BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

Sur les fonctions asymptotiquement périodiques

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 263-272

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__263_1>

SUR LES FONCTIONS ASYMPTOTIQUEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. — EXPOSÉ.

Je me propose ici de dire quelques mots des fonctions asymptotiquement périodiques, en les définissant pour le cas des variables complexes et de la périodicité simple ou double. Un résumé d'une partie de ce qui suit a été communiqué au Congrès de Lille pour l'avancement des Sciences en 1909 (voir *Mémoires de ce Congrès*); les énoncés que j'y ai donnés ne s'appliquent qu'aux fonctions n'ayant en chaque point des domaines étudiés (frontières non comprises) qu'une valeur *unique*, *bien déterminée*, *finie ou infinie*. Dans la présente Note, je traite en outre le cas où les fonctions de variable complexe ont, dans les mêmes domaines, *des points singuliers essentiels isolés*.

II. — Cas de la périodicité simple.

Définitions. — Soit une fonction $f(z)$ *monodrome* dans un secteur du plan complexe des z, ce secteur ayant pour sommet l'origine, et comprenant à son intérieur le vecteur ω issu de cette origine; soient encore ε un nombre positif donné, arbitrairement petit, α une fonction $\psi(\varepsilon)$ de ε qui croît constamment et indéfiniment quand ε tend vers o. Je suppose que, pour chaque valeur de ε, on puisse déterminer α de façon que toutes les valeurs de z et $z + m\omega$ (m entier variable positif ou négatif) comprises dans ce secteur, et dont le module dépasse α, satisfassent à

$$|f(z+m\omega)-f(z)| < \varepsilon, \tag{1}$$

quel que soit m.

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ sera dite *asymptotiquement périodique de période* ω.

On peut dire aussi que l'inégalité (1) a lieu, dans le secteur, en dehors du cercle C_α de rayon α ayant pour centre l'origine.

La fonction $f(z)$ est supposée ici n'avoir en chaque point du secteur (frontières non comprises) qu'une valeur unique, bien déterminée, finie ou infinie.

Mais on peut assujettir la fonction à des conditions moins restrictives, en conservant la même définition, ou, plus exactement, réduire le domaine où la fonction $f(z)$ a une valeur unique, bien déterminée, finie ou infinie. J'admettrai pour ce qui suit que $f(z)$ jouit encore de cette dernière propriété, *sauf peut-être* sur les frontières, au voisinage de l'origine, et en un nombre fini ou infini de points qui seront pour elles des points singuliers essentiels isolés. La définition de la périodicité asymptotique restera la même [inégalité (1)].

On obtient le cas des fonctions réelles, *univalentes,* de variable réelle t, en prenant ω réel, et l'angle du secteur nul. On suppose seulement que, pour *chaque* valeur de $|t|$ du domaine supérieure à une quantité fixe $\lambda > 0$, $f(t)$ a une valeur unique, *bien déterminée*, finie ou infinie; on dira alors que $f(t)$ est asymptotiquement périodique pour $t = +\infty$, ou $t = -\infty$, respectivement, si le secteur d'angle nul comprend l'axe des t positifs, ou celui des t négatifs, respectivement.

1° *Cas de la variable complexe* z. — En changeant au besoin l'orientation des axes, on peut toujours s'arranger pour que ω soit réel et positif; c'est ce que j'admettrai, en sorte que le secteur comprend l'axe Ox des x positifs.

Soit, dans le secteur,

$$f(z + m\omega) - f[z + (m-1)\omega] = -u_m(z) = -u_m, \qquad m \text{ entier} > 0.$$

En dehors de C_α on a, d'après (1), pour tout entier $m > 0$,

$$|f(z) - f(z + m\omega)| < \varepsilon.$$

La fonction $f(z) - f(z + m\omega)$ n'a donc, pour chaque valeur de m, quand z est en dehors de C_α, ni infini, ni point singulier essentiel isolé au voisinage duquel le module de cette fonction pourrait être aussi grand qu'on veut ([1]). Il existera un cercle Γ, de rayon fini, ayant pour centre l'origine, et en dehors duquel les fonctions $f(z) - f(z + m\omega)$ n'ont plus ni infini, ni point singulier essentiel isolé, c'est-à-dire n'ont plus de point critique dans le secteur, et ceci pour toute valeur entière de $m > 0$.

Soit Δ le domaine des points $z = x + iy$ du secteur ou bien situés en dehors de Γ quand $x \geqq 0$, ou bien pour lesquels $|y|$ est supérieur au rayon de Γ quand $x \leqq 0$. Je ne considère jusqu'à nouvel ordre que des points z de Δ : les points $z + m\omega$ (m entier $\geqq 0$) correspondants sont tous dans Δ.

Je pose

$$S_m(z) = u_1 + u_2 + \ldots + u_m = f(z) - f(z + m\omega).$$

La série S_m converge et tend vers une limite $S(z)$ pour m infini,

---

([1]) E. Picard, ***Analyse***, t. II, 1893, p. 120.

car

$$\lim|S_p - S_q| = \lim|f(z+q\omega) - f(z+p\omega)| = 0,$$

pour p et q infinis. De plus, cette convergence est uniforme dans tout domaine fini D de Δ. En effet, si $z_1 = z + n\omega$ (n entier $\geqq 0$), on a, quel que soit l'entier $k > 0$,

$$|S_{n+k} - S_n| = |u_{n+1} + \ldots + u_{n+k}| = |f(z_1 + k\omega) - f(z_1)| < \varepsilon_1,$$

ε_1 étant un nombre fixe positif donné, arbitrairement petit, indépendant de k et le même pour tout point de D, pourvu que n dépasse une certaine limite n_1; d'autre part, on peut, pour chaque valeur de z dans D, trouver une valeur de k telle que

$$|S - S_{n+k}| < \varepsilon_1;$$

il en résulte, en chaque point de D,

$$|S - S_n| < 2\varepsilon_1,$$

c'est-à-dire que la convergence de S est uniforme dans D.

Soit alors

$$F(z) = f(z) - S(z);$$

on a

$$u_1(z+\omega) = u_2(z), \quad \ldots, \quad u_k(z+\omega) = u_{k+1}(z), \quad \ldots,$$
$$f(z+\omega) - f(z) = -u_1(z),$$
$$S_m(z+\omega) - S_m(z) = u_{m+1}(z) - u_1(z),$$
$$f(z+\omega) - S_m(z+\omega) = f(z) - S_m(z) - u_{m+1}(z);$$

faisant croître m indéfiniment, on a

$$F(z+\omega) - F(z) = 0,$$

et $F(z)$ est une fonction périodique de ω dans Δ.

D'autre part, il est bien évident que, dans Δ, $|S(z)|$ peut être pris aussi petit qu'on veut dès que $|z| = r$ est assez grand; car, si $r > \alpha$,

$$|S_m(z)| = |f(z) - f(z+m\omega)| < \varepsilon,$$

quels que soient m entier positif et z; pour chaque valeur de z dans Δ, on peut trouver m assez grand et tel que

$$|S - S_m| < \varepsilon;$$

par suite on a , quand $r > \alpha$,

$$|S| < 2\varepsilon.$$

On peut remarquer que, dans Δ, $S(z)$ est monodrome et fini, et que les points critiques de $f(z)$, infinis ou points singuliers essentiels isolés, y seront ceux de $F(z)$; ces points critiques seront donc périodiques.

La fonction $F(z)$ se trouve, à cause de sa périodicité, définie dans tout le secteur; en effet, ce dernier comprenant l'axe des x positifs à son intérieur, on peut toujours trouver dans Δ un point $x+iy$ où y ait une valeur arbitraire. On peut alors prendre pour $S(z)$ la fonction qui satisfait à l'égalité

$$f(z) = F(z) + S(z),$$

dans tout le secteur.

z étant un point quelconque du secteur, on peut prendre n assez grand pour que $\zeta = z + n\omega$ soit dans Δ; on en conclut

$$f(\zeta) = F(\zeta) + S(\zeta),$$
$$S(z) = f(z) - F(\zeta) = f(z) - f(\zeta) + S(\zeta).$$

Inversement, on vérifie de suite que, si, dans le secteur, une fonction $f(z)$ est la somme d'une fonction périodique $F(z)$ et d'une fonction $S(z)$ telle que $|S| < 2\varepsilon$ pour $r = |z| > \alpha$, $f(z)$ est asymptotiquement périodique.

On peut encore montrer que $S(z)$ a dans Δ une dérivée dont le module tend vers zéro avec r^{-1}. En effet, soit, dans Δ, C un cercle de rayon fini δ assez petit ayant comme centre le point a. On sait que

$$2\pi i\, S_m(a) = \int_C \frac{S_m(z)\,dz}{z-a};$$

en faisant croître m indéfiniment, on a

$$2\pi i\, S(a) = \int_C \frac{S(z)\,dz}{z-a},$$

d'où

$$2\pi i\, S'(a) = \int_C \frac{S(z)\,dz}{(z-a)^2}.$$

Il en résulte de suite une limite supérieure fixe ε_2 de $|S'(a)|$

dans Δ pour $r > \alpha + \delta$, si l'on attribue à δ une valeur fixe indépendante de a; ε_2 tend vers zéro avec ε ou $\frac{1}{\alpha}$.

Dès lors, dans Δ, en dehors des points critiques de $f(z)$, $F(z)$ a une dérivée $F'(z)$ telle que

$$f'(z) = F'(z) + S'(z),$$

et $f'(z)$ est asymptotiquement périodique dans le secteur.

Dans le cas où le secteur comprend tout l'axe Ox pour $x > 0$ et pour $x < 0$, on pourrait raisonner sur la période $-\omega$, dans un domaine Δ_1 analogue à Δ, comme on l'a fait sur la période ω; on trouverait

$$f(z) = \Phi(z) + \Sigma(z),$$

où Φ est périodique et analogue à F, $\Sigma(z)$ la limite pour $m = \infty$ de

$$\Sigma_{m_1}(z) = f(z) - f(z - m_1\omega).$$

La première de ces deux égalités définit $\Sigma(z)$ dans tout le secteur.

Soit alors z un point quelconque d'un domaine fini D_1 du secteur ne comprenant aucun point critique de $f(z)$: on peut trouver n entier et tel que $\zeta = z + n\omega$ soit toujours dans Δ, $\zeta_1 = z - n\omega$, dans Δ_1, quel que soit le point z de D_1, dès que n dépasse une certaine limite ν. On a donc

$$S(z) = f(z) - f(\zeta) + S(\zeta),$$
$$\Sigma(z) = f(z) - f(\zeta_1) + \Sigma(\zeta_1),$$
$$f(z) = F(z) + S(z) = \Phi(z) + \Sigma(z).$$

On en conclut

$$S(z) - \Sigma(z) = \Phi(z) - F(z) = f(\zeta_1) - f(\zeta) + S(\zeta) - \Sigma(\zeta_1);$$

$\Phi(z) - F(z)$ a pour période ω, par suite aussi $S(z) - \Sigma(z)$; mais, ε étant un nombre positif donné et arbitrairement petit, on peut prendre ν assez grand pour que $|S(\zeta)| < \varepsilon$, $|\Sigma(\zeta_1)| < \varepsilon$, $|f(\zeta_1) - f(\zeta)| < \varepsilon$ dès que $n > \nu$, donc

$$|S(z) - \Sigma(z)| < 3\varepsilon.$$

Ceci n'est possible que si l'on a, pour toute valeur de z dans D_1

$$S(z) = \Sigma(z);$$

d'où

$$F(z) = \Phi(z),$$

On peut résumer une partie de ce qui précède dans l'énoncé suivant:

THÉORÈME I. — *On a dans le secteur*

$$(2) \qquad f(z) = F(z) + S(z),$$

où $F(z)$ *a la période* ω, *et où* $S(z)$ *est monodrome en dehors d'un certain cercle* Γ_1 *ayant pour centre l'origine, avec* $|S(z)| < 2\varepsilon$ *dès que* $r = |z| > \alpha$.

On a aussi

$$f'(z) = F'(z) + S'(z),$$

et $f'(z)$ *est asymptotiquement périodique de période* ω *dans le secteur.*

2° *Cas de la variable réelle* t. — Il suffira de raisonner de la même manière en supposant nul l'angle du secteur, et avec les hypothèses indiquées pour $f(t)$. Sauf ce qui est relatif à la dérivée, les mêmes démonstrations s'appliquent, légèrement modifiées, soit pour $t \geqq 0$, soit pour t quelconque, sans qu'il soit nécessaire d'admettre que la fonction a une dérivée.

Soit maintenant le cas où $f(t)$ a une dérivée $f'(t)$ remplissant les mêmes conditions que $f(t)$, par exemple pour $t \geqq 0$: $f'(t)$ est asymptotiquement périodique de période ω pour $t = +\infty$. On trouve encore que la série

$$\sigma(t) = u'_1 + \ldots + u'_m + \ldots$$

est uniformément convergente dans un domaine Δ' analogue à Δ et formé des valeurs de $t > \tau$, τ étant un certain nombre fini $\geqq 0$. On en conclut ([1]) que, dans Δ',

$$\sigma(t) = S'(t), \qquad f'(t) - S'(t) = F_1(t) = F'(t),$$

c'est-à-dire que $F(t)$, $S(t)$ ont des dérivées dans Δ'. $F(t)$ étant

---

([1]) *Voir*, par exemple, C. JORDAN, *Cours d'Analyse*.

périodique pour $t \geqq 0$, on pourra donc écrire

$$f'(t) = F'(t) + S'(t)$$

pour toute valeur positive de t : enfin $|S(t)|$ et $|S'(t)|$ sont $< \varepsilon$ dès que $t > \alpha$.

Si $f(t)$ et $f'(t)$ remplissent les conditions supposées pour $t \geqq 0$ et $t \leqq 0$ à la fois, la considération de la période $-\omega$ conduit à

$$f(t) = \Phi(t) + \Sigma(t),$$

où $\Phi(t)$ est périodique et analogue à $F(t)$, $\Sigma(t)$ analogue à $S(t)$; on a

$$\Phi = F, \qquad S = \Sigma.$$

Donc :

Théorème II. — *La fonction réelle $f(t)$ définie plus haut étant asymptotiquement périodique de période ω pour $t \geqq 0$, on a*

$$(3) \qquad f(t) = F(t) + S(t), \qquad t \geqq 0,$$

où $F(t)$ est périodique, de période ω, et où $S(t)$ est univalente et tend vers zéro avec t^{-1}. Inversement toute fonction de cette forme est asymptotiquement périodique pour $t \geqq 0$.

Si $f(t)$ a une dérivée elle-même asymptotiquement périodique de période ω pour $t \geqq 0$, on a

$$f'(t) = F'(t) + S'(t), \qquad t \geqq 0,$$

S' tendant vers zéro avec t^{-1}.

III. — Cas de la périodicité double.

Définition. — La définition sera analogue à celle de la périodicité simple : l'inégalité (1) devra seulement être remplacée par l'inégalité

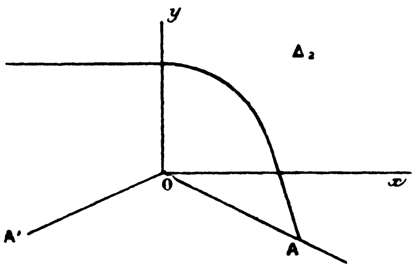
$$(4) \qquad |f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) - f(z)| < \varepsilon$$

pour les points z et $z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ du secteur situés en dehors de C_α, m_1 et m_2 étant entiers, positifs ou négatifs; on suppose que le secteur comprend les vecteurs ω_1, ω_2 issus de l'origine.

On remarque que $f(z)$ est dans le secteur une fonction asymptotiquement périodique de ω_1, et aussi une de ω_2. On peut toujours admettre qu'une des périodes, ω_1, par exemple, est réelle et positive.

On formera d'abord la région R limitée par le secteur AOA′, le cercle Γ en dehors duquel $f(z) - f(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ n'a pas de point critique dans le secteur, et, s'il y a lieu, des tangentes à ce cercle, parallèles à $-\omega_1$ et $-\omega_2$. Les points du secteur situés en dehors de R constitueront un domaine Δ_2 analogue à Δ (1).

Dès lors, quand z est dans Δ_2, les points correspondants



$z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ ($m_1 \geqq 0$, $m_2 \geqq 0$ et entiers) sont tous dans Δ_2; si z n'est pas dans Δ_2, on peut, pour chaque valeur de z, trouver μ_1 et μ_2 tels que $z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ soit dans Δ_2 quand les entiers m_1 et m_2 sont $\geqq 0$, et $m_1 \geqq \mu_1$ ou $m_2 \geqq \mu_2$.

Je vais d'abord établir le lemme suivant:

Lemme. — *Si $f(z)$ a exactement la période ω_2 dans le secteur, elle y a aussi exactement la période ω_1.*

Je suppose en effet que $f(z)$, ayant la période ω_2 dans le secteur, n'y ait qu'asymptotiquement la période ω_1. On peut raisonner sur $f(z)$ comme au théorème I, en prenant $\omega = \omega_1$. Soit $\zeta = z + n\omega_1$, avec $n \geqq 0$ et choisi de façon que ζ soit dans Δ_2; il en sera de même de $\zeta + \omega_2$; on a

$$f(z) = F(z) + S(z), \qquad S(z) = f(z) - f(\zeta) + S(\zeta),$$

(1) La figure suppose $\widehat{AOA'} > \pi$.

$F(z)$ ayant la période ω_1. Alors, $f(z)$ ayant la période ω_2,

$$S(\zeta+\omega_2)-S(\zeta)=S(z+\omega_2)-S(z).$$

On peut prendre n assez grand pour que les modules de $S(\zeta+\omega_2)$ et $S(\zeta)$ soient plus petits qu'une quantité donnée arbitrairement petite; donc

$$S(z+\omega_2)=S(z).$$

Mais $S(z+p\omega_2)$ a aussi son module plus petit qu'une quantité donnée arbitrairement petite lorsque l'entier p est assez grand; l'égalité $S(z+p\omega_2)=S(z)$ exige

$$S(z)=0, \qquad f(z)=F(z),$$

c'est-à-dire que $f(z)$ a aussi exactement la période ω_1.

C. Q. F. D.

Ceci posé, je vais établir ce résultat:

Théorème III. — *Le théorème I et la formule* (2) *s'étendent aux fonctions doublement et asymptotiquement périodiques, avec cette modification que* $F(z)$ *a exactement les deux périodes* ω_1 *et* ω_2.

En effet, si l'on considère la période ω_2, d'après (2), on a dans le secteur

$$f(z)=f_1(z)+\varphi(z),$$

où $f_1(z)$ a la période ω_2, et où $|\varphi(z)|<2\varepsilon$ en dehors de C_α. Par conséquent

$$f_1(z)=f(z)-\varphi(z)$$

est dans le secteur une fonction asymptotiquement périodique de période ω_1. Le lemme précédent montre de suite que $f_1(z)$ a exactement la période ω_1, c'est-à-dire est doublement périodique.

C. Q. F. D.

Remarque. — La somme ou le produit de deux fonctions asymptotiquement périodiques et de mêmes périodes est évidemment une fonction de même nature.