BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Étude sur les surfaces imaginaires de Monge à lignes de courbure confondues

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 150-184

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__150_1>

ÉTUDE SUR LES SURFACES IMAGINAIRES DE MONGE A LIGNES DE COURBURE CONFONDUES;

PAR M. L. RAFFY.

Dans l'article XIX de son *Application de l'Analyse à la Géométrie,* Monge traite *de la surface dont les deux rayons de* *courbure en chaque point sont égaux entre eux et dirigés du même côté.* Il remarque tout d'abord que cette surface est caractérisée par la propriété d'avoir ses deux familles de lignes de courbure confondues, à moins que ses directions principales ne soient partout indéterminées, auquel cas il démontre très élégamment, en négligeant les développables isotropes, que la surface est une sphère. Monge intègre ensuite, par sa belle méthode des caractéristiques, l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend la surface et arrive ainsi à la définir comme enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe gauche arbitraire et dont le rayon est égal à l'arc de cette courbe. Il suit de là que chaque enveloppée est tangente à la sphère infiniment voisine, et Monge conclut, avec raison, que les points réels de la surface sont tous sur une développante de la ligne des centres.

On énonce aujourd'hui ce résultat en disant que deux enveloppées consécutives ont en commun deux génératrices rectilignes, de sorte que les surfaces en question sont des *surfaces réglées à génératrices isotropes*. De fait, la première solution du problème de Monge qui ait été présentée sous forme entièrement explicite est constituée par des surfaces réglées imaginaires, que J.-A. Serret a fait connaître dans sa célèbre *Note sur une équation aux dérivées partielles* (*Journ. de Liouville*, t. XIII, 1848, p. 361). Les surfaces de Serret sont caractérisées par la double propriété d'être réglées et d'avoir leur courbure totale constante; on sait (Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 315) qu'elles résultent de la déformation de la sphère considérée comme surface réglée.

Dans une Note publiée en 1856, Ossian Bonnet (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. XLII, p. 1067) a établi incidemment une équation d'où il résulte que les lignes de courbure des surfaces considérées par Monge sont en même temps des lignes asymptotiques, et il a prouvé qu'elles sont toutes tracées sur des plans, isotropes à la vérité, mais il n'a point vu que ces lignes étaient des droites isotropes.

C'est S. Lie, semble-t-il d'après une indication de M. Stäckel (*Leipziger Berichte,* t. XLVIII, 1896, p. 478), qui a reconnu l'identité des surfaces imaginaires de Monge avec les surfaces *gauches* à génératrices isotropes.

M. G. Scheffers a retrouvé ces mêmes surfaces (*Einführung* *in die Theorie der Flächen,* 1902, p. 227) en cherchant celles dont une famille d'asymptotiques est composée de courbes minima, et il a exprimé leurs coordonnées par des formules d'où il est aisé de faire disparaître les signes de quadrature dans le cas général, mais non dans le cas des surfaces de Serret.

M. Stäckel a fait remarquer (*Leipziger Berichte,* t. LIV, 1902, p. 108) que l'enveloppe des sphères définies par Monge se compose de deux nappes, dont chacune est engendrée par l'une des deux génératrices isotropes qui sont communes à deux enveloppées consécutives; mais, ayant admis (p. 112) que ces deux nappes sont symétriques par rapport à un plan, il n'en a point approfondi l'étude. M. Stäckel a donné une nouvelle représentation paramétrique explicite des surfaces de Serret.

En revenant, à mon tour, sur les surfaces remarquables qui ont fait l'objet des travaux précités, je voudrais pouvoir les appeler *surfaces de Monge.* Mais cette désignation est depuis longtemps attachée aux surfaces dont les normales touchent une développable. Aussi donnerai-je à celles qui vont nous occuper le nom de *surfaces à lignes de courbure confondues,* pour exclure les développables isotropes, dont les lignes de courbure sont indéterminées. Je les représenterai par le symbole (O_k), destiné à rappeler que tous leurs points sont des ombilics et qu'elles ont une courbure totale K, tandis que cette notion échappe quand il s'agit de développables isotropes. Il m'a semblé qu'il y avait lieu d'étudier ces surfaces parce qu'elles sont curieuses en elles-mêmes et que, malgré leur généralité, il est possible d'en donner diverses représentations entièrement explicites ou n'exigeant que des quadratures; parce qu'elles donnent lieu à des questions d'applicabilité assez délicates; enfin, parce qu'il a été émis à leur sujet quelques assertions erronées.

J'établis d'abord (§ I), par un raisonnement purement géométrique, l'identité des surfaces (O_k) avec les surfaces gauches à génératrices isotropes.

Je définis ensuite (§ II) la transformation de contact qui permet de les déduire des surfaces à plan directeur et qui en fournit une représention analytique commode, à l'aide des coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet; cette représentation convient aussi bien aux surfaces de Serret qu'aux surfaces à courbure totale variable.

En cherchant le lieu des centres de courbure principaux des surfaces (O_k), on trouve des formules propres à représenter une courbe quelconque (§ III). Le calcul de la courbure conduit à une conclusion qui n'avait peut-être pas été remarquée; *pour que la courbure d'une courbe soit constamment nulle, il faut et il suffit que cette courbe soit tracée sur un plan isotrope.*

Je détermine ensuite (§ IV) les deux nappes de l'enveloppe des sphères définies par Monge et je cherche la condition pour qu'on puisse les appliquer l'une sur l'autre, en faisant correspondre les deux génératrices qui appartiennent à une même sphère enveloppée. Bien qu'elle s'exprime par une relation différentielle d'ordre élevé, cette condition est susceptible d'un énoncé géométrique précis : *le lieu des centres des sphères enveloppées est une courbe telle que le rapport de sa courbure à sa torsion varie proportionnellement à son arc.*

Les surfaces (O_k) ne sont qu'une variété d'une classe de surfaces plus générales, dont la courbure totale dépend seulement de l'un des paramètres des lignes de longueur nulle. Ces surfaces mettant en défaut, comme les surfaces à courbure totale constante, la théorie classique de l'applicabilité fondée sur l'emploi des paramètres différentiels, j'indique (§ V) le moyen de décider si deux d'entre elles sont applicables l'une sur l'autre. J'établis ensuite une proposition relative au problème général de la détermination d'une surface d'après ses deux formes quadratiques fondamentales : *connaissant l'élément linéaire d'une sphère et l'une de ses familles de génératrices rectilignes, on n'a qu'une seule équation de Riccati à intégrer pour obtenir l'autre famille.*

Enfin, je rapporte (§ VI) les surfaces (O_k) à leurs lignes minima et à leurs asymptotiques. La solution du premier de ces problèmes repose sur cette propriété que l'*élément linéaire de toute surface* (O_k) *devient celui d'une sphère de rayon* 1 *quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne;* elle résulte de mes travaux antérieurs sur les surfaces isothermiques. La solution du second problème est fondée sur des formules dues à M. Goursat et conduit aux surfaces à réseau conjugué persistant obtenues par M. Drach.

I. — Identité des surfaces a courbures égales avec les surfaces gauches a génératrices isotropes.

1. Une surface étant rapportée à des coordonnées rectilignes (x, y, z), la condition nécessaire et suffisante pour que ses deux courbures principales aient même valeur algébrique en tous ses points est

$$\text{(M)}\quad 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]^2=0.$$

Or, les lignes de courbure ont pour équation différentielle

$$\begin{aligned}[(1+q^2)s-pqt]\,dy^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\,dx\,dy&\\ -[(1+p^2)s-pqr]\,dx^2&=0,\end{aligned}$$

et la relation précédente exprime précisément que le premier membre de cette équation est un carré parfait. Pour le réduire à une identité, il faudrait supposer

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2},$$

ce qui conduit, comme on sait, aux développables isotropes et à la sphère, seules surfaces dont les lignes de courbure soient indéterminées. En conséquence, l'équation (M) de Monge caractérise les surfaces *à lignes de courbures confondues en une seule famille,* mais non indéterminées. Prenant cette propriété pour nouvelle définition des surfaces (O_k) qui nous occupent, nous allons prouver géométriquement leur identité avec les surfaces gauches à génératrices isotropes, identité que M. Stäckel a établie par le calcul (*Leipziger Berichte,* 1896).

Les lignes de courbure, les lignes de longueur nulle ou lignes minima et les lignes asymptotiques d'une surface forment trois réseaux qui se divisent harmoniquement deux à deux. Or, on sait que, *si deux rayons d'un faisceau harmonique viennent à se confondre, un troisième rayon coïncide nécessairement avec les rayons confondus.* En conséquence, quand les lignes de courbure sont confondues, l'une des familles de lignes minima et l'une des familles d'asymptotiques coïncident avec la famille unique de lignes de courbure. Mais les normales menées à une surface le long d'une ligne de courbure forment une développable; si cette ligne de courbure est en même temps une ligne asymptotique, les normales de la surface sont des binormales; elles ne peuvent former une développable que si la ligne est plane; enfin, une ligne plane de longueur nulle est une droite isotrope. Donc *les surfaces* (O_k) *sont des surfaces à génératrices isotropes,* d'ailleurs non développables, puisque leurs lignes de courbure ne sont pas indéterminées.

Pour établir la réciproque, rappelons que, *quand deux rayons forment faisceau harmonique avec deux couples de rayons, si ces deux derniers couples ont un rayon commun et un seul, les deux premiers rayons sont confondus et coïncident avec le rayon commun.* Il suit de là que, quand *une* famille d'asymptotiques et *une* famille de lignes minima coïncident, les deux familles de lignes de courbure sont confondues et confondues avec ces deux familles coïncidantes. Mais sur toute surface gauche à génératrices isotropes, autre qu'une sphère, une famille de lignes de longueur nulle et une seule, celle des génératrices rectilignes, est en même temps une famille d'asymptotiques. Donc *toute surface gauche à génératrices isotropes, autre qu'une sphère, est une surface* (O_k).

Ajoutons qu'*à la famille des courbes qui sont à la fois asymptotiques et lignes de courbure correspond, dans la représentation sphérique des surfaces* (O_k) *une famille de lignes minima:* soient, en effet, (CA) une courbe de la famille et (Γ) sa représentation sphérique; la tangente en un point de (Γ) est parallèle à la tangente au point correspondant de (CA), puisque (CA) est ligne de courbure; elle lui est aussi perpendiculaire, puisque (CA) est une asymptotique; il suit de là que sa direction est une direction isotrope du plan tangent à la sphère.

II. — Représentation analytique des surfaces (O_k).

2. La théorie des transformations de contact suggère un mode de représentation des surfaces (O_k), qui n'exige aucune intégration et qui convient à toutes ces surfaces, en particulier à celles de

Serret. Pour l'exposer, convenons d'appeler *transformation de Bonnet* la correspondance qui existe entre une surface dont les coordonnées rectilignes sont α, β, ξ et celles dont α, β, ξ sont les coordonnées dans le système tangentiel d'Ossian Bonnet, où les équations $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ représentent les génératrices de la sphère dont chaque rayon est l'axe du plan mobile dans l'une de ses positions (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces,* t. I, p. 246).

Il est évident que les surfaces (O_k), ayant leurs lignes de courbure confondues, dérivent, par la transformation de S. Lie, des développables, qui ont leurs asymptotiques confondues. Or, cette transformation équivaut à une transformation d'Ampère, suivie d'une transformation de Bonnet. Pour passer des développables aux surfaces (O_k), il faut donc effectuer d'abord une transformation d'Ampère, ce qui conduit, comme on sait, aux surfaces à plan directeur, puis une transformation de Bonnet. En conséquence, cette dernière transformation change les surfaces à plan directeur en surfaces (O_k). Si donc on rapporte les surfaces (O_k) aux coordonnées tangentielles isotropes de Bonnet, on sera ramené à l'équation finie

$$\xi = A(\alpha)\beta + A_0(\alpha),$$

où A et A_0 sont deux fonctions arbitraires de α et l'on n'aura plus à opérer que des différentiations.

3. Pour retrouver et compléter ces conclusions, considérons avec O. Bonnet le plan représenté par l'équation

$$(\alpha+\beta)x + i(\beta-\alpha)y + (\alpha\beta-1)z + \xi = 0.$$

Si l'on pose

$$p = \xi'_\alpha, \qquad q = \xi'_\beta, \qquad r = \xi''_{\alpha^2}, \qquad s = \xi''_{\alpha\beta}, \qquad t = \xi''_{\beta^2},$$

la surface enveloppe de ce plan est déterminée par les formules

$$(1) \quad (\alpha\beta+1)z = \xi - p\alpha - q\beta, \quad x - iy = -\beta z - p, \quad x + iy = -\alpha z - q.$$

Ses rayons de courbure principaux et les centres de courbure correspondants sont fournis par les relations

$$(2)\left\{\begin{aligned} 2\rho &= (\alpha\beta+1)(z+s\pm\sqrt{rt}), & X - iY &= -p + \beta(s\pm\sqrt{rt}),\\ 2Z &= (\alpha\beta+1)z + (\alpha\beta-1)(s\pm\sqrt{rt}), & X + iY &= -q + \alpha(s\pm\sqrt{rt}).\end{aligned}\right.$$

Pour que les deux centres de courbure principaux coïncident, il faut et il suffit que le produit rt soit nul. Mais les deux solutions $r = 0$ et $t = 0$ ne sont pas distinctes, les deux variables indépendantes α et β jouant le même rôle. Nous obtiendrons donc toutes les surfaces (O_k) et celles-là seulement en prenant, par exemple, $t = 0$, ce qui donne bien

$$\xi = A(\alpha)\beta + A_0(\alpha). \tag{3}$$

En substituant cette expression de ξ dans les relations (1), on trouve leurs coordonnées sous forme entièrement explicite:

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{\begin{aligned} z &= \frac{A_0 - \alpha A'_0 - A'\alpha\beta}{\alpha\beta + 1}, \\ x - iy &= -\frac{(A_0 + A')\beta + A'_0}{\alpha\beta + 1}, \\ x + iy &= -\frac{\alpha(A_0 - \alpha A'_0) - A'\alpha^2\beta}{\alpha\beta + 1} - A; \end{aligned}\right.$$

les lettres accentuées indiquent ici des dérivées et nous leur donnerons toujours cette signification.

Si l'on pose pour un instant

$$\gamma = \frac{A' + A_0 - \alpha A'_0}{\alpha\beta + 1},$$

on reconnaît que les équations (I) deviennent

$$z + A' = \gamma, \qquad \alpha(x - iy) + A_0 + A' = \gamma, \qquad x + iy + A - \alpha A' = -\alpha\gamma,$$

et l'on met ainsi en évidence les génératrices isotropes $\alpha = \text{const.}$

L'expression générale de l'élément linéaire de la surface qu'enveloppe le plan (1) étant

$$ds^2 = [(z + s)\,d\alpha + t\,d\beta)][r\,d\alpha + (z + s)\,d\beta],$$

il suffit d'avoir égard à l'équation (3) pour trouver

$$ds^2 = \frac{A' + A_0 - \alpha A'_0}{\alpha\beta + 1}\left[(A''\beta + A''_0)\,d\alpha + \frac{A'_0 + A_0 - \alpha A'_0}{\alpha\beta + 1}\,d\beta\right]d\alpha.$$

Tel est l'élément linéaire des surfaces (O_k). L'une des familles de lignes minima est formée des courbes $\alpha = \text{const.}$ qui correspondent à une famille de lignes minima de la représentation sphérique; nous avons déjà (n° 1) expliqué ce fait. La détermination de la seconde famille de lignes minima dépend d'une équation de Riccati.

On arrive à des conclusions toutes semblables relativement aux lignes asymptotiques. En effet, leur équation différentielle

$$r\,d\alpha^2 + 2(z+s)\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2 = 0$$

se réduit ici à

$$d\alpha\left[(A''\beta + A''_0)\,d\alpha + 2\,\frac{A' + A_0 - \alpha A'_0}{\alpha\beta + 1}\,d\beta\right] = 0;$$

une famille d'asymptotiques est formée des génératrices isotropes $\alpha =$ const. L'autre famille dépend d'une équation de Riccati.

4. Introduisons maintenant l'hypothèse (3) dans les formules (2). Le rayon de courbure principal ρ et le centre (X, Y, Z) de l'unique sphère principale (Σ) qui correspondent à chaque point (α, β) d'une surface (O_k) sont déterminés comme suit :

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} 2\rho = A_0 - \alpha A'_0 + A', & X - iY = -A'_0, \\ 2Z = A_0 - \alpha A'_0 - A', & X + iY = \alpha A' - A. \end{cases}$$

Par suite, la courbure totale $K = \rho^{-2}$ ne dépend que de α, le centre de courbure principal est le même pour tous les points d'une génératrice isotrope $\alpha =$ const., et la surface des centres se réduit à une courbe (Γ) dont on connaît les coordonnées (X, Y, Z); on a immédiatement son arc S, dont la différentielle est

$$\pm\,dS = \frac{A'' - \alpha A''_0}{2} = d\rho;$$

on peut, en conséquence, prendre $\rho = S$ et l'on retrouve la génération indiquée par Monge : *toute surface à lignes de courbure confondues est l'enveloppe d'une sphère* (Σ) *dont le rayon* ρ *est égal à l'arc* S *de la courbe* (Γ) *décrite par le centre de cette sphère.*

Les surfaces de Serret sont caractérisées, parmi les surfaces à génératrices isotropes, par la propriété d'avoir leur courbure totale constante. Mais l'hypothèse $d\rho = 0$ entraîne $dS = 0$; donc *les surfaces de Serret sont celles des surfaces* (O_k) *pour lesquelles le lieu* (Γ) *des centres des sphères principales est une courbe minima.* Elles sont représentées par les formules (I), pourvu qu'on y introduise l'hypothèse

$$2\rho = A_0 - \alpha A'_0 + A' = \text{const.}$$

Il n'y a qu'à poser

$$A_0(\alpha) = A'_1(\alpha),$$

ce qui donne

$$A(\alpha) = \alpha A'_1 - 2A_1 + 2\rho\alpha,$$

et les formules (I) deviennent

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \quad A'_1 - \alpha A''_1 - \frac{2\rho\alpha\beta}{\alpha\beta + 1}, \\ x - iy &= - A''_1 - \frac{2\rho\beta}{\alpha\beta + 1}, \\ x + iy &= \alpha^2 A''_1 - 2\alpha A'_1 + 2A_1 - \frac{2\rho\alpha}{\alpha\beta + 1}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les expressions entièrement explicites des cordonnées des surfaces de Serret (¹).

III. — Un mode de représentation des courbes gauches. Courbure. Torsion.

5. Nous venons de rencontrer un système simple de formules, le système (II), qui peut représenter les coordonnées X, Y, Z d'une courbe gauche quelconque (Γ), et nous avons remarqué que, dans ce système, ρ n'est autre que l'arc de la courbe (Γ).

Ainsi, les équations qui le composent

$$(\Gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} X + iY &= \alpha A' - A, \qquad & 2Z &= A_0 - \alpha A'_0 - A', \\ X - iY &= - A'_0, & 2S &= A_0 - \alpha A'_0 + A', \end{aligned} \right.$$

fournissent une solution rationnelle de l'équation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dS^2,$$

la plus simple, semble-t-il, de toutes celles que l'on connaît (²).

(¹) Ces dernières formules s'accordent, au changement près de β en $-\beta^{-1}$, de A_1 en $-f(\alpha)$ et de ρ^2 en K^{-1} avec les formules (10″) de M. Stäckel (*Leipziger Berichte*, t. LIV, 1902; p. 116). Mais les lignes $\beta = \text{const.}$ ne sont pas des lignes de longueur nulle, comme ce géomètre l'indique par suite d'un calcul inexact de l'élément linéaire. (*Voir* ci-après, la fin de notre n° 10.)

(²) Si l'on introduit l'hypothèse $S = 0$ dans les formules (Γ), on retrouve les expressions classiques des coordonnées des courbes minima.

Elle diffère à peine de celle que M. Vessiot a donnée (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXL, 1905, p. 1381) et que voici :

$$X + iY = \alpha P' - P, \qquad 2Z = \alpha^2 Q' - P',$$
$$X - iY = \alpha Q' + Q, \qquad 2S = \alpha^2 Q' + P'.$$

Pour les ramener l'une à l'autre, il suffit, en effet, de poser

$$A(\alpha) = P(\alpha), \qquad A_0(\alpha) = -\alpha Q(\alpha).$$

Ayant à introduire ultérieurement le rapport

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0} = -\frac{P''}{\alpha Q'' + 2Q'},$$

dont l'expression est moins simple dans la notation de M. Vessiot, nous conserverons les formules (Γ), auxquelles nous avons été tout naturellement conduits.

Désignant toujours les dérivées par des lettres accentuées, on déduit des formules (Γ) les relations suivantes :

$$S' = \frac{A'' - \alpha A''_0}{2},$$

$$Y'Z'' - Z'Y'' = \frac{i}{4}[(\alpha^2 - 1)(A''A'''_0 - A''_0 A''') - A''^2 + A''^2_0],$$

$$Z'X'' - X'Z'' = \frac{1}{4}[(\alpha^2 + 1)(A''A'''_0 - A''_0 A''') - A''^2 - A''^2_0],$$

$$X'Y'' - Y'X'' = \frac{i}{4}[\quad -2\alpha(A''A'''_0 - A''_0 A''') + 2A''A''_0],$$

d'où résulte immédiatement

$$\sum (Y'Z'' - Z'Y'')^2 = (A''_0 A''' - A''A'''_0)\, S'^2.$$

La courbure de la courbe (Γ) a donc pour expression

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{\Sigma (Y'Z'' - Z'Y'')^2}}{S'^3} = 4\frac{\sqrt{A''_0 A''' - A''A'''_0}}{(A'' - \alpha A''_0)^2}.$$

6. On déduit de là que *toute courbe dont le rayon de courbure est constamment infini appartient à un plan isotrope.* En effet, l'équation

$$A''_0 A''' - A''A'''_0 = 0$$

a pour intégrale générale

$$A_0 = lA + m\alpha + n,$$

l, m, n désignant trois constantes. En raison de cette liaison entre A_0 et A, les formules (Γ) deviennent

$$X + iY = \alpha A' - A, \quad X - iY = -lA' - m, \quad 2Z = l(A - \alpha A') - A' + n.$$

Elles entraînent visiblement l'équation

$$(l^2 - 1)X + i(l^2 + 1)Y + 2lZ = ln + m,$$

qui est celle d'un plan isotrope. On pourrait d'ailleurs établir cette proposition et sa réciproque sans faire usage du mode de représentation que nous employons ici.

Nous déduirons encore des formules (Γ) l'expression de la torsion, qui est la suivante :

$$\frac{1}{T} = i\frac{(A''_0 A^{\text{IV}} - A'' A^{\text{IV}}_0)(A'' - \alpha A''_0) - 2(A''_0 A''' - A'' A'''_0)(A''_0 - \alpha A'''_0 + A''')}{(A''_0 A''' - A'' A'''_0)(A'' - \alpha A''_0)^2}.$$

En vue de ce qui suivra, nous allons transformer ce résultat en introduisant les fonctions

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0}, \qquad \mu = \frac{\lambda''}{\lambda'}.$$

Si l'on exprime A'', A''' et A^{IV} au moyen de λ, λ', μ et des dérivées de A_0, on trouve après réductions

$$\frac{1}{T} = i\frac{\mu(\lambda - \alpha) - 2(\lambda' + 1)}{A''_0(\lambda - \alpha)^2}.$$

En conséquence, pour que la courbe représentée par les formules (Γ) soit plane, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda''(\lambda - \alpha) - 2\lambda'(\lambda' + 1) = 0.$$

C'est là une équation du second ordre pour la fonction λ; son intégrale générale est une relation involutive

$$l\lambda\alpha + m(\lambda + \alpha) + n = 0$$

à coefficients constants entre α et λ, c'est-à-dire $A'' : A''_0$. On l'obtient en écrivant qu'il existe entre les différentielles dX, dY

et dZ tirées des relations (Γ) une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Si λ est indépendant de α, ce qui arrive quand $ln - m^2$ est nul, le rayon de courbure R est infini et la courbe est tracée sur un plan isotrope; car, d'après ce qui précède, on a

$$\frac{1}{R^2} = \frac{16\lambda'}{A_0''^2(\lambda - \alpha)^4}.$$

Rapprochant cette expression de celle de T, nous obtenons

$$\frac{R^2}{T^2} = -\frac{[\mu(\lambda - \alpha) - 2(\lambda' + 1)]^2}{16\lambda'},$$

relation qui nous servira un peu plus loin.

IV. — Les deux nappes d'un périsphère réglé. Cas d'applicabilité.

7. D'après la génération indiquée par Monge et rappelée au n° 4, *toute surface à lignes de courbure confondues est l'enveloppe d'une sphère* (Σ) *dont le rayon* ρ *est égal à l'arc* S *de la courbe* (Γ) *décrite par le centre de cette sphère*. Ainsi, les surfaces (O_k) sont des *périsphères;* mais, comme la caractéristique de la sphère enveloppée, au lieu d'être un cercle proprement dit, dégénère en deux droites isotropes, le périsphère est *réglé* et se compose de deux nappes. C'est l'étude de ces deux nappes qui va nous occuper.

Considérons la sphère (Σ) représentée par l'équation

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 = \rho^2,$$

qu'on peut écrire

$$[x + iy - (X + iY)][x - iy - (X - iY)] + (z - Z)^2 = \rho^2,$$

et où X, Y, Z, ρ ont les expressions fournies par les formules (II) :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} X + iY = \alpha A' - A, & 2Z = A_0 - \alpha A_0' - A', \\ X - iY = -A_0', & 2\rho = A_0 - \alpha A_0' + A'. \end{cases}$$

Le plan radical (P) de la sphère (Σ) et de la sphère infiniment voisine est, comme nous le savons, tangent à la sphère (Σ); eu égard aux relations (II), son équation est

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}''_0[x+iy-(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})]-\alpha\mathrm{A}''[x-iy-(\mathrm{X}-i\mathrm{Y})]\\&\qquad\qquad+(z-\mathrm{Z})(\alpha\mathrm{A}''_0+\mathrm{A}'')=\rho(\mathrm{A}''-\alpha\mathrm{A}''_0).\end{aligned}\right.$$

Pour trouver les deux génératrices contenues dans ce plan, nous poserons

$$x+iy-(\mathrm{X}+i\mathrm{Y})=-\frac{2\rho uv}{u-v},\qquad x-iy-(\mathrm{X}-i\mathrm{Y})=\frac{2\rho}{u-v},$$

$$z-\mathrm{Z}=\rho\,\frac{u+v}{u-v},$$

ce qui vérifie identiquement l'équation de la sphère (Σ). Substituons dans l'équation (P); il vient

$$(v-\alpha)(\mathrm{A}''_0\,u-\mathrm{A}'')=0.$$

Il y a donc deux solutions analytiquement distinctes.

Première solution. — Le paramètre u reste arbitraire et $v=\alpha$. On obtient ainsi une première génératrice

$$(\mathrm{G}_1)\left\{\begin{aligned}&x_1+iy_1=\mathrm{X}+i\mathrm{Y}-\frac{2\rho\alpha u}{u-\alpha},\qquad x_1-iy_1=\mathrm{X}-i\mathrm{Y}+\frac{2\rho}{u-\alpha},\\&\qquad\qquad z_1=\mathrm{Z}+\rho\,\frac{u+\alpha}{u-\alpha}.\end{aligned}\right.$$

Quand u varie ainsi que α, ces formules représentent une surface (E_1), qui est une première nappe du périsphère réglé.

Seconde solution. — Le paramètre v reste arbitraire et l'on a

$$u=\frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{A}''_0}=\lambda.$$

On obtient ainsi une seconde génératrice

$$(\mathrm{G}_2)\left\{\begin{aligned}&x_2+iy_2=\mathrm{X}+i\mathrm{Y}-\frac{2\rho\lambda v}{\lambda-v},\qquad x_2-iy_2=\mathrm{X}-i\mathrm{Y}+\frac{2\rho}{\lambda-v},\\&\qquad\qquad z_2=\mathrm{Z}+\rho\,\frac{\lambda+v}{\lambda+v},\end{aligned}\right.$$

dont le lieu est la seconde nappe (E_2) de l'enveloppe cherchée.

8. *Remarque.* — Ce qui précède implique l'hypothèse $\mathrm{A}''_0\neq 0$.

Supposons A''_0 dans un rapport constant l avec A'', de sorte qu'il suffira de faire $l = 0$ pour annuler A''_0. Nous aurons alors comme ci-dessus (n° 6)

$$A_0 = lA + m\alpha + n,$$

et en vertu des formules (II), qui donnent ici

$$(\text{II } bis)\quad \begin{cases} X + iY = \alpha A' - A, & 2Z = l(A - \alpha A') - A' + n, \\ X - iY = -lA' - m, & 2\rho = l(A - \alpha A') + A' + n, \end{cases}$$

l'équation du plan radical (P) deviendra

$$\begin{aligned} lA''(x + iy + A - \alpha A') - \alpha A''(x - iy + lA' + m) \\ + A''(l\alpha + 1)\left[z - \frac{l(A - \alpha A') - A' + n}{2}\right] \\ + A''(l\alpha - 1)\frac{l(A - \alpha A') + A' + n}{2} = 0. \end{aligned}$$

Si A'' est nul, et par suite aussi A''_0, cette équation se réduit à une identité, comme l'équation en u. En effet, dans le cas présent, les relations (II *bis*) donnent pour X, Y, Z et ρ des valeurs constantes; c'est-à-dire que la sphère (Σ) est fixe.

Supposons désormais $A'' \neq 0$. Le centre (X, Y, Z) de la sphère enveloppée (Σ) n'est plus fixe; mais son lieu (Γ) est, ainsi qu'on l'a déjà vu, une courbe tracée sur le plan isotrope

$$(l^2 - 1)x + i(l^2 + 1)y + 2lz = ln + m.$$

Quant au plan radical (P), son équation, après suppression du facteur commun A' et simplification, se réduit à

$$l(x + iy) + z - n - \alpha(x - iy - lz + m) = 0.$$

Elle montre que ce plan passe par la droite isotrope

$$l(x + iy) + z - n = 0, \qquad x - iy - lz + m = 0,$$

qui est une droite fixe du plan de la courbe (Γ). La nappe (E_2) se réduit alors à cette droite. Ainsi, *quand le rapport*

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0}$$

est constant sans être indéterminé, le lieu (Γ) *des centres des* *sphères enveloppées appartient à un plan isotrope et l'une des nappes de l'enveloppe se réduit à une droite isotrope fixe.* Mais nous avons vu plus haut (n° 6) que, si la courbe (Γ) appartient à un plan isotrope, le rapport λ est constant. En conséquence, *quand les sphères enveloppées ont leurs centres sur un plan isotrope, l'une des nappes de l'enveloppe se réduit à une droite isotrope fixe.*

9. Faisons une hypothèse plus générale, savoir que les sphères enveloppées aient leurs centres dans un plan (Π). Le plan radical (P), dans chacune de ses positions, coupe le plan (Π) suivant une droite. Si cette droite n'est pas isotrope, elle ne se confond avec aucune des deux droites isotropes (G_1) et (G_2) du plan (P) qui engendrent les deux nappes du périsphère. Elle est donc bissectrice de ces deux droites et, comme le plan (Π) qui la contient est perpendiculaire à (P), ce plan est un plan de symétrie pour les deux droites (G_1) et (G_2); en conséquence, les deux nappes (E_1) et (E_2) sont symétriques par rapport au plan (Π), c'est-à-dire au plan qui contient les centres des sphères enveloppées.

Supposons maintenant que le plan radical (P) et le plan (Π) se coupent suivant une droite isotrope. Le point commun aux deux droites (G_1) et (G_2) décrit une développante de la courbe (Γ); cette développante, qui est plane comme (Γ) et qui a pour tangente l'intersection des deux plans (P) et (Π), c'est-à-dire une droite isotrope, est elle-même une droite isotrope. Or, il est aisé de voir qu'*une droite isotrope ne peut être la développante d'une courbe* (Γ), *autre qu'elle-même, que si cette courbe* (Γ) *appartient à un plan isotrope.*

Ce dernier cas ayant été traité plus haut, il nous reste à supposer que les sphères enveloppées ont leurs centres sur une droite isotrope (Γ). A la vérité, ce cas échappe à notre analyse, parce que les formules (Γ) ne peuvent pas représenter une droite; si l'on cherche, en effet, à rendre constants les rapports des dérivées des coordonnées X, Y, Z, on trouve $A'' = A''_0 = 0$, et les coordonnées X, Y, Z se réduisent elles-mêmes à des constantes. Mais la solution est évidente : quand les sphères enveloppées ont leurs centres sur une droite non isotrope, leurs rayons étant égaux à la longueur de cette droite comptée à partir d'une origine fixe O, toutes ces sphères passent par le point O et ont en commun les droites isotropes issues du point O qui appartiennent au plan mené par ce point perpendiculairement à la droite des centres. Si la droite des centres est une droite isotrope, sa longueur est nulle ; les sphères dont elle porte les centres sont des sphères de rayon nul, qui la contiennent et se raccordent les unes aux autres en chacun de ses points. L'enveloppe cherchée se réduit alors à cette droite elle-même.

10. *Calcul des éléments linéaires des deux nappes.* — Nous commencerons par représenter *indifféremment* les deux nappes au moyen des formules

$$x = X + a\rho, \qquad y = Y + b\rho, \qquad z = Z + c\rho,$$

en posant

$$(\sigma) \qquad a = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad b = i\frac{1 + uv}{u - v}, \qquad c = \frac{u + v}{u - v},$$

On trouve immédiatement

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + d\rho^2 + \rho^2\, d\sigma^2 + d\rho\,\Sigma 2a\, dX + \rho\,\Sigma 2\, dX\, da,$$

en désignant par

$$d\sigma^2 = \frac{4\, du\, dv}{(u - v)^2}$$

l'élément linéaire de la sphère de rayon 1 que représentent les équations (σ).

Rappelons que la différentielle de ρ est égale à celle de l'arc de la courbe (X, Y, Z); il vient alors

$$ds^2 = 4\frac{\rho^2\, du\, dv}{(u - v)^2} + 2\, d\rho^2 + d\rho\,\Sigma 2a\, dX + \rho\,\Sigma 2\, dX\, da.$$

D'après les expressions de X, Y, Z et de a, b, c, on a

$$\begin{aligned}
2\, dX &= (\alpha A'' - A''_0)\, d\alpha, & (u - v)^2\, da &= (1 - u^2)\, dv - (1 - v^2)\, du,\\
2\, dY &= -\, i(\alpha A'' + A''_0)\, d\alpha, & (u - v)^2\, db &= i[(1 + u^2)\, dv - (1 + v^2)\, du],\\
2\, dZ &= -\, (A'' + \alpha A''_0)\, d\alpha, & (u - v)^2\, dc &= 2(u\, dv - v\, du).
\end{aligned}$$

Calculant à l'aide des équations (σ) et de ces relations les deux derniers termes de ds^2, on trouve

$$\Sigma 2 a\, dX = \frac{A''(2\alpha - u - v) + A''_0[2uv - \alpha(u+v)]}{u - v}\, d\alpha,$$

$$\Sigma 2\, dX\, da = 2\frac{(A''_0 u - A'')(u-\alpha)\, dv - (A''_0 v - A'')(v-\alpha)\, du}{(u-v)^2}\, d\alpha,$$

de sorte qu'il vient

$$ds^2 = \frac{4\rho^2\, du\, dv}{(u-v)^2} + 2\, d\rho^2 + \frac{A''(2\alpha - u - v) + A''_0[2uv - \alpha(u+v)]}{u-v}\, d\rho\, d\alpha$$
$$+ 2\rho \frac{(A''_0 u - A'')(u-\alpha)\, dv - (A''_0 v - A'')(v-\alpha)\, du}{(u-v)^2}\, d\alpha;$$

en introduisant la fonction auxiliaire

$$\lambda = \frac{A''}{A''_0},$$

nous trouvons finalement

$$ds^2 = \frac{4\rho^2\, du\, dv}{(u-v)^2} + 2\, d\rho^2 + A''_0 \frac{\lambda(2\alpha - u - v) + 2uv - \alpha(u+v)}{u-v}\, d\rho\, d\alpha$$
$$+ 2\rho A''_0 \frac{(u-\lambda)(u-\alpha)\, dv - (v-\lambda)(v-\alpha)\, du}{(u-v)^2}\, d\alpha.$$

Distinguons maintenant les deux nappes. Faisons d'abord $v = \alpha$, afin d'obtenir l'élément linéaire de (E_1). A cause de l'identité

$$(\alpha A''_0 - A'')\, d\alpha = A''_0(\alpha - \lambda)\, d\alpha = -2\, d\rho,$$

le troisième terme de ds^2 détruit le second et il reste

$$ds_1^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(u-\alpha)^2} + 2\rho A''_0 \frac{u-\lambda}{u-\alpha}\, d\alpha^2.$$

Pour avoir l'élément linéaire de la nappe (E_2), il faut faire $u = \lambda$; le troisième terme de ds^2 détruit encore le second, et il vient

$$ds_2^2 = \frac{4\rho^2\, d\lambda\, dv}{(v-\lambda)^2} - 2\rho A''_0 \frac{v-\alpha}{v-\lambda}\, d\lambda\, d\alpha.$$

On voit que, si $\lambda = \text{const.}$, ce dernier élément linéaire se réduit à zéro; nous avons reconnu, en effet, que, dans ce cas, la nappe (E_2) se réduit à une droite isotrope (n° 9).

Les surfaces de Serret correspondent, comme on sait, à l'hypothèse $2\rho = \text{const.}$, qui entraîne $\lambda = \alpha$. Comme nous avons posé dans ce cas $A_0(\alpha) = A'_1(\alpha)$, nous obtenons pour les éléments linéaires des deux nappes

$$ds_1'^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(u-\alpha)^2} + 2\rho A_1''' d\alpha^2,$$

$$ds_2'^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(v-\alpha)^2} - 2\rho A_1''' d\alpha^2.$$

Ces deux nappes, ayant même courbure totale constante ρ^{-2}, sont applicables l'une sur l'autre. On peut les considérer comme formant, à elles deux, une *surface-canal,* puisqu'elles constituent l'enveloppe d'une sphère de rayon constant ρ.

11. *Applicabilité des deux nappes.* — D'après ce qui a été expliqué plus haut (n° 9), les deux nappes (E_1) et (E_2) sont symétriques et par suite applicables l'une sur l'autre, quand le lieu (Γ) des centres des sphères enveloppées appartient à un plan non isotrope. Pour vérifier ce fait sur les expressions de ds_1^2 et de ds_2^2, rappelons la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit plane : nous avons trouvé (n° 6) que λ et α doivent être liés par une relation involutive à coefficients constants

$$l\lambda\alpha + m(\lambda+\alpha) + n = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda = -\frac{m\alpha+n}{l\alpha+m}.$$

Si $l^2 - mn$ est différent de zéro, c'est-à-dire si le plan de (Γ) n'est pas un plan isotrope, λ n'est pas indépendant de α. Nous pourrons donc effectuer sur l'élément linéaire ds_2^2 la double substitution

$$\lambda = -\frac{m\alpha+n}{l\alpha+m}, \qquad v = -\frac{mu+n}{lu+m}.$$

Les coefficients de ρ^2 dans ds_1^2 et dans ds_2^2 étant les éléments linéaires d'une sphère de rayon 1, il est bien connu que cette double substitution rend le second identique au premier; il reste donc à vérifier qu'on a

$$\frac{u-\lambda}{u-\alpha}d\alpha + \frac{v-\alpha}{v-\lambda}d\lambda = 0,$$

ce qui résulte des expressions assignées à λ et à v

Ce cas particulier examiné, cherchons à quelle condition il est possible de transformer l'un dans l'autre les deux éléments linéaires

$$ds_1^2 = \frac{4\rho^2\, d\alpha\, du}{(u-\alpha)^2} + 2\rho A''_0 \frac{u-\lambda}{u-\alpha} d\alpha^2,$$

$$ds_2^2 = \frac{4\rho^2\lambda'\, d\alpha\, dv}{(v-\lambda)^2} - 2\rho A''_0 \lambda' \frac{v-\alpha}{v-\lambda} d\alpha^2,$$

où λ' désigne la dérivée de la fonction

$$\lambda = \frac{A''(\alpha)}{A''_0(\alpha)}.$$

En convenant d'attribuer à la lettre α la même signification dans ces deux éléments linéaires, nous ne traitons pas dans toute sa généralité le problème de l'application des deux nappes (E_1) et (E_2) l'une sur l'autre; mais nous faisons, comme il est naturel, correspondre entre elles les deux génératrices (G_1) et (G_2) qui appartiennent à la même sphère enveloppée.

Supprimant le facteur commun $4\rho^2\, d\alpha$, nous obtenons l'équation aux différentielles totales

$$\frac{du}{(u-\alpha)^2} + \frac{A''_0}{2\rho}\frac{u-\lambda}{u-\alpha} d\alpha = \frac{\lambda'\, dv}{(v-\lambda)^2} - \frac{A''_0\lambda'}{2\rho}\frac{v-\alpha}{v-\lambda} d\alpha,$$

d'où l'on déduit visiblement

$$\frac{1}{u-\alpha} = \frac{\lambda'}{v-\lambda} + \frac{\mu(\alpha)}{2}.$$

Substituons l'expression ainsi obtenue pour u dans l'équation précédente. Il vient, après réductions,

$$\frac{\lambda'\mu - \lambda''}{v-\lambda} - \frac{\mu'}{2} + \frac{\mu^2}{4} + \frac{A''_0}{2\rho}[2(\lambda'+1) - (\lambda-\alpha)\mu] = 0.$$

Le premier terme seul dépend de v. En égalant son numérateur à zéro, on détermine la fonction inconnue

$$\mu(\alpha) = \frac{\lambda''}{\lambda'},$$

et il reste la condition d'applicabilité cherchée

$$(1) \qquad 2\mu' - \mu^2 = \frac{A''_0}{\rho}[2(\lambda'+1) - (\lambda-\alpha)\mu]$$

En raison de l'expression trouvée pour μ et de la signification de λ, cette relation contient les dérivées *du cinquième ordre* des fonctions A et A_0. Pour l'intégrer une première fois et l'interpréter, remarquons que l'expression qui figure entre crochets au second membre, savoir :

$$\mathfrak{M} = 2(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu,$$

exprime par son évanouissement que le lieu (Γ) des centres des sphères enveloppées appartient à un plan non isotrope (n° 6). Rappelons aussi qu'en vertu des équations (II) et de l'hypothèse $\rho = S$, on a

$$2\rho' = 2S' = A'' - \alpha A''_0 = A''_0(\lambda - \alpha),$$

de sorte que la condition (1) s'écrit

$$(1)' \qquad 2\mu' - \mu^2 = \frac{2S'\mathfrak{M}}{(\lambda - \alpha)S}.$$

Or, si l'on se reporte à la relation précédemment établie (n° 6) entre le rayon de courbure R et le rayon de torsion T d'une courbe représentée par les mêmes équations que la courbe (Γ), on voit qu'en introduisant le symbole $\mathfrak{M}$ on a

$$\frac{R^2 S^2}{T^2} = -\frac{\mathfrak{M}^2 S^2}{16\lambda'}.$$

Je dis qu'en égalant à zéro la dérivée logarithmique du second membre, on obtient précisément la condition (1)'. Si l'on calcule, en effet, la dérivée

$$\mathfrak{M}' = 2\lambda'' - (\lambda' - 1)\mu - (\lambda - \alpha)\mu'$$

et qu'on y remplace λ'' par $\mu\lambda'$, il vient

$$\mathfrak{M}' = \mu(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu'.$$

Dès lors on a

$$\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} + \frac{S'}{S} - \frac{\lambda''}{2\lambda'} = \frac{\mu(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu'}{2(\lambda' + 1) - (\lambda - \alpha)\mu} + \frac{S'}{S} - \frac{\mu}{2} = 0.$$

Réunissant enfin les deux termes extrêmes, on trouve

$$\frac{(\mu^2 - 2\mu')(\lambda - \alpha)}{2\mathfrak{M}} + \frac{S'}{S} = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (1)'. En conséquence, *pour que les deux nappes d'un périsphère réglé, supposées n'avoir pas leur courbure totale constante, soient applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes qui appartiennent à la même sphère enveloppée, il faut et il suffit qu'il existe entre le rayon de courbure* R, *le rayon de torsion* T *et l'arc* S *de la courbe* (Γ), *lieu des centres des sphères enveloppées, une relation de la forme*

$$\frac{RS}{T} = \text{const.}$$

Il suffit de supposer la constante égale à zéro pour être ramené au cas particulier d'applicabilité où, la courbe (Γ) étant tracée sur un plan non isotrope, les deux nappes sont symétriques par rapport à ce plan.

V. — Digression sur une classe étendue de surfaces et sur deux problèmes d'applicabilité.

12. D'après ce qui a été vu plus haut (n° 4), les surfaces à lignes de courbure confondues rentrent dans la classe plus générale des surfaces dont la courbure totale K ne dépend que de l'un des paramètres des lignes minima.

Ces surfaces que nous appellerons, pour abréger, *surfaces* (K_m), doivent être remarquées; car, en vertu de leur définition même, les deux paramètres différentiels $\Delta_1 K$ et $\Delta_2 K$, calculés à l'aide de l'élément linéaire ds^2, sont identiquement nuls. En conséquence, les surfaces (K_m), comme les surfaces à courbure totale constante, qui n'en sont qu'une variété, mettent en défaut la théorie classique de l'applicabilité, fondée sur l'emploi des paramètres différentiels. Il convient donc d'indiquer comment on reconnaîtra si deux surfaces (K_m) données sont applicables l'une sur l'autre.

Remarquons d'abord que, quel que soit le système de coordonnées curvilignes auxquelles une surface est rapportée, on n'a que des différentiations à effectuer pour reconnaître si la courbure totale K de cette surface est ou n'est pas constante; et, dans ce dernier cas, on sait si elle conserve la même valeur sur chacune des courbes d'une famille de lignes minima : il faut et il suffit, en effet, que le paramètre $\Delta_1 K$ calculé à l'aide de l'élément linéaire se réduise à zéro sans que les deux dérivés de K soient nulles. S'il en est ainsi, on peut prendre pour l'une des coordonnées curvilignes v la fonction K elle-même, l'autre famille de lignes coordonnées ($t = \text{const.}$) restant quelconque. L'élément linéaire acquiert alors la forme

$$ds^2 = 2F\,dt\,dv + G\,dv^2,$$

puisque les lignes $v = \text{const.}$ sont des lignes minima. La courbure totale est représentée par la formule générale

$$K = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial v} + BB_1 - A_1 C\right), \tag{1}$$

où les lettres mises en évidence désignent les symboles de Christoffel. Mais, comme E est nul, on trouve

$$B = \frac{G'_t}{2F}, \qquad A = \frac{F'_t}{F}, \qquad B_1 = 0, \qquad A_1 = 0,$$

de sorte que la relation précédente, où l'on fait $K = v$, devient

$$vF = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{G'_t}{2F} - \frac{F'_v}{F}\right).$$

Par une quadrature de différentielle ordinaire, on obtiendra une fonction u telle qu'on ait

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, v),$$

ce qui permettra d'écrire

$$vu = \frac{G'_t - 2u''_{vt}}{2u'_t}.$$

Chassant le dénominateur et intégrant par rapport à t, nous trouverons

$$G = vu^2 + 2u'_v + V,$$

V étant une fonction déterminée de v. Il vient alors

$$ds^2 = 2u'_t\,dt\,dv + (vu^2 + 2u'_v + V)\,dv^2,$$

ce que l'on peut écrire

$$ds^2 = 2\,du\,dv + (vu^2 + V)\,dv^2 \tag{2}$$

Telle est donc la forme à laquelle on pourra toujours ramener l'élément linéaire d'une surface (K_m) dont la courbure totale n'est pas constante.

Considérons maintenant une autre surface (K_m). On mettra son élément linéaire sous la forme

$$ds_1^2 = 2\,du_1\,dv_1 + (v_1 u_1^2 + V_1)\,dv_1^2.$$

Pour appliquer cette surface, dont la courbe totale est v_1, sur la précédente, dont la courbure totale est v, on doit faire $v_1 = v$. L'identification des deux éléments linéaires donne alors l'équation

$$2\,du_1 + [vu_1^2 + V_1(v)]\,dv = 2\,du + [vu^2 + V(v)]\,dv,$$

qui exige visiblement que l'on ait

$$u_1 = u + W(v).$$

En substituant cette expression de u_1, on trouve

$$2W' + 2uvW + vW^2 + V_1(v) = V(v).$$

En conséquence, la fonction W se réduit à zéro et il reste, comme seule condition d'applicabilité, $V_1(v) = V(v)$.

13. Voici encore deux résultats que met en évidence l'expression (2) trouvée pour l'élément linéaire d'une surface (K_m).

1° *Toute surface dont la courbure totale ne dépend que de l'un des paramètres des lignes minima est applicable sur une infinité de surfaces à génératrices isotropes dépendant d'une fonction arbitraire.*

Considérons, en effet, une surface réglée, représentée par les formules

$$x = \xi + \lambda u, \qquad y = \upsilon + \mu u, \qquad z = \zeta + \nu u.$$

Pour identifier son élément linéaire avec l'expression, on doit établir entre les six fonctions ξ, υ, ζ; λ, μ, ν de la variable v et leurs dérivées premières *les relations nécessaires et suffisantes*

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0, \qquad \lambda\xi' + \mu\upsilon' + \nu\zeta' = 1, \qquad \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = v,$$
$$\lambda'\xi' + \mu'\upsilon' + \nu'\zeta' = 0, \qquad \xi'^2 + \upsilon'^2 + \zeta'^2 = V,$$

qui sont au nombre de cinq. Il reste donc une fonction arbitraire.

2° *L'élément linéaire de toute surface* (K_m), *multipliée par la courbure totale, devient l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1.

En effet, d'après la formule générale (1) rappelée plus haut (n° **12**), la courbure totale de la forme quadratique

$$2v\,du\,dv + (v^2u^2 + v\mathrm{V})\,dv^2$$

est bien égale à 1.

14. On sait que deux surfaces, dont les courbures totales sont constantes et égales, sont applicables l'une sur l'autre d'une triple infinité de manières, mais que, pour réaliser cette application, il faut trouver une fonction de deux variables satisfaisant à *deux équations de Riccati*. Tout revient, en effet, à chercher les génératrices rectilignes d'une sphère, connaissant son élément linéaire, et c'est à ce même problème qu'on est ramené toutes les fois qu'on doit *déterminer une surface connaissant ses deux formes quadratiques fondamentales* [1].

En raison de l'importance de cette question, il ne sera peut-être pas sans intérêt d'établir la proposition suivante :

Théorème. — *Connaissant l'élément linéaire d'une sphère de rayon* 1 *et l'une des familles de lignes minima, pour mettre cet élément linéaire sous la forme* $4(\alpha - \beta)^{-2}\,d\alpha\,d\beta$, *on n'a à intégrer qu'une seule équation de Riccati.*

En effet, on sait, par hypothèse, ramener l'élément linéaire de la sphère donnée à la forme

$$ds^2 = 2\mathrm{F}\,dt\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

En répétant avec une légère modification les calculs du n° **12**, on reconnaît que cette expression peut s'écrire

$$ds^2 = 2\,du\,dv + (u^2 + \mathrm{V})\,dv^2.$$

Il s'agit alors de déterminer α et β en fonction de u et de v, de

---

[1] *Voir* à ce sujet ma Note intitulée : *Détermination d'une surface d'après ses deux formes quadratiques fondamentales* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXXVII, 1898).

façon qu'on ait identiquement

$$\frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = 2\,du\,dv + (u^2+\mathrm{V})\,dv^2.$$

Or ceci exige que α ou β ne dépende que de v. Nous poserons donc

$$\alpha = \alpha(v), \qquad d\alpha = \alpha'(v)\,dv,$$

et il viendra

$$\frac{4\alpha'\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = 2\,du + (u^2+\mathrm{V})\,dv.$$

Cette équation aux différentielles totales équivaut au système

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{2\alpha'}{(\alpha-\beta)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{u^2+\mathrm{V}}{2},$$

dont la condition d'intégrabilité donne

$$(4) \qquad u = \frac{2\alpha'}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha''}{\alpha'}.$$

Cette expression de u vérifie identiquement la première des équations (3). En la substituant dans la seconde, on trouve, après réductions,

$$(5) \qquad \frac{d}{dv}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha''}{\alpha'}\right)^2 = \frac{\mathrm{V}}{2},$$

ce qui est une équation de Riccati relativement à la fonction $\alpha'' : \alpha'$ de la variable v. Connaissant $\alpha'' : \alpha'$, on obtiendra α par deux quadratures et l'équation (4) donnera β en fonction de u et de v. Si l'on met l'équation ci-dessus sous la forme équivalente

$$\sqrt{\alpha'}\,\frac{d^2}{dv^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}\right) = -\frac{\mathrm{V}}{2},$$

son premier membre est la dérivée schwarzienne de α; or, on sait que, si l'on connaît une solution particulière α_0 de cette équation, son intégrale générale est

$$\alpha = \frac{l\alpha_0+m}{n\alpha_0+p},$$

l, m, n, p étant des constantes arbitraires ($lp - mn \neq 0$).

Ceci étant rappelé, pour réaliser l'application de deux surfaces à courbure totale constante ($\mathrm{K}=1$), connaissant sur chacune d'elles une famille de lignes minima, on donnera à leurs éléments linéaires les formes respectives

$$ds^2 = 2\,du\,dv + [u^2 + V(v)]\,dv^2, \qquad ds_1^2 = 2\,du_1\,dv_1 + [u_1^2 + V_1(v_1)]\,dv_1^2,$$

et l'on réalisera l'application de ces deux surfaces sur la sphère de rayon 1 par le procédé qui vient d'être exposé, ce qui exigera qu'on intègre *séparément* deux équations de Riccati du type (5), différant seulement par le nom de la variable et par le second membre.

VI. — Les surfaces a lignes de courbure confondues rapportées a leurs lignes minima et a leurs asymptotiques.

15. Pour rapporter les surfaces (O_k) à leurs lignes minima ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$), nous emploierons les formules qui dérivent de l'analyse par laquelle O. Bonnet a obtenu l'équation aux dérivées partielles des surfaces admettant l'élément linéaire $4\varphi^2(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta$. En se reportant à mes *Recherches sur les surfaces isothermiques* (*Annales de l'École normale supérieure*, 1905 et 1906), on verra qu'on peut se donner arbitrairement une fonction $\tau(\alpha, \beta)$. Si l'on désigne par p, q la solution générale du système

$$(1) \qquad \sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{q}}{\partial\alpha}, \qquad \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta},$$

qui revient à cet autre

$$(2) \qquad \sqrt{q} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta},$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\tau'_\alpha}{2\tau}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \tau\sqrt{p} = 0,$$

et par p_1, q_1 une seconde solution, également générale, de ce même système, on aura l'expression la plus générale des coordonnées (x, y, z) d'une surface rapportée à ses lignes minima en effectuant les trois quadratures

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} x + iy &= \xi = \int p\,d\alpha + q\,d\beta, \\ x - iy &= \xi_1 = \int p_1\,d\alpha + q_1\,d\beta, \\ z &= i\int \sqrt{pp_1}\,d\alpha + \sqrt{qq_1}\,d\beta. \end{aligned}\right.$$

L'élément linéaire prend alors la forme

$$(5)\qquad ds^2 = (\sqrt{pq_1} - \sqrt{qp_1})^2\, d\alpha\, d\beta = 4\varphi^2\, d\alpha\, d\beta.$$

On voit que p et q désignent les dérivées premières de ξ, et que, si s est sa dérivée seconde par rapport à α et à β, on a

$$(6)\qquad \tau = \frac{s^2}{4pq}.$$

La surface est pleinement déterminée de forme, à une symétrie près, si l'on se donne la fonction φ et la coordonnée isotrope ξ, qui sont liées par l'*équation de déformation*

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) - \frac{s^2}{\varphi^4} + \frac{4pq}{\varphi^4}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0.$$

En outre, la courbure moyenne Ω et la courbure totale K sont données respectivement par les formules

$$(8)\qquad \Omega^2 = -\frac{\tau}{\varphi^2},$$

$$(9)\qquad K = -\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

d'où résulte pour l'élément linéaire l'expression

$$(10)\qquad ds^2 = -\frac{4\tau\, d\alpha\, d\beta}{\Omega^2}.$$

Enfin l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right)d\beta^2 = 0.$$

16. Ces généralités rappelées, arrivons aux surfaces (O_k). Leurs deux familles de lignes de courbure étant confondues avec les courbes minima $\alpha = \text{const.}$, l'équation (11) entraîne

$$(11)'\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire que le rapport $q : \varphi^2$ est fonction de α seulement. L'équation de déformation se réduit alors à

$$(12)\qquad \tau = \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

par où l'on vérifie à nouveau que le carré de la courbure moyenne est égal à la courbure totale

$$\Omega^2 = K. \tag{13}$$

Réciproquement, l'égalité des deux rayons de courbure principaux, qui s'exprime par $\Omega^2 = K$, exige, en vertu de l'équation de déformation, qu'on ait

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right) = 0$$

c'est-à-dire que les deux familles de lignes de courbure se confondent avec l'une des familles de lignes minima.

Pour ne rien emprunter aux développements qui précèdent le présent paragraphe, nous allons établir que Ω ne dépend que de α. A cet effet, de la relation (11)' nous déduisons

$$\frac{\partial \log\varphi}{\partial\beta} = \frac{\partial \log\sqrt{q}}{\partial\beta},$$

d'où, en différentiant par rapport à α et tenant compte de la condition (12), on conclut

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{q}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \tau,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{s}{2q} = \tau = \frac{s}{2q}\frac{s}{2p} = \frac{s}{2q}\frac{\partial \log\sqrt{p}}{\partial\beta}.$$

Rapprochant les membres extrêmes et intégrant, nous trouvons

$$\frac{s}{2q\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{q}} = f(\alpha).$$

Dès lors $\tau : q$ ne dépendant que de α, comme $q : \varphi^2$, le rapport $\tau : \varphi^2$ est aussi une fonction de α, ce qui justifie notre assertion.

Cela étant, dans la formule générale (9), nous pouvons remplacer la quantité K par son égale Ω^2, ce qui donne

$$1 = -\frac{1}{\Omega^2\varphi^2}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

et, comme nous venons de voir que Ω dépend seulement de α, cette égalité subsistera si l'on remplace φ par $\Omega\varphi$ sous le signe logarithme; mais il vient ainsi

$$1 = -\frac{1}{\Omega^2\varphi^2}\frac{\partial^2 \log \Omega\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

ce qui signifie que la courbure totale de l'expression

$$4\,\Omega^2\varphi^2\,d\alpha\,d\beta = \Omega^2\,ds^2$$

est égale à l'unité. Ainsi *les surfaces* (O_k) *font partie des surfaces dont l'élément linéaire devient celui d'une sphère de rayon* 1 *quand on le multiplie par le carré de la courbure moyenne.*

Voici l'analyse par laquelle j'ai déterminé, dans le second des Mémoires précités (*A. E. N. S.*, 1906, p. 407-409), l'ensemble des surfaces qui jouissent de cette propriété. En écrivant que la forme $\Omega^2\,ds^2$, identique à $-4\tau\,d\alpha\,d\beta$, en vertu de la formule (10), a sa courbure totale égale à 1, on obtient l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 \log\tau}{\partial\alpha\,\partial\beta} - 2\tau = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\tau = \frac{f'(\alpha)\,g'(\beta)}{[f(\alpha)+g(\beta)]^2},$$

f et g désignant deux fonctions arbitraires, f' et g' leurs dérivées. Mais on ne restreint pas la généralité en prenant

$$\tau = \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad \sqrt{\tau} = -\frac{1}{\alpha+\beta},$$

ce que nous ferons. La dérivée p d'une coordonnée isotrope ξ est l'intégrale générale de l'équation (3), où $\sqrt{\tau}$ est remplacée par l'expression qui vient d'être trouvée; l'autre dérivée q se déduit de p et de $\sqrt{\tau}$ par la relation (2). L'équation en p

$$\frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \frac{\sqrt{p}}{(\alpha+\beta)^2} = 0$$

a été intégrée par M. Goursat (*Bull. Soc. mathém. de France*,

t. XXV, 1897, p. 36). On en déduit

$$\sqrt{p} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} - B',$$

A et B désignant deux fonctions arbitraires, l'une de α, l'autre de β, dont A' et B' sont les dérivées. Les dérivées d'une seconde coordonnée isotrope ξ_1 seront fournies par les formules analogues

$$\sqrt{p_1} = \frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta} - A'_1, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{A_1+B_1}{\alpha+\beta} - B'_1,$$

et la dernière des formules (4) fera connaître la troisième coordonnée z.

Mais il faut ici, pour avoir les surfaces (O_k), exprimer que $\sqrt{\tau} : \sqrt{q}$ ne dépend que de α, ce qui donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial\beta}[A + B - B'(\alpha+\beta)] = (\alpha+\beta)B''.$$

La dérivée B'' étant nulle, la fonction B est un binome linéaire en β à coefficients constants; en modifiant légèrement la signification de A, on peut réduire ce binome à zéro et prendre

$$\sqrt{p} = \frac{A}{\alpha+\beta} - A', \qquad \sqrt{q} = \frac{A}{\alpha+\beta}.$$

Comme $\sqrt{\tau} : \sqrt{q_1}$ doit aussi être indépendant de β, la dérivée B''_1 est nulle et l'on peut pareillement prendre

$$\sqrt{p_1} = \frac{A_1}{\alpha+\beta} - A'_1, \qquad \sqrt{q_1} = \frac{A_1}{\alpha+\beta}.$$

On vérifie alors aisément que $q : \varphi^2$ et $q_1 : \varphi^2$ ne dépendent que du paramètre α, de sorte qu'on a bien ainsi les surfaces cherchées.

L'application des formules (4) donne pour leurs coordonnées

$$x + iy = -\frac{A^2}{\alpha+\beta} + \int A'^2\, d\alpha, \qquad x - iy = -\frac{A_1^2}{\alpha+\beta} + \int A_1'^2\, d\alpha,$$

$$iz = -\frac{AA_1}{\alpha+\beta} + \int A'A'_1\, d\alpha.$$

Quant à l'élément linéaire, on trouve

$$ds^2 = \frac{AA'_1 - A'A_1}{(\alpha+\beta)^2}\, d\alpha\, d\beta. \tag{14}$$

Les surfaces de Serret, ayant leur courbure totale constante, sont caractérisées par la condition supplémentaire

$$AA'_1 - A'A_1 = \text{const.}$$

17. Nous allons nous servir de l'expression générale de ds^2 pour *chercher parmi les surfaces à lignes de courbure confondues celles qui sont harmoniques*, c'est-à-dire celles dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2).$$

Pour qu'un élément linéaire $\lambda(x, y)\, dx\, dy$ soit réductible à cette forme, il faut et il suffit, comme l'a démontré M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 208), qu'il existe deux fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ vérifiant l'équation aux fonctions mêlées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{X}\,\frac{\partial\lambda\sqrt{X}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{Y}\,\frac{\partial\lambda\sqrt{Y}}{\partial y}\right),$$

dont le développement est le suivant :

$$(15) \qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + Y''\lambda.$$

Or il est visible que l'élément linéaire (14) peut s'écrire $\lambda\, dx\, dy$, si l'on prend

$$\lambda = \frac{h(x)}{(x-y)^2};$$

de plus, sa courbure totale est constante quand $h(x)$ se réduit à une constante, et alors seulement.

Remplaçant λ par l'expression précédente dans l'équation (15), chassant les dénominateurs et divisant par h, on trouve

$$\begin{aligned} 12(X - Y) &- (x-y)\left(6X' + 8X\frac{h'}{h} + 6Y'\right) \\ &+ (x-y)^2\left(X'' + 3X'\frac{h'}{h} + 2X\frac{h''}{h} - Y''\right) = 0. \end{aligned}$$

En faisant $y = x$, on reconnaît que Y est la même fonction de y que X de x. Or, si l'on différentie le premier membre deux fois par rapport à x et deux fois par rapport à y, il vient

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(X'' + 3X'\frac{h'}{h} + 2X\frac{h''}{h}\right) - \frac{d^4 Y}{dy^4} = 0;$$

ce qui montre que Y est un polynome du quatrième degré en y. On a donc

$$Y = ly^4 + my^3 + ny^2 + py + q, \qquad X = lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q.$$

On sait (Darboux, *loc. cit.*, p. 210) et l'on vérifie aisément que, quelles que soient les cinq constantes l, m, n, p, q, les termes indépendants de h' et de h'' disparaissent tous quand on substitue les polynomes X et Y dans l'équation proposée; après suppression du facteur commun $(x-y)$, il reste

$$-8X\frac{h'}{h} + (x-y)\left(3X'\frac{h'}{h} + 2X\frac{h''}{h}\right) = 0.$$

Pour que cette relation ait lieu quels que soient x et y, il faut et il suffit que h' soit nul. En conséquence, *les seules surfaces à lignes de courbure confondues qui soient harmoniques sont celles dont la courbure totale est constante* (surfaces de Serret).

Ce résultat complète une proposition que j'ai établie autrefois (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, 1890, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IX, 1895). J'ai prouvé que *toute surface harmonique réglée est applicable sur une surface de révolution ou sur une quadrique;* mais j'ai laissé de côté les surfaces réglées à génératrices isotropes. D'après ce qui précède, la proposition est vraie sans aucune restriction.

18. Nous nous proposerons enfin de rapporter les surfaces (O_k) à leurs lignes asymptotiques. Pour que les formules de M. Lelieuvre,

$$(16)\qquad \begin{cases} dx = (mn'_u - nm'_u)\,du - (mn'_v - nm'_v)\,dv, \\ dy = (nl'_u - ln'_u)\,du - (nl'_v - ln'_v)\,dv, \\ dz = (lm'_u - ml'_u)\,du - (lm'_v - ml'_v)\,dv, \end{cases}$$

représentent des surfaces réglées dont les lignes $u =$ const. soient les génératrices, il faut, comme l'a montré M. Goursat (*Bull. Soc. mathém. de France*, t. XXIV, 1896), que l'équation de Moutard

$$\theta''_{uv} = \rho\theta,$$

à laquelle satisfont les fonctions l, m et n, soit de rang 1 ou de rang 2. Si l'équation est de rang 1, c'est-à-dire si ρ est nul, la surface, supposée réglée, est nécessairement une surface à plan directeur. Or, pour les surfaces à génératrices isotropes, le cône directeur est un cône isotrope; si donc une telle surface est à plan directeur, ses génératrices sont parallèles à l'une des génératrices suivant lesquelles le cône directeur coupe un plan mené par son sommet parallèlement au plan directeur : leur direction étant fixe, la surface est un cylindre et non une surface (O_k).

Quand l'équation à laquelle satisfont l, m et n est de rang 2, on peut, sans restreindre la généralité, la ramener à la forme

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{2}{(u-v)^2}.$$

Cette équation, l'une de celles qui ont été traitées par Euler, a pour intégrale générale

$$\theta = 2\frac{U-V}{u-v} - U' - V',$$

U et V désignant respectivement deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v, dont U' et V' sont les dérivées. Telle est la forme analytique des fonctions l, m, n. Mais, si la surface correspondante est réglée, les normales menées aux divers points d'une génératrice ($u=$ const.) devant être perpendiculaires à cette génératrice, il existe entre l, m et n une relation identique de la forme

$$l\,A(u) + m\,B(u) + n\,C(u) = 0.$$

Cette condition entraîne pour l, m, n, ainsi que l'a indiqué M. Goursat (*loc. cit.*), les formes suivantes :

$$l = \frac{2U_1}{u-v} - U'_1, \qquad m = \frac{2U_2}{u-v} - U'_2, \qquad n = \frac{2U_3}{u-v} - U'_3.$$

Ces expressions sont générales et conviennent à toutes les surfaces réglées qui n'ont pas de plan directeur. Introduisons l'hypothèse qui caractérise les surfaces (O_k), savoir que *la courbure totale* K *dépend de la seule variable* u. D'après la relation bien connue

$$K = -(l^2 + m^2 + n^2)^{-2},$$

on devra avoir

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{4\Sigma U_i^2}{(u-v)^2} - \frac{4\Sigma U_i U_i'}{u-v} + \Sigma U_i'^2 = \varphi(u),$$

ce qui entraîne visiblement la condition nécessaire et suffisante

$$\Sigma U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0.$$

On n'aura donc qu'à poser, par exemple,

$$U_1 + iU_2 = U^2, \qquad U - iU_2 = -U_0^2, \qquad U_3 = UU_0,$$

ce qui donnera

$$l^2 + m^2 + n^2 = (UU_0' - U_0 U')^2.$$

On aura ainsi l, m, n exprimés à l'aide de deux fonctions arbitraires U et U_0 et, par suite, les expressions cherchées de dx, dy dz par les formules (16).

Remarque. — Les trois fonctions l, m, n étant choisies comme il vient d'être dit, la somme $l^2 + m^2 + n^2$ se réduit à une fonction de u. Dès lors, en vertu d'un théorème dû à M. L. Bianchi (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XVIII, 1890), la surface (S) enveloppe du plan

$$lx + my + nz + p = 0,$$

où p est une solution quelconque de l'équation (E), admet le réseau (u, v) comme *réseau conjugué persistant,* c'est-à-dire qu'il existe une infinité de surfaces dépendant d'une constante arbitraire, qui ont même élément linéaire que (S) et sur lesquelles le réseau (u, v) est conjugué. On est ainsi conduit tout naturellement aux résultats très généraux que M. Drach a trouvés par une autre voie (*C. R. Acad. des Sciences*, t. CXXXVI, 27 avril 1903) relativement au problème des réseaux conjugués persistants et qui m'avaient échappé quand j'ai publié ma Note récente sur le même sujet (*C. R. Acad. des Sciences,* t. CXLVI, 6 avril 1908).