BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur l'extinction du frottement

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 3-8

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__3_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'EXTINCTION DU FROTTEMENT;

Par M. L. Lecornu.

Dans une Adresse lue en 1905 au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, M. Appell appelait l'attention sur divers cas où le mouvement d'un système s'effectue de façon que le travail de frottement diminue de plus en plus, comme si le système cherchait à échapper au frottement : c'est ce qui arrive notamment dans le glissement d'un cerceau ou d'une boule, glissement qui aboutit finalement à un simple roulement, ou encore dans le redressement progressif de l'axe d'un corps de révolution lancé sur un plan horizontal.

Je voudrais signaler ici un autre exemple assez général, dans lequel la même tendance se manifeste avec une netteté particulière. Il s'agit du mouvement d'un ensemble quelconque de sphères homogènes qui ont leurs centres fixes et qui exercent à leurs divers points de contact des pressions mutuelles données.

Je suppose d'abord que le système, après avoir été lancé d'une façon arbitraire, soit entièrement abandonné à lui-même. Considérons deux de ces sphères, S_1 et S_2, tangentes en un point A. Soient x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées de leurs centres O_1 et O_2 par rapport à trois axes fixes rectangulaires. Soient p_1, q_1, r_1 et p_2, q_2, r_2 les composantes de leurs rotations. Soient enfin ξ, η, ζ les coordonnées de A. La vitesse de glissement V de S_2 par rapport à S_1 a pour composantes :

$$\begin{aligned}
u &= q_2(\zeta - z_2) - r_2(\eta - y_2) - q_1(\zeta - z_1) + r_1(\eta - y_1)\\
v &= r_2(\xi - x_2) - p_2(\zeta - z_2) - r_1(\xi - x_1) + p_1(\zeta - z_1)\\
w &= p_2(\eta - y_2) - q_2(\xi - x_2) - p_1(\eta - y_1) + q_1(\xi - x_1).
\end{aligned}$$

Si F désigne l'effort tangentiel, de grandeur constante, que la sphère S_1 éprouve de la part de S_2 en vertu du frottement, les composantes de cet effort sont $F\frac{u}{V}$, $F\frac{v}{V}$, $F\frac{w}{V}$, et le moment de F par rapport à O_1 a pour composantes :

$$L = \frac{F}{V}[w(\eta - y_1) - v(\zeta - z_1)],$$

$$M = \frac{F}{V}[u(\zeta - z_1) - w(\xi - x_1)],$$

$$N = \frac{F}{V}[v(\xi - x_1) - u(\eta - y_1)].$$

D'autre part, la relation $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ donne, en remarquant que u ne contient pas p_1 :

$$V\frac{\partial V}{\partial p_1} = v\frac{\partial v}{\partial p_1} + w\frac{\partial w}{\partial p_1} = v(\zeta - z_1) - w(\eta - y_1) = -\frac{VL}{F}.$$

On est ainsi conduit aux trois identités :

$$L = -F\frac{\partial V}{\partial p_1}, \qquad M = -F\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad N = -F\frac{\partial V}{\partial r_1}.$$

Si donc A_1 désigne le moment d'inertie de la sphère S_1 par rapport à l'un de ses diamètres, les équations du mouvement de cette sphère sont

$$A_1\frac{dp_1}{dt} = -\sum F\frac{\partial V}{\partial p_1}, \qquad A_1\frac{dq_1}{dt} = -\sum F\frac{\partial V}{\partial q_1}, \qquad A_1\frac{dr_1}{dt} = -\sum F\frac{\partial V}{\partial r_1},$$

les sommations étant étendues à toutes les sphères qui sont en contact avec S_1, ou, en d'autres termes, à toutes les vitesses V dont l'expression renferme p_1, q_1, r_1.

Ceci posé, considérons la fonction $\Phi = \Sigma FV$ calculée pour l'ensemble de tous les points de contact existant dans le système donné de sphères. On peut écrire :

$$A_1\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}, \qquad A_1\frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}, \qquad A_1\frac{dr_1}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r_1},$$

d'où

$$A_1\left[\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right]dt = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}dr_1\right).$$

Si nous faisons la somme de toutes les équations analogues, et si nous désignons par $\frac{d\Phi}{dt}$ la dérivée totale de Φ par rapport au temps, il vient

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sum A\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Cette dérivée est donc négative, et par conséquent : *la somme des vitesses de glissement multipliées par les efforts tangentiels correspondants est constamment décroissante,* ou bien encore :

Le travail du frottement, rapporté à chaque instant à l'unité de temps, tend constamment vers zéro.

La démonstration s'applique tant qu'il y a effectivement glissement en chacun des points de contact. Examinons ce qui se passe quand pour l'un de ces points, A par exemple, le glissement se transforme en roulement. A ce moment, V s'annule et l'effort tangentiel prend une valeur f inférieure à F ; sa direction est simplement assujettie à demeurer dans le plan tangent commun aux sphères S_1 et S_2. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de f. Si l'on appelle Ψ la fonction ΣFV calculée en laissant de côté A, les équations du mouvement de S_1 et S_2 sont

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} = f[\beta(\zeta - z_1) - \gamma(\eta - y_1)] - \frac{\partial\Psi}{\partial p_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_2 \frac{dp_2}{dt} = -f[\beta(\zeta - z_2) - \gamma(\eta - y_2)] - \frac{\partial\Psi}{\partial p_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on forme l'expression

$$\begin{aligned} E = A_1 &\left[\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ &+ A_2 \left[\left(\frac{dp_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2\right], \end{aligned}$$

le coefficient de $f\alpha$ est

$$(\eta - y_1)\frac{dr_1}{dt} - (\zeta - r_1)\frac{dq_1}{dt} - (\eta - y_2)\frac{dr_2}{dt} + (\zeta - r_2)\frac{dq_2}{dt}.$$

Ce coefficient est nul, car il représente la dérivée $\frac{du}{dt}$, de la quantité u, qui est nulle pendant le roulement. β et γ disparaissent de même, et il reste seulement

$$-E = \frac{\partial\Psi}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial r_1}\frac{dr_1}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial r_2}\frac{dr_2}{dt}.$$

D'ailleurs, pendant le roulement, la fonction Φ ne diffère pas de la fonction Ψ. On voit donc que la substitution du roulement au glissement ne modifie pas les conclusions précédentes.

Imaginons actuellement que l'une des sphères, S_1 par exemple, soit assujettie à tourner autour d'un axe fixe passant par son centre. Si a, b, c sont les cosinus directeurs de cet axe et si ω désigne la vitesse de rotation, on a $p_1 = a\omega$, $q_1 = b\omega$, $r_1 = c\omega$ et l'équation du mouvement de S_1 est

$$A_1 \frac{d\omega}{dt} = La + Mb + Nc = -F\left(a \frac{\partial V}{\partial p_1} + b \frac{\partial V}{\partial q_1} + c \frac{\partial V}{\partial r_1}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} A_1 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = A \left[\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ = -F\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r_1}\frac{dr_1}{dt}\right), \end{aligned}$$

de sorte que la fixité de l'axe de rotation, tout en supprimant l'indépendance de p_1, q_1, r_1, laisse subsister le théorème fondamental. Il en est évidemment de même quel que soit le nombre des sphères obligées de tourner autour d'axes fixes.

Nous allons maintenant supposer qu'au lieu d'abandonner le système à lui-même, on applique sur une ou plusieurs des sphères qui le composent des forces telles que chacune des sphères ainsi actionnées tourne, avec une vitesse constante, autour d'un axe fixe. Admettons par exemple que tel soit le cas de la sphère S_1. Il faut alors, dans les équations du mouvement, considérer p_1, q_1, r_1 comme des constantes données, et, par contre, supprimer les trois équations qui se rapportent au mouvement de S_1. Les autres équations subsistent sans modification. En combinant ces dernières, et remarquant que dp_1, dq_1, dr_1 sont nuls, on retrouve l'équation

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\sum A\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

La fonction Φ est donc, ici encore, constamment décroissante.

Du moment où l'une des sphères ou plusieurs d'entre elles sont ainsi assujetties à conserver des vitesses constantes, il peut arriver que le système atteigne finalement un état permanent dans lequel persistent certains glissements. Quand cet état final se trouve réalisé, c'est-à-dire quand toutes les quantités p, q, r cessent de varier, on a, pour toutes les valeurs des indices,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

et par conséquent la fonction Φ présente alors un minimum. D'après cela :

L'état final est tel que le travail de frottement dans l'unité de temps soit le plus petit possible.

Observons encore que les sphères tournant autour d'axes fixes peuvent être remplacées par des corps de forme quelconque, homogènes ou non, pourvu que chacun de ces corps tourne autour d'un axe fixe et présente des surfaces de révolution touchant les corps voisins en des points qui demeurent fixes. Car, dans ces conditions, les équations du mouvement ne se trouvent aucunement modifiées.

Comme application très simple et facilement réalisable, considérons trois cylindres C, C_1, C_2 à axes fixes parallèles de rayons R, R_1, R_2 et supposons que les deux cylindres C_1, C_2 soient obligés, par des forces extérieures, à tourner en *sens contraire* avec des vitesses circonférentielles constantes u_1 et u_2, tandis que le troisième cylindre C est en contact avec eux. Soient F_1 et F_2 les efforts tangentiels exercés par C_1 et C_2 sur C lorsqu'il y a glissement; soient A le moment d'inertie de C, R son rayon, u sa vitesse circonférentielle. En prenant pour sens positif des rotations celui du cylindre C_1, l'équation du mouvement de C, pendant que ce cylindre glisse au contact des deux autres, est

$$\frac{A}{R^2}\frac{du}{dt} = [F_2] - [F_1].$$

Dans cette expression $[F_1]$ désigne la force F_1 prise avec le signe du glissement relatif $u_1 + u$, et $[F_2]$ la force F_2 prise avec le signe du glissement relatif $u_2 - u$. La fonction Φ est ici

$$\Phi = F_1[u_1 + u] + F_2[u_2 - u],$$

$[u_1 + u]$ et $[u_2 - u]$ désignant les valeurs absolues de $u_1 - u$ et $u_2 - u$. On en déduit

$$\frac{d\Phi}{dt} = ([F_1] - [F_2])\frac{du}{dt},$$

et, par suite,

$$\frac{A}{R^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

On vérifie ainsi que la fonction Φ est constamment décroissante.

Supposons en particulier que le cylindre C parte du repos, et admettons, ce qu'il est toujours loisible de faire, que l'on ait $F_2 < F_1$. Au début du mouvement, il y a glissement à la fois sur les deux cylindres C_1 et C_2 et l'équation du mouvement est

$$\frac{A}{R^2}\frac{du}{dt} = F_2 - F_1,$$

d'où

$$u = \frac{R^2}{A}(F_2 - F_1)t.$$

Le mouvement continue dans ces conditions jusqu'à ce que l'on ait $u_2 = u$, ce qui arrive au bout du temps $t = \frac{A u_2}{R^2(F_2 - F_1)}$. A cet instant, la fonction Φ, partie de la valeur $F_1 u_1 + F_2 u_2$, se trouve réduite à la valeur $F_1(u_1 + u_2)$. Dès lors, le glissement sur C_2 est supprimé et u conserve la valeur constante u_2, de sorte que Φ cesse de varier. La constante de u exige que l'action tangentielle F'_2 au point de contact de C avec C_2 prenne exactement la valeur F_1. Cela est possible, puisque F_1 est inférieur à F_2; mais on peut trouver étonnant que l'action tangentielle éprouve ainsi, d'une façon instantanée, la diminution finie $F_2 - F_1$. C'est ici le lieu de répéter une remarque que j'ai déjà formulée dans une autre occasion : la théorie précédente considère les cylindres comme rigoureusement indéformables et leur attribue ainsi une propriété que ne possèdent jamais les solides naturels. En réalité, au moment où le glissement de C sur C_2 fait place au roulement, l'action tangentielle s'abaisse *rapidement, mais non pas subitement,* de la valeur F_2 à la valeur F_1. Cet abaissement a pour conséquence une sorte de détente des surfaces en contact accompagnée, en vertu de l'élasticité des solides naturels, d'un déplacement de la couche extérieure de chaque cylindre par rapport aux couches sous-jacentes, de telle sorte que pendant la très courte période de transition dont il s'agit il n'est pas permis de considérer les cylindres comme des solides invariables. Et, de cette façon, toute difficulté disparaît.