris par rapport aux coefficients diagonaux,

$$\frac{dD}{da_{rr}}, \frac{d^2D}{da_{rr}da_{ss}}, \ldots,$$

soient positifs.

Ces conditions sont la généralisation de ces propositions de géométrie : *Dans tout trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des autres; et la somme des faces est moindre que quatre droits.*

Nous allons maintenant montrer que *les angles mutuels de tous les multiplans formés avec les plans $x_1, \ldots, x_n$ s'expriment au moyen du déterminant* D *et de ses mineurs.*

Nous supposerons, pour abréger l'écriture, que l'on a $n=4$.

62. 1° *Angle des deux droites $x_2=x_3=x_4=0$ et $x_3=x_4=x_1=0$.*

Soient $x_1, 0, 0, 0$ les coordonnées d'un point p de la première droite,

$0, \xi_2, 0, 0$ celles de sa projection q, sur la seconde, ξ_2 sera déterminé par la condition que

$$\Delta^2 = x_1^2 + \xi_2^2 - 2a_{12}x_1\xi_2,$$

carré de la distance des deux points p et q, soit minimum. On aura donc

$$\xi_2 = a_{12}x_1.$$

Cette valeur réduira l'expression de Δ^2 à $(1 - a_{12}^2)x_1^2$.

Cela posé, désignons par [234.341] l'angle des deux droites. Nous avons vu (50) que l'on aura

$$\sin^2[234.341] = \frac{\Delta^2}{x_1^2} = 1 - a_{12}^2,$$

et par suite

$$\cos[234.341] = \pm a_{12}.$$

Le choix du signe à donner à ce cosinus est tout à fait arbitraire; mais il peut être fixé par une convention. Nous le considérerons comme positif ou négatif, suivant qu'un point situé sur la partie positive de l'axe des x_1 se projette sur la partie positive ou sur la partie négative de l'axe des x_2. D'après cette convention, on aura

$$\cos[234.341] = a_{12}. \tag{92}$$

63. 2° *Angle de la droite* $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ *avec le biplan* $x_4 = x_1 = 0$.

Désignons cet angle par le symbole [234.41]. Soit $(x_1, 0, 0, 0)$ un point de la droite, $(0, \xi_2, \xi_3, 0)$ sa projection sur le biplan; ξ_2, ξ_3 devront rendre minimum la distance

$$\Delta_1^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 - 2a_{12}x_1\xi_2 - 2a_{13}x_1\xi_3,$$

d'où les équations de condition

$$\begin{aligned} a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 - a_{12}x_1 &= 0, \\ a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 - a_{13}x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations donneront, en remarquant que $a_{23} = a_{32}$, les valeurs suivantes de ξ_2, ξ_3,

$$\xi_2 = -\frac{\dfrac{d^2D}{da_{13}da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1, \quad \xi_3 = -\frac{\dfrac{d^2D}{da_{12}da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}x_1.$$

D'ailleurs en les multipliant respectivement par ξ_2, ξ_3 et les retranchant ensuite de Δ_1^2, il viendra

$$\Delta_1^2 = a_{11}x_1^2 - (a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3)\,x_1$$
$$= \frac{a_{11}\dfrac{d^2\mathrm{D}}{da_{11}da_{44}} + a_{12}\dfrac{d^2\mathrm{D}}{da_{12}da_{44}} + a_{13}\dfrac{d^2\mathrm{D}}{da_{13}da_{44}}}{\dfrac{d^2\mathrm{D}}{da_{11}da_{44}}}\,x_1^2 = \frac{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{44}}}{\dfrac{d^2\mathrm{D}}{da_{11}da_{44}}}\,x_1^2,$$

d'où

$$\sin^2[234.41] = \frac{\Delta_1^2}{x_1^2} = \frac{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{44}}}{\dfrac{d^2\mathrm{D}}{da_{11}da_{44}}}. \tag{93}$$

64. 3° *Angle de la droite $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ avec le plan $x_1 = 0$.* Nous désignerons cet angle par [234.1].

Le point $(x_1, 0, 0, 0)$ aura pour projection sur ce plan un point $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, où ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont choisis de manière à rendre minimum l'expression

$$\Delta_2^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 - 2a_{12}x_1\xi_2 - \ldots + 2a_{23}\xi_2\xi_3 + \ldots.$$

Ils satisferont donc aux relations

$$\left\{\begin{array}{l} a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4 - a_{12}\xi_1 = 0, \\ a_{23}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + a_{34}\xi_4 - a_{13}\xi_1 = 0, \\ a_{24}\xi_2 + a_{34}\xi_3 + a_{44}\xi_4 - a_{14}\xi_1 = 0. \end{array}\right. \tag{94}$$

Ces équations donneront

$$\xi_2 = -\frac{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{12}}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}}}, \quad \xi_3 = -\frac{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{13}}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}}}, \quad \xi_4 = -\frac{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{14}}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}}}. \tag{95}$$

D'ailleurs en multipliant les équations (85) respectivement par ξ_2, ξ_3, ξ_4 et les retranchant de Δ_2^2, il viendra

$$\Delta_2^2 = a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1\xi_2 - a_{13}x_1\xi_3 - a_{14}x_1\xi_4$$
$$= \frac{a_{11}\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}} + a_{12}\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{12}} + a_{13}\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{13}} + a_{14}\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{14}}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}}}\,x_1^2 = \frac{\mathrm{D}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}}}\,x_1^2,$$

et par suite

$$\sin^2[234.1] = \frac{\Delta_2^2}{x_1^2} = \frac{\mathrm{D}}{\dfrac{d\mathrm{D}}{da_{11}}}. \tag{96}$$

65. 4° *Angle du plan $x_1 = 0$ avec le plan $x_4 = 0$.*

Soit [1.4] cet angle. On aura

$$\sin^2[1.4] = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2},$$

Δ_1 étant la distance d'un point quelconque p du plan $x_4 = 0$ à l'intersection des deux plans $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ et Δ_2 sa distance au plan $x_1 = 0$.

Or prenons pour p le point dont les coordonnées sont $x_1,0,0,0$. Nous avons trouvé

$$\Delta_1^2 = \frac{\dfrac{dD}{da_{44}}}{\dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}} x_1^2, \quad \Delta_2^2 = \frac{D}{\dfrac{dD}{da_{11}}},$$

donc

$$\sin^2 [1.4] = \frac{D \dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}{\dfrac{dD}{da_{11}} \dfrac{dD}{da_{44}}}.$$

On en déduit

$$\cos^2 [1.4] = \frac{\dfrac{dD}{da_{11}} \dfrac{dD}{da_{44}} - D \dfrac{d^2D}{da_{11}da_{44}}}{\dfrac{dD}{da_{11}} \dfrac{dD}{da_{44}}}.$$

Or le numérateur de cette expression est égal (Salmon, *Lessons on higher Algebra*, 2e édition, n° 32) à

$$\frac{dD}{da_{14}} \frac{dD}{da_{41}} = \left(\frac{dD}{da_{14}}\right)^2;$$

on aura donc

$$\cos [1.4] = \pm \frac{\dfrac{dD}{da_{14}}}{\sqrt{\dfrac{dD}{da_{11}} \dfrac{dD}{da_{44}}}}. \tag{97}$$

66. Le choix du signe est encore arbitraire dans cette formule. Pour le fixer par une convention convenable, nous remarquerons que le plan $x_1 = 0$ est coupé par le plan $x_4 = 0$ en deux parties distinctes; l'une *positive*, pour laquelle $x_4 > 0$, l'autre *négative*, pour laquelle $x_4 < 0$. De même, le plan $x_1 = 0$ coupera le pan $x_4 = 0$ en deux parties, l'une positive, pour laquelle $x_1 > 0$, l'autre négative, pour laquelle $x_1 < 0$. Cela posé, nous conviendrons de considérer cos [1.4] comme positif, si la partie positive du plan $x_4 = 0$ se projette sur la partie positive du plan $x_1 = 0$; comme négatif dans le cas contraire.

Or nous avons vu que la projection $(0,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ du point $(x_1,0,0,0)$ sur le plan $x_1 = 0$ est donnée par les formules (94). D'ailleurs $\dfrac{dD}{da_{11}}$ est essentiellement positif. Donc cos [1.4] qui a le même signe que $\dfrac{x_1}{\xi_4}$ sera de signe contraire à $\frac{dD}{da_{14}}$. Il faudra donc prendre le signe — dans la formule (97).

67. Si au lieu de quatre variables on n'en avait plus que trois, la formule que nous venons d'écrire deviendrait la formule fondamentale des triangles sphériques, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

68. On peut d'ailleurs obtenir pour cos [1.4] de nouvelles expressions exemptes (en apparence) de radical; on a en effet, d'après la formule (93),

$$\frac{dD}{da_{44}} = \sin^2 [234.41] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}.$$

De même

$$\frac{dD}{da_{11}} = \sin^2 [231.14] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}.$$

Substituant ces valeurs dans (97), il viendra

$$\cos [1.4] = \frac{-\frac{dD}{da_{14}}}{\sin [234.41] \sin [231.14] \frac{d^2D}{da_{11}da_{44}}},$$

formule où les deux sinus devront être pris avec le signe +.

On a d'autre part

$$\frac{dD}{da_{11}} = \frac{D}{\sin^2 [234.1]}, \quad \frac{dD}{da_{44}} = \frac{D}{\sin^2 [123.4]},$$

d'où

$$\cos [1.4] = \frac{-\frac{dD}{da_{14}} \sin [234.1] \sin [123.4]}{D}.$$

69. 5° *Angles du biplan $x_1 = x_2 = 0$ avec le biplan $x_3 = x_4 = 0$.*

La distance Δ_3 d'un point $(x_1, x_2, 0, 0)$ du premier biplan à sa projection $(0, 0, \xi_3, \xi_4)$ sur le second sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}\Delta_3^2 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{34}\xi_3\xi_4 \\ - 2a_{13}x_1\xi_3 - 2a_{14}x_1\xi_4 - 2a_{23}x_2\xi_3 - 2a_{24}x_2\xi_4,\end{aligned}$$

où ξ_3 et ξ_4 seront déterminés par les équations de condition

$$(98) \qquad \left\{\begin{aligned} a_{33}\xi_3 + a_{23}\xi_4 - a_{13}x_1 - a_{23}x_2 = 0, \\ a_{23}\xi_3 + a_{44}\xi_4 - a_{14}x_1 - a_{24}x_2 = 0,\end{aligned}\right.$$

lesquelles, multipliées par ξ_3 et ξ_4 et retranchées de l'expression de Δ_3^2, la réduiront à la forme

$$(99) \qquad \Delta_3^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 - a_{13}x_1\xi_3 - a_{14}x_1\xi_4 - a_{23}x_2\xi_3 - a_{24}x_2\xi_4.$$

Posant d'ailleurs pour abréger

$$\mathcal{A} = \frac{d^2D}{da_{13}da_{22}} = -\frac{d^2D}{da_{12}da_{23}}, \quad \mathcal{B} = \frac{d^2D}{da_{23}da_{11}} = -\frac{d^2D}{da_{21}da_{13}},$$
$$\mathcal{C} = \frac{d^2D}{da_{14}da_{22}} = -\frac{d^2D}{da_{12}da_{24}}, \quad \mathcal{D} = \frac{d^2D}{da_{24}da_{11}} = -\frac{d^2D}{da_{21}da_{14}},$$
$$\mathcal{E} = \frac{d^2D}{da_{11}da_{22}} = -\frac{d^2D}{da_{12}da_{21}}.$$

Les équations (98) donneront

$$\xi_3 = -\frac{\mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}x_2}{\mathcal{E}}, \quad \xi_4 = -\frac{\mathcal{C}x_1 + \mathcal{D}x_2}{\mathcal{E}},$$

valeurs qui substituées dans (99) donneront

$$\Delta_3^2 = \frac{Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2}{\mathcal{E}},$$

où l'on a

$$M = a_{11}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{A} + a_{14}\mathcal{C} = \frac{dD}{da_{22}}, \quad P = \frac{dD}{da_{11}},$$
$$2N = 2a_{12}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{B} + a_{23}\mathcal{A} + a_{14}\mathcal{D} + a_{24}\mathcal{C}$$
$$= a_{12}\mathcal{E} + a_{13}\mathcal{B} + a_{14}\mathcal{D} + a_{21}\mathcal{E} + a_{23}\mathcal{B} + a_{24}\mathcal{C}$$
$$= -\frac{dD}{da_{21}} - \frac{dD}{da_{12}} = -2\frac{dD}{da_{12}}.$$

D'autre part, la distance Δ_4 du point $(x_1, x_2, 0, 0)$ à l'origine des coordonnées, intersection des deux biplans considérés sera donnée par la formule

$$\Delta_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2,$$

et les carrés des sinus des angles cherchés seront donnés par les maxima et minima de la formule

$$\frac{\Delta_3^2}{\Delta_4^2} = \frac{Mx_1^2 + 2Nx_1x_2 + Px_2^2}{\mathcal{E}(x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + x_2^2)} = \frac{\Phi}{\Psi}.$$

Les valeurs du rapport $\frac{x_1}{x_2}$ qui rendent minimum cette expression seront données par les formules

$$(100) \quad \begin{cases} Mx_1 + Nx_2 = \rho\,\mathcal{E}(x_1 + a_{12}x_2), \\ Nx_1 + Px_2 = \rho\,\mathcal{E}(a_{12}x_1 + x_2), \end{cases}$$

ρ étant un facteur constant qui doit être choisi de telle sorte que les deux équations (90) se réduisent à une seule. On aura donc

$$\begin{vmatrix} M-\mathcal{E}\rho & N-a_{12}\mathcal{E}\rho \\ N-a_{12}\mathcal{E}\rho & P-\mathcal{E}\rho \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs les équations (100) respectivement multipliées par x_1 et x_2 et ajoutées ensemble donneront

$$\Phi = \rho\Psi.$$

Donc les maxima et minima cherchés de l'expression $\frac{\Phi}{\Psi}$ seront les racines de l'équation en ρ.

VII. CINÉMATIQUE.

70. Nous appellerons *mouvement* d'un corps dans l'espace l'opération qui consiste à opérer sur les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de chacun de ses points la substitution

$$(101) \qquad \Sigma = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \alpha_1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & a_{n1}x_n + \ldots + a_{nn}x_n + \alpha_n \end{vmatrix},$$

$a_{11}, .., a_{nn}$ étant les coefficients d'une substitution orthogonale ayant pour déterminant $+1$.

Si la substitution se réduit à

$$(102) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \alpha_1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & x_n + \alpha_n \end{vmatrix},$$

elle représentera une *translation*.

Si elle laisse immobile un point, elle représentera une *rotation autour de ce point;* si elle laisse immobiles tous les points d'un k-plan, ce sera une *rotation autour de ce k-plan.*

71. Il est clair que *le mouvement général représenté par les équations* (101) *se décompose en deux autres* : 1° *Une rotation autour de l'origine*

$$(103) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots & \ldots \\ x_n & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{vmatrix};$$

2° *La translation* (102).

Il est clair que *cette translation peut elle-même se décomposer en une infinité de translations successives infiniment petites opérées suivant la même direction.*

Nous allons montrer d'autre part que *la rotation* (103) *se décompose elle-même en une infinité de rotations infiniment petites.*

72. La chose est évidente s'il s'agit d'une rotation autour d'un des biplans coordonnés, tel que $x_1=0$, $x_2=0$; car deux mouvements de cette espèce,

$$(104)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1\cos\alpha+x_2\sin\alpha \\ x_2 & -x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha \\ x_3 & x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

et

$$(104)\qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_1\cos\beta+x_2\sin\beta \\ x_2 & -x_1\sin\beta+x_2\cos\beta \\ x_3 & x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

étant opérés successivement, donnent pour mouvement résultant le suivant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1\cos(\alpha+\beta)+x_2\sin(\alpha+\beta) \\ x_2 & -x_1\sin(\alpha+\beta)+x_2\cos(\alpha+\beta) \\ x_3 & x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Soit donc m un entier très-grand. Le mouvement (104) s'obtiendra en répétant m fois le mouvement très-petit

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1\cos\frac{\alpha}{m}+x_2\sin\frac{\alpha}{m} \\ x_2 & -x_1\sin\frac{\alpha}{m}+x_2\cos\frac{\alpha}{m} \\ x_3 & x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

73. Nous allons maintenant montrer : 1° que *toute rotation autour d'un ρ-plan,* tel que $x_1=\ldots=x_\rho=0$ (et, par suite, en faisant $\rho=n$, toute rotation autour de l'origine), *résulte de la combinaison de rotations autour des biplans coordonnés ;* 2° *que parmi les rotations autour de ce ρ-plan, il en est une qui remplace x_1 par $a_{11}x_1+\ldots+a_{1\rho}x_\rho$, quels que soient $a_{11},\ldots,a_{1\rho}$, pourvu qu'ils satisfassent à l'unique condition*

$$a_{11}^2+\ldots+a_{1\rho}^2=1.$$

Cela est évident pour les rotations autour d'un biplan.

Supposons que ce soit prouvé pour les rotations autour d'un ρ-plan; nous allons voir que ce sera encore vrai pour les rotations autour d'un $\rho+1$-plan.

On aura par hypothèse une substitution orthogonale de la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + \dots + a_{1\varrho}x_\varrho \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_\varrho & a_{\varrho 1}x_1 + \dots + a_{\varrho\varrho}x_\varrho \\ x_{\varrho+1} & x_{\varrho+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

dérivée des substitutions analogues à (104), $a_{11}, \dots, a_{\varrho 1}$ étant assujettis à cette seule condition

$$a_{11}^2 + \dots + a_{\varrho 1}^2 = 1.$$

Combinant cette substitution avec la suivante

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \cos\alpha + x_{\varrho+1} \sin\alpha \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{\varrho+1} & -x_{\varrho+1} \sin\alpha + x_{\varrho+1} \cos\alpha \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix},$$

on aura comme résultante une substitution autour du $\rho+1$-plan $x_1 = \dots = x_{\varrho+1} = 0$, laquelle remplacera x_1 par $a_{11} \cos\alpha\, x_1 + \dots + a_{1\varrho} \cos\alpha\, x_\varrho + \sin\alpha\, x_{\varrho+1}$, expression dont les coefficients seront évidemment assujettis à la seule condition

$$(a_{11} \cos\alpha)^2 + \dots + (a_{1\varrho} \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Soit maintenant U une rotation quelconque effectuée autour du $\rho+1$-plan $x_1 = \dots = x_{\varrho+1} = 0$; $b_{11}x_1 + \dots b_{1,\varrho+1}x_{\varrho+1}$ l'expression par laquelle elle remplace x_1; on pourra choisir S et T de telle sorte qu'on ait $a_{11}\cos\alpha = b_{11}$, ..., $a_{1\varrho} \cos\alpha = b_{1\varrho}$, $\sin\alpha = b_{1,\varrho+1}$; cela fait, on aura U=STV, V étant une nouvelle substitution qui n'altérera plus x_1. Donc V sera une rotation autour du ρ-plan $x_2 = \dots = x_{\varrho+1} = 0$ et pourra s'obtenir, par hypothèse, en combinant ensemble des rotations autour des biplans coordonnés.

74. On obtient aisément la forme générale des substitutions linéaires orthogonales infiniment voisines de l'unité. Posons en effet dans les équations de l'orthogonalité

$$(105) \qquad a_{1\varrho}^2 + \dots + a_{n\varrho}^2 = 1,$$

$$(106) \qquad a_{1\varrho}a_{1\sigma} + \dots + a_{n\varrho}a_{n\sigma} = 0,$$

$$a_{\varrho\varrho} = 1 + \varepsilon_{\varrho\varrho}, \quad a_{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\varrho\sigma},$$

$\varepsilon_{\varrho\varrho}$ et $\varepsilon_{\varrho\nu}$ étant des quantités très-petites, dont on puisse négliger les produits et les carrés. Les équations (105) et (106) donneront $\varepsilon_{\varrho\varrho} = 0$, $\varepsilon_{\varrho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\varrho} = 0$, ce qui donnera pour l'expression générale des rotations infiniment petites la suivante

$$(107) \qquad S = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \varepsilon_{12}x_2 + \dots \\ x_2 & -\varepsilon_{12}x_1 + x_2 + \dots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}.$$

En particulier, une rotation infiniment petite autour du biplan (x_1,x_2) sera de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & x_1+\varepsilon x_2 \\ x_2 & -\varepsilon x_1+x_2 \\ x_3 & x_3 \\ \cdots & \cdots \end{array}\right|.$$

75. Pour pénétrer plus avant dans la nature des mouvements que l'on peut exécuter dans l'espace, il importe de simplifier leur expression par un changement de coordonnées convenable. Mais avant de traiter cette question, il convient de dire quelques mots des substitutions linéaires générales, dont les substitutions orthogonales que nous considérons ici ne sont qu'un cas particulier.

Soit

$$S=\left|\begin{array}{ll} x_1 & a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \\ \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n \end{array}\right|$$

une substitution linéaire. Elle multipliera la fonction linéaire

$$y=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$$

par un facteur constant s, si l'on a les équations

$$(108)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{11}c_1+\ldots+a_{n1}c_n=sc_1, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}c_1+\ldots+a_{nn}c_n=sc_n. \end{array}\right.$$

Pour pouvoir satisfaire à ces équations sans annuler à la fois $c_1,\ldots,c_n$, il faudra que l'on ait

$$(109)\qquad \left|\begin{array}{ccc} a_{11}-s & \ldots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn}-s \end{array}\right|=0.$$

Cette équation donnera, pour s, n valeurs généralement distinctes $s_1,\ldots,s_n$ (nous laissons de côté le cas des racines égales, qui sort de notre sujet actuel ; il peut d'ailleurs se traiter par des procédés semblables à ceux que nous avons exposés tout au long dans notre *Traité des substitutions*, liv. II, chap. II, pour une question analogue). Ces valeurs étant substituées successivement dans les équations (108), elles détermineront les rapports des quantités $c_1,\ldots,c_n$. On obtiendra donc n fonctions

$$y_1=c_{11}x_1+\ldots+c_{1n}x_n,\ \ldots,\ y_n=c_{n1}x_1+\ldots+c_{nn}x_n,$$

que S multiplie respectivement par $s_1, \ldots, s_n$. En les prenant pour variables indépendantes à la place de $x_1, \ldots, x_n$, on donnera à S la forme canonique

$$(110) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & s_1 y_1 \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ y_n & s_n y_n \end{vmatrix}.$$

On voit par ce qui précède que cette forme canonique est unique. Pour que deux substitutions S et S′ soient transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, il sera évidemment nécessaire et suffisant qu'elles aient la même forme canonique. Donc, l'équation en s qui détermine les coefficients de la forme canonique doit être la même pour S que pour S′. Les n coefficients de cette équation seront autant d'*invariants*, dont les valeurs caractériseront ce qui, dans la substitution considérée, est permanent et indépendant du choix des indices.

76. Les invariants de la substitution S satisfont à des équations différentielles partielles, qu'il est aisé d'établir.

Soit $\varphi(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ un de ces invariants; si S, transformé par une substitution linéaire quelconque T, prend la forme

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a'_1 x_{11} + \ldots + a'_{1n} x_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n & a'_{n1} x_1 + \ldots + a'_{nn} x_n \end{vmatrix},$$

on aura la condition

$$(111) \qquad \varphi(a'_{11}, \ldots, a'_{nn}) = \varphi(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Supposons que T soit une substitution infiniment voisine de l'unité et de la forme

$$(112) \qquad \begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_{\rho-1} & x_1, \ldots, x_{\rho-1} \\ x_\rho & x_\rho + \varepsilon x_\sigma \\ x_{\rho+1}, \ldots, x_n & x_{\rho+1}, \ldots, x_n \end{vmatrix},$$

ε étant très-petit; il viendra

$$\begin{aligned} a'_{pq} &= a_{pq} && \text{si } p \gtrless \rho,\ q \gtrless \sigma \\ a'_{p\sigma} &= a_{p\sigma} - \varepsilon a_{p\rho} && \text{si } p \gtrless \rho, \\ a'_{\rho q} &= a_{\rho q} + \varepsilon a_{\sigma q} && \text{si } q \gtrless \sigma, \\ a_{\rho\sigma} &= a_{\rho\sigma} + \varepsilon a_{\sigma\sigma} - \varepsilon a_{\rho\rho} - \varepsilon^2 a_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (111) et négligeant le carré de ε, il viendra

$$-\sum_p \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\rho} + \sum_q \frac{d\varphi}{da_{\rho q}} a_{\sigma q} + \frac{d\varphi}{da_{\rho\sigma}} (a_{\sigma\sigma} - a_{\rho\rho}) = 0,$$

expression qui prendra la forme plus simple

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\rho} = \sum \frac{d\varphi}{da_{\rho q}} a_{\sigma q},$$

en supprimant les restrictions $p \lesseqgtr \rho$, $q \lesseqgtr \sigma$.

En faisant varier ρ et σ, on obtiendra une suite d'équations analogues, qui suffiront à exprimer que φ est invariable par les substitutions linéaires de déterminant 1 ; car on sait que toute substitution de cette sorte s'obtient en combinant des substitutions analogues à (112).

77. Pour que φ soit invariable par toute transformation linéaire, il faudra de plus qu'il ne change pas, lorsque la transformante sera de la forme

$$\begin{vmatrix} x_1, \ldots, x_{\rho-1} & x_1, \ldots, x_{\rho-1} \\ x_\rho & (1+\varepsilon)x_\rho \\ x_{\rho+1}, \ldots, x_n & x_{\rho+1}, \ldots, x_n \end{vmatrix}.$$

Mais on aura alors

$$\begin{aligned} a'_{pq} &= a_{pq} \text{ si } p \gtrless \rho, q \gtrless \rho \text{ ou si } p = q = \rho, \\ a'_{\rho p} &= (1 = \varepsilon) a_{\rho p}, \\ a'_{p\rho} &= \frac{1}{1+\varepsilon} a_{p\rho}, \end{aligned}$$

et l'équation (111) donnera l'équation différentielle

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{\rho p}} = \sum \frac{d\varphi}{da_{p\rho}}.$$

78. Si l'on veut que la substitution U, qui transforme S en S', soit non-seulement linéaire, mais orthogonale, on aura $\frac{n(n-1)}{2}$ nouvelles équations de condition, exprimant que *les carrés des cosinus des angles mutuels des plans*

$$y_1 = 0, \ldots, y_n = 0,$$

sont égaux à ceux des plans

$$y'_1 = 0, \ldots, y'_n = 0,$$

auxquels il faut rapporter S' *pour la ramener à sa forme canonique.*

En effet, s'il existe des variables $x'_1, \ldots, x'_n$ liées orthogonalement à $x_1, \ldots, x_n$, et telles que S', rapporté à ces nouvelles variables, ait la même forme que S rapporté à $x_1, \ldots, x_n$; S', rapporté aux variables

$$y'_1 = c_{11}x'_1 + \ldots + c_{1n}x'_n, \ldots, y'_n = c_{n1}x'_1 + \ldots + c_{nn}x'_n,$$

aura la forme canonique (110). D'ailleurs le système d'axes $x'_1, \ldots, x'_n$ étant orthogonal comme le système $x_1, \ldots, x_n$, les carrés des cosinus des angles mutuels des plans $y'_1, \ldots, y'_n$ seront évidemment donnés par les mêmes formules que ceux des plans $y_1, \ldots, y_n$.

Réciproquement, si les carrés des cosinus des angles des plans $y'_1, \ldots, y'_n$ sont égaux à ceux des plans $y_1, \ldots, y_n$, il est clair que ceux de $x'_1, \ldots, x'_n$ sont égaux à ceux de $x_1, \ldots, x_n$. Ils seront donc nuls, et les axes $x'_1, \ldots, x'_n$ rectangulaires ; et la substitution

$$| \; x_1, \ldots, x_n \quad x'_1, \ldots, x'_n \; | ,$$

par laquelle on passe de S′ à S, sera orthogonale.

Si donc on se borne à des transformations orthogonales, S aura, outre les n invariants précédemment trouvés, $\frac{n(n-1)}{2}$ invariants orthogonaux, donnés par la formule

$$\cos^2(y_r, y_s) = \frac{(c_{r1}c_{\rho 1} + \ldots + c_{rn}c_{\rho n})^2}{(c_{r1}^2 + \ldots + c_{rn}^2)(c_{\rho 1}^2 + \ldots + c_{\rho n}^2)} .$$

Les coefficients c, qui figurent dans ces invariants, dépendent des irrationnelles s_r, s_ρ ; mais on pourra remplacer ces invariants irrationnels par les coefficients de l'équation qui les détermine, lesquels sont symétriques en $s_1, \ldots, s_n$ et par suite rationnels.

79. Les invariants orthogonaux satisfont aux équations différentielles suivantes

$$\sum \frac{d\varphi}{da_{p\sigma}} a_{p\rho} - \sum \frac{d\varphi}{da_{p\rho}} a_{p\sigma} = \sum \frac{d\varphi}{da_{\rho q}} a_{\sigma q} - \sum \frac{d\varphi}{da_{\sigma q}} a_{\rho q} .$$

On les obtiendra aisément en exprimant qu'ils ne sont pas altérés lorsqu'on transformera S par une rotation infiniment petite autour de l'un quelconque des biplans coordonnés. Mais ces équations différentielles ne suffiront pas pour caractériser complétement l'invariance. Car elles expriment seulement que φ ne varie pas lorsqu'on transforme S par une substitution orthogonale de déterminant 1. Il faut encore exprimer que φ ne change pas lorsqu'on transforme x par une substitution orthogonale de déterminant -1 ; par exemple, lorsqu'on change le signe de l'une des variables.

80. Supposons maintenant que la substitution S soit orthogonale, et admettons, pour fixer les idées, que l'équation caractéristique en s ait une racine réelle s_1. Le plan $y_1 = 0$ sera réel, et l'on pourra trouver un système de n plans orthogonaux $y_1 = 0$, $x'_2 = 0, \ldots, x'_n = 0$ dont il fasse partie. En les prenant pour plans coordonnés, S prendra la forme

$$\left| \begin{array}{ll} y_1 & s_1 y_1 \\ x'_2 & a'_{21}y_1 + a'_{22}x'_2 + \ldots + a'_{2n}x'_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n & a'_{n1}y_1 + a'_{2n}x'_2 + \ldots + a'_{nn}x'_n \end{array} \right| ,$$

et comme elle n'a pas cessé d'être orthogonale, on aura

$$s_1^2 = 1,\quad s_1^2 + a'^2_{21} + \ldots + a'^2_{n1} = 1,$$

d'où

$$s_1 = \pm 1,\quad a'_{21} = \ldots = a'_{n1} = 0,$$

et l'équation caractéristique de S deviendra

$$(s - s_1)\begin{vmatrix} a'_{22} - s & \ldots & a'_{2n} \\ a'_{n2} & \ldots & a'_{nn} - s \end{vmatrix} = 0.$$

81. Admettons, pour fixer les idées, que le dernier déterminant que nous venons d'écrire, égalé à zéro, admette une racine imaginaire $s_2 = p + qi$; il admettra également sa conjuguée $s_3 = p - qi$; et si $X_2 = Z_2 + iZ_3$ est la fonction imaginaire de $x'_2, \ldots, x'_n$ que S multiplie par s_2, la fonction conjuguée $X_3 = Z_2 - iZ_3$ sera évidemment multipliée par s_3. Donc S remplacera les fonctions réelles Z_2 et Z_3 par $pZ_2 - qZ_3$ et $qZ_2 + pZ_3$.

Cela posé, on peut déterminer dans le biplan $Z_2 = Z_3 = 0$ deux plans rectangulaires $z_2 = \lambda Z_2 + \mu Z_3 = 0$, $z_3 = \lambda' Z_2 + \mu' Z_3 = 0$, et la substitution S remplacera z_2, z_3 par des fonctions de Z_2, Z_3, lesquelles pourront s'exprimer en fonction de z_2 et z_3.

Prenons maintenant pour plans coordonnés, au lieu de $x'_2, \ldots, x'_n$, les plans $z_2 = 0, z_3 = 0$ et $n - 3$ plans rectangulaires $x''_4 = \ldots = x''_n = 0$ situés dans le $n - 3$-plan perpendiculaire au triplan $y_1 = z_2 = z_3 = 0$. La substitution S prendra la forme

$$\begin{vmatrix} y_1 & \mp y_1 \\ z_2 & tz_2 + sz_3 \\ z_3 & tz_2 + uz_3 \\ x''_4 & a''_{42}z_2 + a''_{43}z_3 + a''_{44}x''_4 + \ldots + a''_{4n}x''_n \\ \ldots & \ldots \\ x''_n & a''_{n2}z_2 + a''_{n3}z_3 + a''_{n4}x''_4 + \ldots + a''_{nn}x''_n \end{vmatrix},$$

et comme elle est orthogonale, on aura

$$r^2 + s^2 = 1,\quad t^2 + u^2 = 1,\quad rt + su = 0,$$
$$r^2 + t^2 + a''^2_{42} + \ldots + a''^2_{n2} = 1,\quad s^2 + u^2 + a''^2_{43} + \ldots + a''^2_{n3} = 1.$$

On déduit des trois premières équations

$$r = \cos\alpha,\quad s = \sin\alpha,\quad t = -\sin\alpha,\quad u = \cos\alpha,$$
$$r^2 + t^2 = s^2 + u^2 = 1,$$

d'où

$$a''_{42} = \ldots = a''_{n2} = a''_{43} = \ldots = a''_{n3} = 0.$$

Cela posé, suivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a''_{44} - s & \ldots & a''_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a''_{44} & \ldots & a''_{nn} - s \end{vmatrix}$$

aura une racine réelle ou un couple de racines imaginaires, on appliquera de nouveau à S un des deux modes de réduction ci-dessus. Poursuivant ainsi, on arrivera finalement à mettre S sous une forme telle que la suivante, où nous changeons pour plus de commodité, l'ordre et la désignation des variables

$$S=\left|\begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1\cos\alpha_1+y_2\sin\alpha_1, \; -y_1\sin\alpha_1+y_2\cos\alpha_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2\rho-1}, y_{2\rho} & y_{2\rho-1}\cos\alpha_\rho+y_{2\rho}\sin\alpha_\rho, \; -y_{2\rho-1}\sin\alpha_\rho+y_{2\rho}\cos\alpha_\rho \\ y_{2\rho+1},\ldots, y_{2\rho+\sigma} & -y_{2\rho+1},\ldots,-y_{2\rho+\sigma} \\ y_{2\rho+\sigma+1}, y_n & y_{2\rho+\sigma+1},\ldots,y_n \end{array}\right|.$$

Le déterminant de la substitution ci-dessus est évidemment égal à $(-1)^\sigma$; et comme il est égal à 1, par hypothèse, σ sera un nombre pair $2\sigma'$

82. Cela posé, admettons d'abord que n soit un nombre pair 2μ ; $\tau=2\mu$. Si l'on a $\sigma=0, \tau=0$, S sera de la forme

$$(113)\quad S=\left|\begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1\cos\alpha_1+y_2\sin\alpha_1, \; -y_1\sin\alpha_1+y_2\cos\alpha_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1}\cos\alpha_\mu+y_{2\mu}\sin\alpha_\mu, \; -y_{2\mu-1}\sin\alpha_\mu+y_{2\mu}\cos\alpha_\mu \end{array}\right|,$$

laquelle forme générale contient comme cas particulier celui où l'on aurait $\sigma=2\sigma'$, $\tau=2\tau'$. Il suffirait en effet, pour obtenir la substitution relative à ce cas, de poser dans l'expression précédente

$$(114)\qquad \alpha_{\mu-\sigma'-\tau'}=\ldots=\alpha_{\mu-\tau'}=\pi,\quad \alpha_{\mu-\tau'+1}=\ldots=\alpha_\mu=0.$$

Si n est un nombre impair $2\mu+1, \tau=2\mu+1-2\rho-2\sigma'$ sera impair, et l'on aura, en supposant $\sigma=0, \tau=1$,

$$(115)\quad S=\left|\begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1\cos\alpha_1+y_2\sin\alpha_1, \; -y_1\sin\alpha_1+y_2\cos\alpha_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1}\cos\alpha_\mu+y_{2\mu}\sin\alpha_\mu, \; -y_{2\mu-1}\sin\alpha_\mu+y_{2\mu}\cos\alpha_\mu \\ y_{2\mu+1} & y_{2\mu+1} \end{array}\right|.$$

Et la formule relative au cas où l'on aurait $\sigma=2\sigma', \tau=2\tau'+1$ s'obtiendra encore comme cas particulier de la précédente, en y faisant les suppositions (114).

83. Les expressions canoniques (113) et (115), auxquelles a été ramenée la substitution S, donnent immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Dans l'espace à 2μ dimensions, toute rotation autour d'un point est la résultante de μ rotations effectuées autour de μ biplans rectangulaires $x_1=x_2=0,\ldots, x_{2\mu-1}=x_{2\mu}=0$ passant par ce point.*

Théorème II. — *Dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, toute rotation autour d'un point est une rotation autour d'une droite $x_1=\ldots=x_{2\mu}=0$ passant par ce point, et sera la résultante de μ rotations effectuées autour de μ biplans rectangulaires $x_1=x_2=0,\ldots, x_{2\mu-1}=x_{2\mu}=0$ passant par cette droite.*

Les μ biplans ainsi définis seront dits les biplans *principaux* de la substitution considérée. On peut d'ailleurs évidemment, sans altérer la forme canonique de S, choisir à volonté dans chacun de ces biplans les deux plans rectangulaires que l'on prendra pour plans coordonnés.

84. Le théorème que, dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, toute rotation autour d'un point s'opère autour d'une droite a été déjà donné par M. Schläfli (*Journal de Crelle*, t. 65). L'auteur signale également l'existence de μ invariants dans la substitution orthogonale. Mais il ne nous paraît pas avoir établi que ces invariants sont les seuls ; et il ne donne pas la réduction de la substitution à sa forme canonique, laquelle nous semble indispensable pour se rendre un compte bien net de la nature de ces invariants.

85. Il est aisé *d'exprimer les cosinus des angles* $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ *en fonction des invariants de la substitution* S.

En effet, supposons d'abord qu'il s'agisse d'un espace à 2μ dimensions. L'équation caractéristique (109) deviendra, en y supposant S ramenée à la forme canonique (113),

$$0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 - s & \sin\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \dots \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 - s & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 - s & \sin\alpha_2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 - s & 0 \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$= (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \dots (s^2 - 2s\cos\alpha_n + 1).$$

Comparant cette forme réduite à la forme générale

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = f(s) = s^{2\mu} + A_1 s^{2\mu-1} + \dots + A_{2\mu},$$

et posant, pour abréger,

$$B_1 = \sum_r \cos\alpha_r,\quad B_2 = \sum_{r,r'} \cos\alpha_r \cos\alpha_{r'},\quad \dots,$$

il vient

$$(116)\qquad \begin{cases} A_1 = -2B_1, \\ A_2 = 4B_2 + n, \\ A_3 = -8B_3 - 2(n-1)B_1, \\ \dots\dots\dots, \\ A_m = \sum (-2)^{m-2\rho} \dfrac{(n-m+2\rho)\dots(n-m+\rho+1)}{1.2\dots\rho} B_{m-2\rho}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

la sommation s'étendant depuis $\rho = 0$ jusqu'à $\rho = \frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ suivant que m est pair ou impair.

En renversant les relations (116), on obtiendra $B_1, \ldots, B_\mu$ en fonction des invariants $A_1, \ldots, A_{2\mu}$. D'ailleurs $B_1, \ldots, B_\mu$ sont les coefficients d'une équation du degré μ, dont $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_\mu$ sont les racines.

S'il s'agit d'un espace à $2\mu+1$ dimensions, S aura la forme canonique (115) qui a pour équation caractéristique

$$\begin{aligned} 0 &= (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1)\ldots(s^2 - 2s\cos\alpha_{2\mu} + 1)(1-s) \\ &= (s^{2\mu} + A_1 s^{2\mu-1} + \ldots + A_{2\mu})(1-s), \end{aligned}$$

les coefficients $A_1, \ldots, A_{2\mu}$ étant définis par les relations (116).

En comparant cette équation à l'équation générale

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11}-s & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = f(s) = -s^{2\mu+1} + C_1 s^{2\mu} + \ldots + C_{2\mu+1},$$

on aura les invariants $C_1, \ldots, C_{2\mu+1}$ exprimés par les relations

$$C_1 = 1 - A_1, \ldots, C_m = A_m - A_{m-1}.$$

Donc, ici encore, les invariants s'exprimeront en fonction de $B_1, \ldots, B_{2\mu}$ et réciproquement.

De ce qui précède, on déduit cette conséquence remarquable :

86. Théorème III. — *Si deux substitutions orthogonales* S, S′ *sont transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, on pourra toujours opérer cette transformation par une substitution orthogonale.*

En effet, si S′ est transformable en S, elle aura les mêmes invariants que S ; donc les quantités $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_\mu$ seront égales aux quantités analogues $\cos\alpha'_1, \ldots, \cos\alpha'_\mu$ que contient la forme canonique de S′. Donc S et S′ auront même forme canonique, au signe près des sinus des angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$. Mais on peut changer à volonté le signe de $\sin\alpha_1$, par exemple, car il suffit de changer le signe d'une des deux coordonnées x_1, x_2 ; changement qui reste sans influence sur l'orthogonalité des axes coordonnés. Donc S et S′ ont même forme canonique, et l'on passera de l'une à l'autre par la substitution orthogonale qui sert à passer des coordonnées rectangulaires $x_1, \ldots, x_n$ aux coordonnées $x'_1, \ldots, x'_n$ également rectangulaires, pour lesquelles S′ est réduite à sa forme canonique.

87. Les substitutions S, S′ seront dites *semblables* ou *inversement semblables*, suivant que la substitution orthogonale qui permet de transformer l'une dans l'autre a pour déterminant $+1$ ou -1.

Il est intéressant de déterminer à quel caractère on pourra distinguer l'une de l'autre ces deux sortes de similitude.

Supposons d'abord $n = 2\mu$, et considérons les deux expressions

$$f(1) = \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & \dots & a_{1,2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2\mu,1} & \dots & a_{2\mu,2\mu} - 1 \end{vmatrix}, \quad f(-1) = \begin{vmatrix} a_{11} + 1 & \dots & a_{1,2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2\mu,1} & \dots & a_{2\mu,2\mu} + 1 \end{vmatrix},$$

qui toutes deux sont des invariants. Leur produit, effectué suivant la règle connue de la multiplication des déterminants, et simplifié à l'aide des équations qui définissent l'orthogonalité, se réduira à

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{21} - a_{12} & a_{31} - a_{13} & \dots \\ -a_{21} + a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ -a_{31} + a_{13} & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, gauche, symétrique, et de degré pair est un carré parfait, que nous pourrons désigner par R^2. Comme c'est d'ailleurs un invariant, la quantité R ne pourra que changer de signe lorsqu'on transformera S par une substitution orthogonale quelconque.

Or, si la substitution orthogonale qui change S en S′ a son déterminant égal à $+1$, elle résultera de la combinaison successive de substitutions infiniment petites. Transformant successivement S par ces substitutions composantes, on ne pourra altérer à chaque fois R que d'une quantité infiniment petite; et comme R doit rester invariable, ou changer de signe, il restera invariable. *On aura donc* $R = R'$, R' étant la fonction analogue à R formée avec les coefficients de S′.

Réciproquement, si $R = R'$, *la substitution qui sert à passer de* S *à* S′ *aura pour déterminant* $+1$. En effet, soit S″ ce que devient S en y changeant le signe de l'une des variables ; la fonction R sera changée en $R'' = -R$; et les substitutions orthogonales par lesquelles on passe de S à S″ ou de S″ à S′ auront pour déterminant -1. La substitution résultante, qui sert à passer de S à S′, aura donc le déterminant $+1$.

Soit maintenant $n = 2\mu + 1$. L'équation $f(s) = 0$ aura une racine égale à 1 ; et l'on pourra trouver une fonction des variables que S n'altère pas. Ses coefficients seront des fonctions rationnelles de $a_{11}, \dots, a_{nn}$, et l'on pourra, par un changement d'indices indépendants qui n'introduit aucune irrationnelle, mettre S sous la forme

$$\begin{vmatrix} x'_1 & b_{11}x'_1 + \dots + b_{1,2\mu}x'_{2\mu} \\ \cdot & \cdot \\ x'_{2\mu} & b_{2\mu,1}x'_1 + \dots + b_{2\mu,2\mu}x'_{2\mu} \\ x'_{2\mu+1} & x'_{2\mu+1} \end{vmatrix},$$

et la quantité $\mathfrak{R}$, formée avec $b_{11}, \dots, b_{2\mu,2\mu}$ comme R l'était tout à l'heure avec $a_{11}, \dots, a_{2\mu,2\mu}$, indiquera par son signe celui du déterminant de la substitution qui transforme S′ en S.

Lorsque la substitution S est mise sous sa forme canonique, on trouve immédiatement

$$R = \sin \alpha_1 \ldots \sin \alpha_\mu .$$

88. La détermination des invariants $B_1, \ldots, B_\mu$ s'obtient d'une manière plus élégante lorsque la rotation S est infiniment petite.

Nous avons vu que S sera de la forme (107) et l'équation en s sera

$$f(s) = \begin{vmatrix} 1-s & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \ldots \\ \varepsilon_{21} & 1-s & \varepsilon_{23} & \ldots \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 1-s & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

avec la condition $\varepsilon_{\rho\sigma} + \varepsilon_{\sigma\rho} = 0$.

Cette équation, développée suivant les puissances de $1 - s = t$, sera de la forme

$$(117) \qquad t^n + s_1 t^{n-1} + \ldots + s_\rho t^{n-\rho} + \ldots = 0,$$

s_ρ désignant la somme des mineurs dérivés du déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \ldots \\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} & \ldots \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

en y supprimant $n - \rho$ colonnes choisies à volonté, et les lignes de même rang. Chacun de ces mineurs étant un déterminant gauche sera nul si ρ est impair, un carré si ρ est pair.

D'autre part, S étant supposé réduit à sa forme canonique, on aura, si $n = 2\mu$,

$$f(s) = (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \ldots (s^2 - 2s\cos\alpha_\mu + 1).$$

Cette expression, égalée à 0, donnera pour s les racines

$$\cos\alpha_1 \pm i\sin\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_\mu \pm i\sin\alpha_\mu,$$

lesquelles se réduiront sensiblement, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ étant très-petits, à

$$1 \pm i\alpha_1, \ldots, 1 \pm i\alpha_\mu.$$

L'équation (117) en t aura donc pour racines $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_\mu$, et, en prenant $-t^2$ pour inconnue, l'équation aura pour racines $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_\mu^2$.

Si $n = 2\mu + 1$, on aura

$$f(s) = (s^2 - 2s\cos\alpha_1 + 1) \ldots (s^2 - 2s\cos\alpha_\mu + 1)(1 - s).$$

L'équation en t aura une racine nulle, que l'on supprimera ; prenant ensuite $-t^2$ pour inconnue, on aura ici encore une équation du degré μ, déterminant $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_\mu^2$.

89. Cherchons maintenant à simplifier l'expression d'un mouvement quelconque, défini par la substitution (101). On prendra d'abord pour axes coordonnés ceux qui réduisent à sa forme canonique la substitution sans termes constants

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{array}\right|.$$

Il est clair que la substitution Σ rapportée à ces nouveaux axes sera de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1 + \delta_1, -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_2 + \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu + \delta_{2\mu-1}, -y_{2\mu-1} \sin\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu + \delta_{2\mu} \end{array}\right|,$$

si $n = 2\mu$, et de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} y_1, y_2 & y_1 \cos\alpha_1 + y_2 \sin\alpha_1 + \delta_1, -y_1 \sin\alpha_1 + y_2 \cos\alpha_1 + \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{2\mu-1}, y_{2\mu} & y_{2\mu-1} \cos\alpha_\mu + y_{2\mu} \sin\alpha_\mu + \delta_{2\mu-1}, -y_{2\mu-1} \sin\alpha_\mu + y_{2\mu} \cos\alpha_\mu + \delta_{2\mu} \\ y_{2\mu+1} & y_{2\mu+1} + \delta_{2\mu+1} \end{array}\right|,$$

si $n = 2\mu + 1$.

Mais on pourra simplifier encore cette expression par un nouveau changement d'axes. En effet, supposons pour fixer les idées que $\alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$ ne soient pas nuls, mais que $\alpha_{\rho+1}, \ldots, \alpha_\mu$ le soient.

Posons $z_1 = y_1 + d_1$, $z_2 = y_2 + d_2$; Σ remplacera z_1, z_2 par

$$z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \sin\alpha'_1 + h_1, \quad -z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_1 + h_2,$$

en posant

$$\begin{aligned} h_1 &= \delta_1 + d_1(1 - \cos\alpha_1) - d_2 \sin\alpha_1, \\ h_2 &= \delta_2 + d_1 \sin\alpha_1 + d_2(1 - \cos\alpha_1), \end{aligned}$$

et l'on pourra déterminer d_1, d_2 de telle sorte que h_1 et h_2 s'annulent, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & 1 - \cos\alpha_1 \end{vmatrix} = 2 - 2\cos\alpha_1$$

étant différent de zéro.

On fera disparaître de même par un changement d'origine les constantes $\delta_3, \ldots, \delta_{2\rho}$.

D'autre part, Σ remplace les variables $y_{2\rho+1}, \ldots, y_n$ par $y_{2\rho+1} + \delta_{2\rho+1}, \ldots, y_n + \delta_n$; elle n'altérera donc pas la fonction

$$\Psi = \lambda_{2\rho+1} y_{2\rho+1} + \ldots + \lambda_n y_n,$$

si l'on a la condition

$$\lambda_{2\rho+1}\delta_{2\rho+1} + \dots + \lambda_n\delta_n = 0.$$

Cette condition détermine une seule des quantités λ en fonction des autres, qui restent arbitraires. Les fonctions de la forme Ψ que Σ n'altère pas, égalées à zéro, détermineront donc un $n-2\rho-1$-plan $P_{n-2\rho-1}$, dans lequel on pourra trouver $n-2\rho-1$ plans rectangulaires $z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1}$, le $n-2\rho$-plan $y_{2\rho+1} = \dots = y_n = 0$ résultera d'ailleurs de l'intersection de $P_{n-2\rho-1}$ avec un dernier plan z_n perpendiculaire aux précédents. Prenant ces plans pour plans coordonnés, au lieu de $y_{2\rho+1}, \dots, y_n$, Σ prendra la forme

$$(118)\qquad \left|\begin{array}{ll} z_1, z_2 & z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_1, \ -z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_1 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ z_{2\rho-1}, z_{2\rho} & z_{2\rho-1} \cos\alpha_\rho + z_{2\rho} \sin\alpha_\rho, \ -z_{2\rho-1} \sin\alpha_\rho + z_{2\rho} \cos\alpha_\rho \\ z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} & z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} \\ z_n & z_n + \delta \end{array}\right|.$$

Donc le mouvement cherché résultera de la combinaison d'un mouvement de rotation autour d'un 2ρ-plan, joint à un mouvement de translation le long d'un axe perpendiculaire. Un semblable mouvement peut s'appeler *hélicoïdal.*

D'ailleurs, si l'on a $\rho = 0$, le mouvement se réduit à une translation ; si $n-2\rho = 0$ ou $n-2\rho > 0$, mais $\delta = 0$, il se réduit à une rotation. On a donc ce théorème :

Tout mouvement est une rotation, ou une translation, ou un mouvement hélicoïdal.

90. Dans l'espace à $2\mu+1$ dimensions, le mouvement hélicoïdal est la règle, et les autres sont des cas particuliers ; car $n-2\rho$ n'est pas nul et δ diffère en général de zéro.

Au contraire, dans l'espace à 2μ dimensions, on a en général $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ différents de zéro, et l'on aura par suite $n-2\rho = 0$, sauf les cas particuliers.

91. Voici enfin deux derniers théorèmes, qui sont la généralisation de ceux qui ont servi de point de départ à M. Chasles dans ses belles recherches sur le déplacement des solides.

Supposons $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho, \delta$ infiniment petits, et négligeons les carrés de ces quantités. Il viendra, pour la représentation canonique d'un mouvement infiniment petit

$$(119)\qquad \left|\begin{array}{ll} z_1, z_2 & z_1 + \alpha_1 z_2, \ -\alpha_1 z_1 + z_2 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ z_{2\rho-1}, z_{2\rho} & z_{2\rho-1} + \alpha_\rho z_{2\rho}, \ -\alpha_\rho z_{2\rho-1} + z_\rho \\ z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} & z_{2\rho+1}, \dots, z_{n-1} \\ z_n & z_n + \delta \end{array}\right|,$$

et soient $\Delta\zeta_1, \ldots, \Delta\zeta_n$ les accroissements des coordonnées du point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Le plan mené par ce point normalement au déplacement aura pour équation

$$\begin{aligned}0 &= (z_1 - \zeta_1)\Delta\zeta_1 + \ldots + (z_n - \zeta_n)\Delta\zeta_n \\ &= (z_1 - \zeta_1)\alpha_1\zeta_2 - (z_2 - \zeta_2)\alpha_1\zeta_1 + \ldots + (z_{2\rho-1} - \zeta_{2\rho-1})\alpha_1\zeta_{2\rho} \\ &\qquad - (z_{2\rho} - \zeta_{2\rho})\alpha_1\zeta_{2\rho-1} + (z_n - \zeta_n)\delta \\ &= \alpha_1(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1) + \ldots + \alpha_\rho(z_{2\rho-1}\zeta_{2\rho} - z_{2\rho}\zeta_{2\rho-1}) + \delta(z_n - \zeta_n).\end{aligned}$$

Cette équation étant symétrique par rapport à $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ et $z_1, \ldots, z_n$, on a le théorème de réciprocité suivant :

THÉORÈME. — *Si le plan normal au déplacement du point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ passe par le point $z_1, \ldots, z_n$, le plan normal du déplacement de $z_1, \ldots, z_n$ passera par $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.*

92. Si ce point $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ se meut dans un k-plan

$$(120) \qquad A_1 = \ldots = A_k = 0,$$

les plans normaux aux déplacements se couperont suivant un $n-k+1$-plan *conjugué au k-plan*, lequel s'obtiendra en éliminant k des quantités $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de l'équation du plan normal à l'aide des équatious (120), et égalant à zéro les coefficients des quantités restantes.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, qu'on a $k < n-k+1$, d'où $k < \frac{n+1}{2}$, $2k-1 < n$.

93. THÉORÈME. — *Si les deux multiplans conjugués P_k, P_{n-k+1} ne sont pas contenus dans un même plan, le mouvement considéré S pourra se décomposer en deux rotations autour de ces multiplans.*

En effet, soit p' un point de P_{n-k+1} situé en dehors de P_k. Par ce point et par P_k on pourra faire passer un $k-1$-plan P_{k-1}. Soit p'' un point de P_{n-k+1} non contenu dans P_{k-1} ; par p'' et P_{k-1}, on fera passer un $k-2$-plan P_{k-2}, etc. On arrivera enfin à un plan P_1 passant par P_k et par $k-1$ points convenablement choisis dans P_{n-k+1}.

Cela posé, nous prendrons pour plan des x_1 le plan P_1 ; pour plan des x_2, un plan mené par P_2 perpendiculairement à P_1 ; ... ; pour plan des x_k, un plan mené par P_k perpendiculairement à P_{k-1} ; enfin, si $2k-1 < n$, $n-2k+1$ plans rectangulaires et perpendiculaires à P_{2k-1},

$$x_{2k} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Soient respectivement

$$\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n, \ldots, \zeta_1^{(k-1)}, \ldots, \zeta_n^{(k-1)}$$

les coordonnées de $p', \ldots, p^{(k-1)}$. Les points $p', p'', \ldots, p^{(k-1)}$ étant respectivement dans les multiplans $P_1, \ldots, P_{k-1}$, on aura

$$(121)\qquad \left\{\begin{array}{l} \zeta_1' = 0, \\ \zeta_1'' = \zeta_2'' = 0, \\ \zeta_1^{(k-1)} = \zeta_2^{(k-1)} = \ldots = \zeta_{k-1}^{(k-1)} = 0. \end{array}\right.$$

D'ailleurs p' n'est pas dans P_2, p'' n'est pas dans P_3, etc. ; donc on aura

$$\zeta_2' \gtrless 0,\ \zeta_3'' \gtrless 0, \ldots,\ \zeta_k^{(k-1)} \gtrless 0.$$

94. Cela posé, soit $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ un point quelconque de P_{n-k+1}; $\Delta\zeta_1, \ldots, \Delta\zeta_n$ les changements de ces coordonnées par suite du mouvement considéré. Le plan normal au déplacement sera

$$(122)\qquad (x_1 - \zeta_1)\Delta\zeta_1 + \ldots + (x_n - \zeta_n)\Delta\zeta_n = 0.$$

Par hypothèse, il doit passer par le multiplan P_k. Donc l'équation (122) doit être satisfaite identiquement en y posant $x_1 = \ldots = x_k = 0$, ce qui donne les conditions

$$(123)\qquad \Delta\zeta_{k+1} = \ldots = \Delta\zeta_n = 0,$$

$$(124)\qquad \zeta_1\Delta\zeta_1 + \ldots + \zeta_k\Delta\zeta_k = 0.$$

Soit d'ailleurs $z_1, \ldots, z_n$ un autre point de P_{n-k+1}; la distance de ce point au précédent ne doit pas être altérée; donc on aura

$$(z_1 - \zeta_1)(\Delta z_1 - \Delta\zeta_1) + \ldots + (z_n - \zeta_n)(\Delta z_n - \Delta\zeta_n) = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (123) et (124) et des relations analogues relatives à $z_1, \ldots, z_n$,

$$(125)\qquad z_1\Delta\zeta_1 + \zeta_1\Delta z_1 + \ldots + z_k\Delta\zeta_k + \zeta_k\Delta z_k = 0.$$

L'équation (125), appliquée au point p^{k-1} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la dernière, se réduira à

$$\zeta_k^{(k-1)}\Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0, \text{ d'où } \Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0.$$

95. Soient maintenant $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ des quantités très-petites ; considérons la substitution

$$T = \left|\begin{array}{ll} x_1 & x_1 + \varepsilon_1 x_k \\ x_2 & x_2 + \varepsilon_2 x_k \\ \ldots & \ldots \\ x_k & -\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 - \ldots + x_k \\ x_{k+1} & x_{k+1} \\ \ldots & \ldots \end{array}\right|$$

laquelle est une rotation autour de P_k. Pour que S se décompose en deux rotations autour de P_k et autour de P_{n-k+1}, il est évidemment nécessaire et suffisant qu'il en soit de même de ST $=$ S'. D'ailleurs S' fera subir aux coordonnées du point $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ les variations suivantes

$$\Delta'\zeta_1 = \Delta\zeta_1 + \varepsilon_1\zeta_k,\ \Delta'\zeta_2 = \Delta\zeta_2 + \varepsilon_2\zeta_k, \dots, \tag{126}$$

$$\Delta'\zeta_k = \Delta\zeta_k - \varepsilon_1\zeta_1 - \varepsilon_2\zeta_2 - \dots, \tag{127}$$

$$\Delta'\zeta_{k+1} = \Delta\zeta_{k+1}, \dots, \Delta'\zeta_n = \Delta\zeta_n, \tag{128}$$

et, d'après ces formules, il est clair que si les Δ satisfont comme on l'a supposé aux relations (123), (124) et (125), les Δ' satisferont aux relations toutes semblables

$$\Delta'\zeta_{k+1} = \dots = \Delta'\zeta_n = 0, \tag{129}$$

$$\zeta_1\Delta'\zeta_1 + \dots + \zeta_k\Delta'\zeta_k = 0, \tag{130}$$

$$z_1\Delta'\zeta_1 + \zeta_1\Delta'z_1 + \dots + z_k\Delta'\zeta_k + \zeta_k\Delta'z_k = 0. \tag{131}$$

Si maintenant on détermine ces arbitraires ε par les relations

$$\Delta\zeta_1^{(k-1)} + \varepsilon_1\zeta_k^{(k-1)} = 0, \dots, \Delta\zeta_{k-1}^{(k-1)} + \varepsilon_{k-1}\zeta_k^{(k-1)} = 0,$$

ce qui ne peut souffrir de difficulté, $\zeta_k^{(k-1)}$ n'étant pas nul, on aura

$$\Delta'\zeta_1^{(k-1)} = \dots = \Delta'\zeta_{k-1}^{(k-1)} = 0. \tag{132}$$

On a d'ailleurs, $\zeta_1^{(k-1)}, \dots, \zeta_{k-1}^{(k-1)}$ étant nuls,

$$\Delta'\zeta_k^{(k-1)} = \Delta\zeta_k^{(k-1)} = 0. \tag{133}$$

Donc la substitution T ne déplacera plus le point $p^{(k-1)}$.

96. Remplaçons maintenant, dans les équations (130) et (131), $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ par les valeurs particulières $\zeta_1^{(k-2)}, \dots, \zeta_k^{(k-2)}$ et $z_1, \dots, z_k$ par $\zeta_1^{(k-1)}, \dots, \zeta_k^{(k-1)}$. Elles se réduiront, en tenant compte des relations (121) et (133), à

$$\zeta_k^{(k-2)}\Delta'\zeta_k^{(k-2)} + \zeta_{k-1}^{(k-2)}\Delta'\zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0,$$
$$\zeta_k^{(k-1)}\Delta'\zeta_k^{(k-2)} = 0,$$

d'où l'on déduit, $\zeta_k^{(k-1)}$ et $\zeta_{k-1}^{(k-2)}$ n'étant pas nuls,

$$\Delta'\zeta_k^{(k-2)} = 0,\ \Delta'\zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0.$$

Cela posé, considérons les substitutions

$$\mathrm{T}' = \left|\begin{array}{ll} x_1 & x_1 + \varepsilon'_1 x_{k-1} \\ x_2 & x_2 + \varepsilon'_2 x_{k-2} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ x_{k-1} & -\varepsilon'_1 x - \varepsilon'_2 x_2 - \dots + x_{k-1} \\ x_k & x_k \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \end{array}\right|,$$

laquelle est une rotation autour de P_k ; S' sera décomposable en deux rotations autour de P_k et P_{n-k+1}, si $S'T' = S''$ l'est.

Les variations que S'' fait subir aux coordonnées de $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ seront représentées par les formules

$$\begin{aligned}
\Delta''\zeta_1 &= \Delta'\zeta_1 + \varepsilon'\zeta_{k-1}, \ldots,\\
\Delta''\zeta_{k-1} &= \Delta'\zeta_{k-1} - \varepsilon'\zeta_1, \ldots,\\
\Delta''\zeta_\rho &= \Delta'\zeta_\rho \quad (\rho > k-1),
\end{aligned}$$

et il est clair : 1° que les Δ'' satisferont aux relations (129), (130), (131); 2° qu'on aura

$$\Delta''\zeta_1^{(k-1)} = \ldots = \Delta''\zeta_k^{(k-1)} = 0, \quad \Delta''\zeta_k^{(k-2)} = \Delta''\zeta_{k-1}^{(k-2)} = 0\,;$$

3° qu'on pourra déterminer les ε' de telle sorte que les autres coordonnées de $p^{(k-2)}$ ne subissent plus aucun changement.

Continuant ainsi, on arrivera à une dernière substitution

$$\Sigma = STT' \ldots,$$

laquelle ne déplace plus aucun des points $p', \ldots, p^{(k-1)}$.

97. Mais la substitution Σ se réduit à une rotation autour de P_{n-k+1}. Pour le prouver, il suffit de montrer qu'elle laisse invariables les coordonnées d'un point quelconque $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ de ce multiplan. Or les variations $\Delta\zeta_1, \ldots, \Delta\zeta_n$ qu'elle fait subir à ces coordonnées satisfont aux équations (129), (130) et (131). Donc $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n$ ne sont pas altérés par Σ. Quant aux autres coordonnées, on aura les équations suivantes, déduites de (131) en y remplaçant successivement $z_1, \ldots, z_n$ par les coordonnées des points $p', \ldots, p^{(k-1)}$ (que Σ ne déplace pas), et en tenant compte des équations (121),

$$\begin{aligned}
&\zeta_k^{(k-1)}\Delta\zeta_k = 0,\\
&\zeta_{k-1}^{(k-2)}\Delta\zeta_{k-1} + \zeta_k^{(k-2)}\Delta\zeta_k = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\zeta_2'\Delta\zeta_2 + \ldots + \zeta_k'\Delta\zeta_k = 0,
\end{aligned}$$

équations d'où l'on déduit successivement

$$\Delta\zeta_k = 0, \ldots, \Delta\zeta_2 = 0.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation

$$\zeta_1\Delta\zeta_1 + \ldots + \zeta_k\Delta\zeta_k = 0$$

la réduiront à

$$\zeta_1\Delta\zeta_1 = 0.$$

Donc si ζ_1 n'est pas nul, on aura $\Delta\zeta_1 = 0$ et notre proposition sera démontrée.

Supposons, au contraire, que ζ_1 soit nul. Par hypothèse, P_{n-k+1} contient un point $z_1, \dots, z_n$ qui n'est pas contenu dans le plan $x_1 = 0$. Donc z_1 ne sera pas nul : d'ailleurs on aura, par ce qui précède, $\Delta z_1 = \dots = \Delta z_n = 0$. Donc l'équation (125), appliquée aux deux points $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ et $z_1, \dots, z_n$, se réduira à

$$z_1 \Delta\zeta_1 = 0, \text{ d'où } \Delta\zeta_1 = 0,$$

ce qui complète la démonstration.

98. Comme application particulière, proposons-nous de résoudre le problème de la composition des rotations autour d'un point dans l'espace à quatre dimensions.

Si l'on pose $n = 4$, la formule (97) qui représente une rotation infiniment petite R autour de l'origine contiendra six paramètres variables ε_{12}, ε_{13}, ε_{14}, ε_{23}, ε_{24}, ε_{34}. Cela devait être ; car une semblable rotation dépend de six éléments : 1° quatre angles, définissant la situation de ses biplans principaux ; 2° les amplitudes α, β des rotations partielles autour de ces biplans.

Cherchons à mettre la substitution sous une forme où ces deux sortes d'éléments soient immédiatement en évidence.

Soient $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$ les plans coordonnés, et supposons que l'un B des biplans principaux de R fasse les angles φ et ψ avec le biplan A formé des deux plans $x = 0$, $y = 0$. On pourra, comme nous l'avons montré (IV), remplacer x, y, z, u par de nouvelles coordonnées rectangulaires

$$x' = x\cos\lambda + y\sin\lambda, \quad y' = -x\sin\lambda + y\cos\lambda,$$
$$z' = z\cos\rho + y\sin\rho, \quad u' = -z\sin\rho + u\cos\rho,$$

telles que les biplans A et B soient respectivement représentés par les équations

$$x' = 0, \quad y' = 0$$

et

$$X = x'\cos\varphi + z'\sin\varphi = 0, \quad Y = y'\cos\psi + u'\sin\psi = 0.$$

Le second biplan principal de R, étant perpendiculaire à B, sera l'intersection des deux plans

$$Z = -x'\sin\varphi + z'\cos\varphi = 0, \quad U = -y'\sin\psi + u'\cos\psi = 0.$$

Cela posé, prenons X, Y, Z, U pour plans coordonnés ; la rotation R prendra sa forme canonique

$$\left| \begin{matrix} X,Y & X + \alpha Y, & -\alpha X + Y \\ Z,U & Z + \beta U, & -\beta Z + U \end{matrix} \right|.$$

La même substitution, rapportée aux coordonnées x', y', z', u', prendra la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x' & x' + ay' + bu' \\ y' & -bx' + y' + cz' \\ z' & -cy' + z' + du' \\ u' & -bx' - dz' + u' \end{array}\right|,$$

en posant pour abréger

$$(134) \qquad \left\{\begin{array}{l} a = \alpha\cos\varphi\cos\psi + \beta\sin\varphi\sin\psi, \\ b = -\alpha\cos\varphi\sin\psi + \beta\sin\varphi\cos\psi, \\ c = \alpha\sin\varphi\cos\psi - \beta\cos\varphi\sin\psi, \\ d = \alpha\sin\varphi\sin\psi + \beta\cos\varphi\cos\psi. \end{array}\right.$$

Enfin cette même substitution, rapportée aux coordonnées primitives x, y, z, u, sera de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x & x + ay + ez + fu \\ y & -ax + y + gz + hu \\ z & -ex - gy + z + du \\ u & -fx - hy - dz + u \end{array}\right|,$$

e, f, g, h étant déterminés par les relations

$$(135) \qquad \left\{\begin{array}{l} e = -b\sin\rho\cos\lambda - c\cos\rho\sin\lambda, \\ f = b\cos\rho\cos\lambda - c\sin\rho\sin\lambda, \\ g = -b\sin\lambda\sin\rho + c\cos\lambda\cos\rho, \\ h = b\sin\lambda\cos\rho + c\cos\lambda\sin\rho \end{array}\right.$$

99. Posons maintenant

$$\begin{array}{ll} \alpha + \beta = 2\mathcal{A}, & \alpha - \beta = 2\mathcal{B}, \\ \varphi - \psi = m, & \varphi + \psi = n, \\ \lambda + \rho = \mu, & \lambda - \rho = \nu. \end{array}$$

Les formules (134) et (135) deviendront

$$\begin{aligned} a &= \mathcal{A}\cos m + \mathcal{B}\cos n, \\ b &= \mathcal{A}\sin m - \mathcal{B}\sin n, \\ c &= \mathcal{A}\sin m + \mathcal{B}\sin n, \\ d &= \mathcal{A}\sin m - \mathcal{B}\cos n, \\ -e &= \mathcal{A}\sin m\sin\mu + \mathcal{B}\sin n\sin\nu, \\ f &= \mathcal{A}\sin m\cos\mu - \mathcal{B}\sin n\cos\nu, \\ g &= \mathcal{A}\sin m\cos\mu - \mathcal{B}\sin n\cos\nu, \\ h &= \mathcal{A}\sin m\sin\mu - \mathcal{B}\sin n\sin\nu. \end{aligned}$$

100. Considérons maintenant diverses rotations $R_1, R_2, \ldots, R_k$; et soient $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i, m_i, n_i, \mu_i, \nu_i, a_i, \ldots, h_i$ les valeurs des paramètres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, m, n, \mu, \nu, a, \ldots, h$ pour la substitutions R_i ; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, m, n, \mu, \nu, a, \ldots, h$ leurs valeurs pour la substitution résultante R.

Les quantités $a_1, \ldots, h_1, \ldots, a_k, \ldots, h_k$ étant supposées infiniment petites, on aura évidemment, en négligeant les termes du second ordre,

$$R' = R_1 \ldots R_k = \left| \begin{array}{ll} x & x \quad + y \sum_r a_r + z \sum_r e_r + u \sum_r f_r \\ y & -x \sum_r e_r + y \quad + z \sum_r g_r + u \sum_r h_r \\ z & -x \sum_r e_r - y \sum_r g_r + z \quad + u \sum_r d_r \\ u & -x \sum_r f_r - y \sum_r h_r - z \sum_r d_r + u \end{array} \right| \quad (r=1, 2, \ldots, k).$$

On aura donc

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} \cos m = \frac{1}{2}(a+d) = \frac{1}{2}\sum (a_r - d_r) = \sum \mathfrak{A}_r \cos m_r, \\ \mathfrak{A} \sin m \sin \mu = \frac{1}{2}(h - e) = \frac{1}{2}\sum (h_r - e_r) = \sum \mathfrak{A}_r \sin m_r \sin \mu_r, \\ \mathfrak{A} \sin m \cos \mu = \frac{1}{2}(f+g) = \frac{1}{2}\sum (f_r + g_r) = \sum \mathfrak{A}_r \sin m_r \cos \mu_r, \end{array} \right.$$

$$(136) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} \cos n = \frac{1}{2}(a-d) = \frac{1}{2}\sum (a_r - d_r) = \sum \mathfrak{B}_r \cos n_r, \\ \mathfrak{B} \sin n \sin \nu = -\frac{1}{2}(e+h) = -\frac{1}{2}\sum (e_r + h_r) = \sum \mathfrak{B}_r \sin n_r \sin \nu_r, \\ \mathfrak{B} \sin n \cos \nu = \frac{1}{2}(g-f) = \frac{1}{2}\sum (g_r - f_r) = \sum \mathfrak{B}_r \sin n_r \cos \nu_r. \end{array} \right.$$

De ces formules résulte cette conséquence remarquable que les six paramètres $\mathfrak{A}, m, \mu, \mathfrak{B}, n, \nu$ se partagent en deux groupes, $\mathfrak{A}, m, \mu$ et $\mathfrak{B}, n, \nu$, de telle sorte que les valeurs des paramètres de chaque groupe dans la rotation résultante dépendent exclusivement des valeurs de ces mêmes paramètres dans les substitutions composantes.

101. La loi de cette dépendance peut d'ailleurs se représenter géométriquement d'une manière fort simple. Menons dans l'espace ordinaire, à partir de l'origine des coordonnées, une droite OA de longueur $\mathfrak{A}$, ayant l'angle μ pour azimuth et l'angle m pour co-latitude. Menons de même une autre droite OB de longueur $\mathfrak{B}$, d'azimuth ν et de co-latitude n. Le système de ces deux droites donnera une image géométrique de la rotation R.

Cela posé, les équations (136) expriment que la droite OA a pour projections sur ces trois axes coordonnés la somme des projections des droites $OA_1, \ldots, OA_k$ relatives aux rotations composantes $R_1, \ldots, R_k$. De même les équations (137) expriment que OB a pour projections la somme des projections de $OB_1, \ldots, OB_r$. On a donc ce théorème :

Pour obtenir chacune des deux droites représentatives de la résultante d'un nombre quelconque de rotations concourantes, il suffira de composer, suivant les règles de la statique, les correspondantes qui servent à représenter les rotations composantes.