BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VESSIOT

Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 230-269
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__230_0>

SUR L'INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DES TRANSFORMATIONS DE CONTACT INFINITÉSIMALES;

Par M. E. Vessiot.

Lie a indiqué brièvement, en divers passages de sa *Géométrie des transformations de contact,* que la propagation d'un mouvement ondulatoire, conformément à la loi d'Huyghens, était l'image d'un groupe de transformations de contact à un paramètre, c'est-à-dire d'une transformation de contact infinitésimale. Il nous a paru intéressant d'exposer cette idée avec les développements qu'elle comporte. Nous avons raisonné dans l'espace à trois dimensions, et indiqué comment les résultats obtenus peuvent s'étendre à l'espace à n dimensions. Voici les principaux de ces résultats.

Le mode de propagation supposé est défini par un système de ∞^3 surfaces d'onde caractéristiques, associées aux ∞^3 points (x, y, z) de l'espace; chacune d'elles représente la forme limite vers laquelle tend la surface, lieu des points atteints au bout du temps dt par un ébranlement produit au point (x, y, z) correspondant. Supposons l'origine des coordonnées transportée en ce point, et l'équation d'un plan tangent à cette surface prise sous la forme

$$pX + qY - Z - w = 0, \tag{1}$$

de sorte que (p, q, w) sont des coordonnées tangentielles courantes pour cette surface. Le système des surfaces caractéristiques est alors défini par une équation de la forme

$$w = W(x, y, z, p, q). \tag{2}$$

Et l'on peut dire que cette équation définit le mode de propagation.

Si l'on imagine une onde origine quelconque, les formes successives de l'onde variable qui en résulte sont les transformées de l'onde origine par les diverses transformations d'un groupe de transformations de contact à un paramètre t, qui représente le temps; et ce groupe est défini par les équations classiques :

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad \frac{dz}{dt} = p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} - W, \\ &\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x} - p\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial y} - q\frac{\partial W}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

où W est la fonction qui figure dans l'équation tangentielle de la surface caractéristique.

En intégrant ce système (3) on déterminera complètement le mode de propagation considéré. Mais on peut aussi le déterminer en cherchant les familles d'ondes, c'est-à-dire la famille des ondes successives issues d'une onde origine arbitraire. Une telle famille sera donnée par une équation

$$t = f(x, y, z), \tag{4}$$

de sorte qu'on a à trouver une fonction t des variables indépendantes (x, y, z); elle est définie par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial t}{\partial z} W\left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial t}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial t}{\partial y}}{\frac{\partial t}{\partial z}}\right) + 1 = 0, \tag{5}$$

dont l'intégration est donc équivalente à l'intégration du système (3).

De là découle une théorie géométrique extrêmement simple des équations aux dérivées partielles du premier ordre, comprenant aussi-bien la théorie des intégrales complètes et le théorème de Jacobi que la théorie des caractéristiques. La seule particularité de l'équation (5) est de ne pas contenir explicitement la fonction inconnue t.

On arrive à des résultats plus symétriques en supposant l'équation du plan tangent à la surface caractéristique prise sous la forme

$$\alpha Z + \beta Y + \gamma Z - 1 = 0. \tag{6}$$

L'équation tangentielle est alors de la forme

$$\Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1, \tag{7}$$

où l'on peut toujours supposer que Π est homogène de degré *un* en α, β, γ. Cette équation (7), en posant

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \alpha, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = \beta, \qquad \frac{\partial t}{\partial z} = \gamma, \tag{8}$$

est aussi l'équation aux dérivées partielles des familles d'ondes; et les équations du groupe de transformations de contact prennent la forme homogène connue, analogue à celle des équations canoniques d'Hamilton,

$$
(9) \qquad \left\{
\begin{array}{lll}
\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial \beta}, & \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial \Pi}{\partial \gamma}, \\[2ex]
\dfrac{d\alpha}{dt} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}, & \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}, & \dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}.
\end{array}
\right.
$$

L'intervention du groupe de transformations de contact dans la théorie ondulatoire conduit à considérer les trajectoires de la propagation, qui seront définies par le système (3), par exemple, en y considérant p, q comme des inconnues auxiliaires. On définit ces trajectoires directement par un système différentiel analogue aux équations de Lagrange en mécanique, en définissant les surfaces d'ondes caractéristiques par leur équation ponctuelle générale

$$
(10) \qquad \Omega(x, y, z, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 1,
$$

où l'on peut supposer que Ω est homogène de degré *un* en X, Y, Z. Le système différentiel des trajectoires est alors

$$
(11) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial x'}\right) - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \\[2ex]
\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial z'}\right) - \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,
\end{array}
\right.
$$

avec l'équation de condition

$$
(12) \qquad \Omega(x, y, z, x', y', z') = 1.
$$

Il exprime que la variation de l'intégrale

$$
(13) \qquad \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)
$$

est nulle, et que le temps t est précisément la valeur correspondante

$$
(14) \qquad t = \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)
$$

de cette intégrale. On peut, du reste, interpréter l'intégrale (13), prise le long d'un arc de courbe quelconque, comme le temps que mettrait un ébranlement à se propager d'une extrémité à l'autre de cet arc, en suivant la courbe.

Nous avons ainsi une interprétation géométrique d'un problème très général de calcul des variations. La condition classique pour le minimum s'énonce alors sous la forme suivante : Soit M un point quelconque d'une trajectoire ; ce point est l'origine d'une onde élémentaire infiniment petite

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = dt; \tag{15}$$

la trajectoire, en partant de M, devra percer cette onde élémentaire en un point où elle a ses deux courbures de même signe, et où elle tourne sa concavité du côté de M. Les arcs de trajectoires correspondent donc toujours à un minimum dans la durée de la propagation lorsque les surfaces d'onde caractéristiques ont leurs courbures toujours du même signe, et tournent toujours leur concavité vers leurs origines respectives. Ceci, bien entendu, sous la réserve que l'arc considéré ne contienne pas de couples de points conjugués (au sens de Weierstrass).

La théorie précédente éclaire donc d'un jour bien intéressant, non seulement les divers aspects de la théorie des équations aux dérivées partielles, mais encore ses rapports avec le calcul des variations.

Elle interviendra utilement dans toutes les questions où intervient la variation d'une intégrale (13); brachistochrones, équilibre des fils, lignes géodésiques, problème général de la dynamique, etc. Dans ces divers cas, elle redonne intuitivement les théorèmes analogues aux théorèmes de Thomson et Tait; car ils expriment seulement que les arcs de trajectoires compris entre deux ondes d'une même famille correspondent à des temps égaux; et qu'en chaque point d'une onde, la direction de la trajectoire est liée à celle du plan tangent à l'onde par la relation géométrique qui résulte des trois premières formules (3) ou (9).

Lie avait indiqué [1] le fait que l'intégration de l'équation aux dérivées partielles de la Mécanique

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2 - 2U(x_1, \ldots, x_n) - 2h = 0, \tag{16}$$

[1] *Leipziger Berichte*, t. XLI, p. 145.

revient à la détermination du groupe de transformations de contact qui a pour fonction caractéristique

$$\frac{\sqrt{p_1^2+\ldots+p_n^2}}{\sqrt{2(U+h)}}. \tag{17}$$

Nous retrouvons ce résultat sous une forme plus générale, et avec sa véritable origine, qui est dans le principe de la moindre action.

Si la force vive d'un système $\frac{2T(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n)}{dt^2}$ ne dépend que des coordonnées du système, et non du temps, et s'il en est de même de la fonction des forces $U(x_1, \ldots, x_n)$, les trajectoires sont les mêmes que pour le mode de propagation ondulatoire dans lequel la surface d'onde caractéristique a pour équation ponctuelle générale

$$2\sqrt{U(x_1, \ldots, x_n)T(x_1, \ldots, x_n \mid X_1, \ldots, X_n)} = 1; \tag{18}$$

mais ce qui correspond au temps τ de ce mode de propagation, ce n'est pas en général le temps t du mouvement dynamique, mais l'action

$$\tau = 2\int\sqrt{U(x_1, \ldots, x_n)T(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n)}, \tag{19}$$

de sorte que l'on a

$$dt = \frac{d\tau}{2U(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{20}$$

On suppose dans cet énoncé que l'on a donné une valeur fixe à la constante des forces vives, et qu'on l'a fait entrer dans la fonction U, de sorte que l'équation des forces vives serait

$$T(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n) = U(x_1, \ldots, x_n)dt^2. \tag{21}$$

Cette identité de forme entre les trajectoires des problèmes de dynamique et de certains problèmes de propagation ondulatoire est certainement curieuse, quoique la différence dans la loi suivant laquelle sont parcourues les trajectoires lui ôte de son intérêt. Le parallèle classique entre la théorie de l'émission et la théorie des ondulations en peut être considéré comme un cas particulier, si l'on suppose que dans la théorie de l'émission les corpuscules lumineux obéissent à des lois analogues à celles de notre dynamique.

Nous étudierons, dans un autre travail, les conséquences à tirer de ce parallélisme général pour l'intégration des équations de la Mécanique. Il y aura lieu également d'étudier le problème de la réfraction, et la propagation d'un ébranlement dans un milieu dont la nature varie avec le temps. Nous avons voulu nous limiter, dans cette note, aux faits les plus simples.

I. — Ondes et transformations de contact.

1. Considérons un milieu élastique bien défini; et supposons qu'un ébranlement de nature déterminée se propage dans ce milieu. Nous admettrons d'abord que, si cet ébranlement s'est produit à l'origine en un point isolé A du milieu, au bout de chaque temps t il atteint tous les points d'une surface $\Phi_{A,t}$ dont la forme est déterminée pour chaque point A et pour chaque durée t.

Nous admettrons ensuite que, si l'ébranlement se produit à l'origine sur toute une courbe C, ou sur toute une surface S, il atteint au bout de chaque temps t tous les points de la multiplicité M enveloppe des surfaces $\Phi_{A,t}$ correspondant aux divers points de C, ou de S (respectivement).

Si nous appelons *onde* le lieu des points atteints par l'ébranlement à un même instant, C ou S est l'onde origine, et M est ce qu'est devenue, au bout du temps t, cette onde origine. Et le principe que nous admettons peut s'appeler le *principe de l'onde enveloppe*.

Il s'interprète immédiatement, dans la théorie des transformations de contact. Le système des surfaces $\Phi_{A,t}$ définit en effet, pour chaque valeur de t, une transformation de contact T_t, et M est la transformée de l'onde origine (C ou S) par cette transformation.

Donc *à chaque milieu élastique et à chaque nature d'ébranlement pouvant se produire dans ce milieu correspond une famille de transformations de contact* T_t, *de telle sorte que toute onde origine devient, au bout du temps t, une onde nouvelle qui est la transformée de l'onde origine par la transformation* T_t.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point quelconque A, et x, y, z les coordonnées courantes. La surface $\Phi_{A,t}$ ayant pour équation

$$\Phi(x, y, z \mid x_0, y_0, z_0 \mid t) = 0, \tag{1}$$

cette équation définit, comme l'on sait, la transformation de contact T_t, en lui adjoignant les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, &&\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + p_0\frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = 0, &&\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

2. Admettons de plus que les ébranlements considérés se propagent conformément au *principe d'Huyghens,* c'est-à-dire que l'onde origine Σ_0, étant devenue au bout d'un temps quelconque t une certaine onde Σ, continue à se propager comme si cette onde Σ était, à partir de cet instant, l'onde origine.

Cela revient à dire que la transformation de contact $T_{t+t'}$ est identique au produit $T_t\,T_{t'}$, c'est-à-dire que *les transformations de contact* T_t *forment un groupe à un paramètre, ayant* t *pour paramètre canonique.*

Dès lors, sous les hypothèses faites, *à chaque milieu élastique et à chaque nature d'ébranlements pouvant se propager dans ce milieu correspond une transformation de contact infinitésimale* $\mathfrak{T}$, *et toute onde existant à un instant quelconque se modifie successivement suivant les transformations de contact* T_t *du groupe à un paramètre qu'engendre* $\mathfrak{T}$.

Suivant les résultats de Lie, bien connus, si $W(x, y, z, p, q)$ est la fonction caractéristique de $\mathfrak{T}$, M_t s'obtient en intégrant entre 0 et t, avec les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad \frac{dz}{dt} = p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} - W, \\ &\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x} - p\frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial y} - q\frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

La fonction W *est donc caractéristique pour le milieu et la nature des ébranlements considérés.*

Elle est liée aux considérations géométriques suivantes. Reprenons la surface $\Phi_{A,t}$ et construisons son homothétique, par rapport au centre A d'homothétie et au rapport d'homothétie $\frac{1}{t}$. Lorsque t

tend vers zéro, cette homothétique tend vers une forme limite Ψ_A, que nous appellerons *la surface caractéristique du milieu, ayant* A *pour origine,* parce que le système de ces surfaces Ψ_A définit, comme nous allons le voir, le mode de propagation d'ébranlements considérés.

En effet, $\Phi_{A,t}$ a pour équations, en posant

$$W_0 = W(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$

et considérant p_0, q_0 comme des paramètres,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\frac{\partial W_0}{\partial p_0} + \ldots, \\ y &= y_0 + t\frac{\partial W_0}{\partial q_0} + \ldots, \\ z &= z_0 + t\left(p_0\frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0\frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0\right) + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur en t. L'homothétique considérée aura pour équations

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + \ldots, \\ y &= y_0 + \frac{\partial W_0}{\partial q_0} + \ldots, \\ z &= z_0 + p_0\frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0\frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0 + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits contenant le facteur t. La surface Ψ_A est donc représentée, *en transportant les axes au point* A, par les équations

$$(4) \qquad X = \frac{\partial W_0}{\partial p_0}, \qquad Y = \frac{\partial W_0}{\partial q_0}, \qquad Z = p_0\frac{\partial W_0}{\partial q_0} + q_0\frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0.$$

Si l'on différentie par rapport à p_0, q_0, on en conclut

$$p_0\,dX + q_0\,dY - dZ = 0,$$

et par suite p_0, q_0, -1 sont les coefficients de direction du plan tangent à Ψ_A au point X, Y, Z qui a pour coordonnées curvilignes p_0, q_0. Et l'équation du plan tangent est

$$(5) \qquad p_0 X + q_0 Y - Z - W_0 = 0.$$

La fonction caractéristique W *correspond donc à l'équation tangentielle de la surface caractéristique* Ψ_A *du milieu,* en ce sens que, si l'équation du plan tangent à la surface d'origine A est, en transportant les axes en A,

$$(6) \qquad p_0 X + q_0 Y - Z - w_0 = 0,$$

l'équation tangentielle est

$$(7) \qquad w_0 = W(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0),$$

où x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point A. Les surfaces Ψ_A définissent donc entièrement la fonction W, et, par conséquent, le mode de propagation des ébranlements considérés, dans le milieu considéré.

On peut encore substituer à la surface Ψ_A son homothétique prise avec A pour centre d'homothétie et dt pour rapport d'homothétie; c'est ce que nous appellerons l'*onde élémentaire* qui a A pour origine. Ses équations, toujours avec A pour origine des coordonnées, sont :

$$X = \frac{\partial W_0}{\partial p_0} dt, \qquad Y = \frac{\partial W_0}{\partial q_0} dt, \qquad Z = \left(p_0 \frac{\partial W_0}{\partial p_0} + q_0 \frac{\partial W_0}{\partial q_0} - W_0\right) dt.$$

Si A′ est le point de cette onde élémentaire, pour lequel le plan tangent a pour coefficients de direction p_0, q_0, -1, les composantes du vecteur AA′ sont les différentielles dx_0, dy_0, dz_0 pour l'élément de contact $E(x_0 y_0, z_0, p_0, q_0)$.

Pour avoir les différentielles dp_0, dq_0, il suffit de chercher l'élément de contact commun à toutes les ondes élémentaires ayant pour origines des points infiniment voisins de A dans l'élément de contact E. L'onde élémentaire d'origine A ayant pour équations

$$x = x_0 + \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial p} dt,$$

$$y = y_0 + \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial q} dt,$$

$$z = z_0 + \left[p \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial p} \right.$$
$$\left. + q \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial q} - W(x_0, y_0, p, q)\right] dt,$$

nous aurons, pour trouver cet élément de contact caractéristique, les équations

$$o = \delta x_0 + \delta \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial p} dt,$$

$$o = \delta y_0 + \delta \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, p, q)}{\partial q} dt,$$

$$o = \delta z_0 + \delta \left[p \frac{\partial W(x_0, \ldots, p, q)}{\partial p} + q \frac{\partial W(x_0, \ldots, p, q)}{\partial q} - W(x_0, \ldots, p, q) \right] dt,$$

$$o = p_0 \delta x_0 + q_0 \delta y_0 - \delta z_0,$$

d'où l'on conclut, δx_0 et δy_0 étant arbitraires,

$$p_0 - p - \left[\frac{\partial W(x_0, \ldots, p, q)}{\partial x_0} + p_0 \frac{\partial W(x_0, \ldots, p, q)}{\partial z_0} \right] dt = o,$$

$$q_0 - q - \left[\frac{\partial W(x_0, \ldots, p, q)}{\partial y_0} + q_0 \frac{\partial W(x_0, \ldots, p, q)}{\delta z_0} \right] dt = o.$$

On voit donc que p, q tendent vers p_0, q_0, lorsque dt tend vers zéro, et que les parties principales de $p - p_0$, $q - q_0$ sont précisément données par les mêmes équations qui définissent les différentielles dp, dq dans les équations (3).

L'interprétation géométrique des équations (3) au moyen de l'onde élémentaire est ainsi complète.

On peut encore dire, d'après les principes des approximations successives, que *la propagation de l'ébranlement se fait par ondes élémentaires successives, dt* étant alors infiniment petit.

3. On peut remplacer les équations (3) de la propagation des ondes par des équations plus symétriques, analogues aux *équations canoniques d'Hamilton*. Il suffit de mettre l'équation tangentielle de la surface caractéristique Ψ_A sous une forme symétrique.

Nous écrirons dans ce qui suivra x, y, z pour les coordonnées de A; et p, q à la place de p_0, q_0. Le plan tangent courant de Ψ_A' étant

$$(8) \qquad pX + qY - Z - w = o,$$

son équation tangentielle était

$$(9) \qquad w = W(x, y, z, p, q).$$

Prenons le plan tangent sous la forme

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z - \varpi = 0, \tag{10}$$

et son équation tangentielle pourra s'écrire

$$\varpi = \Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma), \tag{11}$$

où Π sera homogène et du premier degré en α, β, γ. On aura de plus les formules d'identification

$$p = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad q = -\frac{\beta}{\gamma}, \qquad w = -\frac{\varpi}{\gamma}, \tag{12}$$

$$\pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = -\gamma\, W\left(x, y, z, \frac{-\alpha}{\gamma}, \frac{-\beta}{\gamma}\right), \tag{13}$$

$$W(x, y, z, p, q) = \Pi(x, y, z, p, q, -1). \tag{14}$$

On en conclut immédiatement, vu l'homogénéité de Π et de ses dérivées,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \beta}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}; \tag{15}$$

et, par un calcul facile,

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{dt} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\dfrac{d\beta}{dt} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial y}}{\beta} = \frac{\dfrac{d\gamma}{dt} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}}{\gamma} = \frac{\dfrac{d\varpi}{dt}}{\varpi}. \tag{16}$$

Le dernier rapport s'obtient par combinaison des autres, en tenant compte de l'homogénéité de Π, de l'équation (11) et des équations (15).

Pour obtenir des formules simples, on s'imposera la condition

$$\varpi = 1, \tag{17}$$

ce qui donnera les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \tag{18}$$

avec la condition

$$\Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1. \tag{19}$$

Cette dernière équation demeure l'équation tangentielle de Ψ_A, l'équation du plan tangent s'écrivant désormais

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z - 1 = 0. \tag{20}$$

Les équations annoncées sont les équations (15) et (18), où il faut observer que Π est homogène de degré 1 en α, β, γ. Elles devront être intégrées en tenant compte de (19). Mais il faut remarquer que l'intégrale première $\Pi =$ const. résulte de (15) et (18), et que l'on pourrait remplacer l'hypothèse $\varpi = 1$ par l'hypothèse plus générale $\varpi =$ const., sans altérer les calculs précédents. La seule particularité qui subsiste réellement est donc relative à l'homogénéité de Π.

Remarquons enfin que, à cause de cette homogénéité, la condition (19) se remplace par

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz - dt = 0, \tag{21}$$

qui résulte aussi de l'interprétation géométrique de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; car ce n'est alors que l'équation (20) du plan tangent à Ψ_A.

4. On peut encore se débarrasser de l'hypothèse relative à l'homogénéité de Π. Supposons en effet que, l'équation du plan tangent courant à la surface caractéristique Ψ_A étant toujours supposée écrite sous la forme

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z - 1 = 0, \tag{20}$$

l'équation tangentielle de cette surface soit donnée sous une forme quelconque

$$\Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{22}$$

Cette équation est équivalente à (19), qui s'en tirerait en résolvant par rapport à ϖ l'équation (22) rendue homogène, c'est-à-dire

$$\overline{\Psi} = \Psi\left(x, y, z, \frac{\alpha}{\varpi}, \frac{\beta}{\varpi}, \frac{\gamma}{\varpi}\right) = 0, \tag{23}$$

et en faisant $\varpi = 1$ dans l'équation (11) ainsi obtenue.

On en conclut que, moyennant (23), on a identiquement

$$d\Pi = \frac{-\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x}dx - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial y}dy - \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial z}dz - \frac{1}{\varpi}\left[\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\alpha}{\varpi}\right)}d\alpha + \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\beta}{\varpi}\right)}d\beta + \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\gamma}{\varpi}\right)}\right]}{-\frac{1}{\varpi^2}\left[\alpha\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\alpha}{\varpi}\right)} + \beta\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\beta}{\varpi}\right)} + \gamma\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\gamma}{\varpi}\right)}\right]};$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \overline{M}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \overline{M}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \overline{M}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \frac{\overline{M}}{\varpi}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\alpha}{\varpi}\right)}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = \frac{\overline{M}}{\varpi}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\beta}{\varpi}\right)}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} = \frac{\overline{M}}{\varpi}\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\gamma}{\varpi}\right)},$$

$$\frac{1}{\overline{M}} = \frac{1}{\varpi^2}\left[\alpha\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\alpha}{\varpi}\right)} + \beta\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\beta}{\varpi}\right)} + \gamma\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial\left(\frac{\gamma}{\varpi}\right)}\right].$$

Et, dans l'hypothèse (17), c'est-à-dire (19), c'est-à-dire (22), on a donc

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = M\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = M\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = M\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = M\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = M\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} = M\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma},$$

$$\frac{1}{M} = \alpha\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}.$$

De sorte que le système (15), (18), (19) peut se remplacer par le système

$$(24) \qquad \frac{d\alpha}{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{d\beta}{-\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{-\frac{\partial \Psi}{\partial z}} = \frac{dx}{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}} = \frac{dz}{\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} = d\tau;$$

$$(22) \qquad \Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

$$(25) \qquad dt = \left(\alpha\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}\right)d\tau;$$

dont l'intégration revient à celle du système (24), (22), de forme entièrement analogue à celle du système (15), (18), (19), et à une quadrature. Et, dans ces équations, la fonction Ψ est absolument quelconque.

Mais, si l'on y remplaçait l'équation (22) par une autre, de la forme

$$\Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \text{const.},$$

on n'obtiendrait plus la représentation du même groupe de transformations de contact. Tandis que, au numéro précédent, remplacer (19) par une équation $\Pi = \text{const.}$ revient à remplacer seulement t par kt, où k est une constante; ce qui n'altère pas le groupe de transformations de contact considéré.

Au point de vue géométrique, le système des surfaces caractéristiques $\Psi = h$ (où k est constant) est essentiellement différent de celui des surfaces (22); tandis que le système des surfaces $\Pi = k$ a même forme que celui des surfaces $\Pi = 1$.

Remarquons encore que l'équation (25) peut se remplacer par l'équation

$$(21) \qquad \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz - dt = 0.$$

Ce qui résulte aussi de l'intégration géométrique des quantités $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, comme au numéro précédent.

On pourrait supposer, en particulier, que l'équation (22) soit de la forme

$$\Psi = G(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) - 1 = 0,$$

G étant homogène de degré m en α, β, γ; on a alors le système canonique

$$(24\ bis) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \alpha}, & \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \beta}, & \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \gamma}, \\ \frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial x}, & \frac{d\beta}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial y}, & \frac{d\gamma}{d\tau} = -\frac{\partial G}{\partial z}; \end{array} \right.$$

avec la condition

$$(22\ bis) \qquad G(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1,$$

et, pour déterminer le temps, la formule simple

$$(25\ bis) \qquad dt = m\, d\tau.$$

On pourra donc remplacer τ par t sans altérer le groupe de transformations de contact; et l'on pourra aussi, pour les raisons expliquées plus haut, supprimer la condition (22 *bis*). Tout cela revenant à changer seulement l'unité de temps.

II. — Problèmes d'intégration.

5. Le problème d'intégration de la théorie précédente consiste à déterminer la propagation d'une onde quelconque connaissant le système des surfaces caractéristiques, c'est-à-dire le système des

ondes élémentaires correspondant à chaque point de milieu.

Ce problème sera résolu si l'on détermine les équations finies du groupe de transformations de contact qui correspond au mode de propagation considéré, c'est-à-dire si l'on intègre le système (3). Soient, en effet,

$$(26)\qquad \begin{cases} x = \mathfrak{X}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 \mid t), \\ y = \mathfrak{Y}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 \mid t), \\ z = \mathfrak{Z}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 \mid t), \\ p = \mathfrak{P}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 \mid t), \\ q = \mathfrak{Q}(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 \mid t), \end{cases}$$

les équations ainsi obtenues, où $t = 0$ correspond à la transformation identique. Si l'onde origine est donnée, on pourra supposer que ses éléments de contact $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ sont donnés en fonction de deux paramètres, et, en portant ces expressions dans les formules (26), on aura l'onde qui en résulte au bout du temps t.

Mais on peut prendre la question autrement en cherchant directement les *familles d'ondes,* c'est-à-dire l'ensemble des ondes issues successivement d'une même onde origine. L'équation générale d'une telle famille peut être supposée mise sous la forme

$$(27)\qquad f(x, y, z) = t,$$

et tout revient à chercher les fonctions f correspondantes.

Si nous associons à l'équation (27) le système

$$(28)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

de manière à obtenir le système qui définit l'ensemble des éléments de contact de l'onde origine, la condition nécessaire et suffisante qui détermine f s'obtiendra en écrivant que ce système (27), (28) est invariant par la transformation infinitésimale

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} + \left(p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} - W\right)\frac{\partial F}{\partial x} - \left(\frac{\partial W}{\partial x} + p\frac{\partial W}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p} - \left(\frac{\partial W}{\partial y} + q\frac{\partial W}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Comme cette transformation change toute multiplicité en une multiplicité, il suffira d'opérer sur l'équation (27). On vérifierait, du reste, par un calcul direct, que les conditions qu'on obtiendrait en opérant sur les équations (28) sont des conséquences de celle que nous allons obtenir.

Nous écrivons donc que

$$\frac{\partial W}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} + \left(p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} - W\right)\frac{\partial f}{\partial z} - 1 = 0$$

est une conséquence des équations (27), (28), ce qui se réduit à l'équation

$$(29)\qquad \frac{\partial f}{\partial z} W\left(x, y, z, -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\right) + 1 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que f soit une intégrale de cette équation aux dérivées partielles (29).

Les considérations précédentes nous fournissent alors tous les faits essentiels relatifs à l'intégration de cette équation.

D'abord elle admet une solution, et une seule, telle que l'équation (27) se réduise, pour $t = 0$, à l'équation d'une surface donnée ; ce qui caractérise le degré de généralité de l'intégrale générale de (29).

Ensuite, l'intégration de (29) résulte de celle du système (3), puisque, si l'on remplace dans les équations (26) x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 par les fonctions de deux paramètres u, v correspondant à une onde origine arbitraire, il n'y a qu'à résoudre par rapport à t, en éliminant u et v, les trois premières équations (26) pour obtenir la solution générale (12) cherchée. On peut, par exemple, prendre l'onde origine

$$(30)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}, \quad y_0 = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}, \quad z_0 = u\dfrac{\partial \theta}{\partial u} + v\dfrac{\partial \theta}{\partial v} - \theta, \\ p_0 = u, \quad q_0 = v, \end{cases}$$

θ étant une fonction arbitraire de u et v seulement.

6. On voit aussi qu'inversement l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (29) entraîne celle du système (3) qui lui est associé. Car, pour avoir le mouvement d'un élément de contact quelconque, il suffira de prendre deux ondes origines qui aient

en commun ce seul élément de contact. Les ondes qui en résulteront auront constamment en commun un élément de contact, qui, pour chaque valeur de t, sera la position de l'élément de contact initial considéré.

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il suffit même de connaître ∞^3 familles d'ondes; car, parmi les ∞^3 ondes origines, il y en aura une passant par un élément de contact E_0 arbitrairement donné, que l'on pourra considérer comme commun à cette onde origine et à deux autres ondes origines infiniment voisines convenablement choisies.

Supposons, à cet effet, que l'on connaisse une intégrale de (29), dépendant *essentiellement* de deux constantes arbitraires non additives. Soit $f(x, y, z, a, b)$ cette intégrale. Les ∞^3 ondes origines à considérer seront définies par l'équation

$$f(x, y, z, a, b) = c; \tag{31}$$

le point de contact de l'une d'elles, avec deux ondes infiniment voisines (du même système) quelconques, s'obtient en adjoignant à cette équation (31) les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial a} = a', \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = b', \tag{32}$$

et l'élément de contact commun est défini par (31), (32) et

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{33}$$

Pour passer de là à la position de cet élément au bout du temps t, il n'y a qu'à remplacer l'équation (31) par l'équation

$$f(x, y, z, a, b) = c + t, \tag{34}$$

qui donne ce que sont devenues alors les ∞^3 ondes (31).

En résumé, l'intégrale générale du système (3) est donnée par

$$\left\{\begin{aligned} & f(x, y, z, a, b) = c + t, \\ & \frac{\partial f}{\partial a} = a', \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = b'. \\ & \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right. \tag{35}$$

où les cinq constantes a, b, c, a', b' doivent être déterminées par les conditions initiales.

Enfin, comme une onde origine quelconque pourra être considérée comme l'enveloppe de ∞^2 ondes origines (31) convenablement choisies

$$f(x, y, z, a, b) = \chi(a, b),$$

qui deviennent, au bout du temps t,

$$f(x, y, z, a, b) = \chi(a, b) + t, \tag{36}$$

la solution générale de l'équation (29) s'obtiendrait en tirant a et b des équations

$$\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial \chi}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial b} - \frac{\partial \chi}{\partial b} = 0, \tag{37}$$

et en portant les valeurs trouvées dans (36); la fonction χ étant alors une fonction arbitraire.

7. En reprenant les notations des nos 3 et 4, on peut remplacer l'équation aux dérivées partielles (29) par une équation quelconque ne contenant pas la fonction inconnue.

L'identité (14) donne

$$W\left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) = H\left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, -1\right),$$

et, à cause de l'homogénéité de Π, l'équation (29) se réduit à

$$\Pi\left(x, y, z, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 1. \tag{38}$$

Pour simplifier les notations, remarquons que trouver une équation de la forme (29) revient à calculer t comme fonction de x, y, z, c'est-à-dire qu'on peut remplacer dans ce qui précède la lettre f par la lettre t; et, si l'on pose

$$\alpha = \frac{\partial t}{\partial x}, \qquad \beta = \frac{\partial t}{\partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial t}{\partial z}, \tag{39}$$

l'équation (19)

$$\Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1 \tag{19}$$

est déjà l'équation aux dérivées partielles (38) à laquelle nous sommes arrivés.

Toutes les théories des n^{os} 5, 6 (théorie des caractéristiques et théorie des intégrales complètes) s'appliquent immédiatement à cette équation, en remplaçant le système (3) par le système qu'on en a déduit au n° 3 par changement de variables, c'est-à-dire

$$(40)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial \Pi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}} = \frac{dz}{\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}} = \frac{d\alpha}{-\frac{\partial \Pi}{\partial x}} = \frac{d\beta}{-\frac{\partial \Pi}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{-\frac{\partial \Pi}{\partial z}} = dt;$$

auquel il faut adjoindre l'équation de condition (19). L'équation (33) devra aussi être remplacée par les équivalentes

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\beta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\gamma}.$$

8. On peut enfin, comme au n° 4, remplacer l'équation (19) par une équation équivalente de forme quelconque

$$(22)\qquad \Psi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Il n'y aura qu'à remplacer le système (40) par le système (24), (25)

$$(41)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}} = \frac{dy}{\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}} = \frac{dz}{\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} = \frac{dt}{\alpha\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \beta\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} = \frac{d\alpha}{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{d\beta}{-\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = \frac{d\gamma}{-\frac{\partial \Psi}{\partial z}}.$$

Enfin l'équation (21), qui y est implicitement contenue, s'écrit

$$(21)\qquad dt = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$$

et s'accorde entièrement avec les notations (39), pour les dérivées partielles.

9. On voit ainsi comment l'équation générale des surfaces caractéristiques Ψ_A peut s'interpréter comme l'équation aux dérivées partielles des familles d'ondes. On peut expliquer ce fait géométriquement, sans faire appel à la théorie des groupes de transformations invoquée au n° 5.

Écrivons en effet que la surface

$$(42)\qquad f(x, y, z) = t + \delta t$$

est tangente à chacune des ondes élémentaires issues des divers points (x_0, y_0, z_0) appartenant à l'onde, à l'instant t, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$(43) \qquad f(x_0, y_0, z_0) = t.$$

L'équation (42), quand on transporte l'origine en un tel point, devient

$$f(x_0 + \mathrm{X},\ y_0 + \mathrm{Y},\ z_0 + \mathrm{Z}) = t + \delta t,$$

et le plan tangent en l'un de ses points $\mathrm{X} = \delta x$, $\mathrm{Y} = \delta y$, $\mathrm{Z} = \delta z$ est

$$(\mathrm{X} - \delta x)\frac{\partial f}{\partial(x_0 + \delta x)} + (\mathrm{Y} - \delta y)\frac{\partial f}{\partial(y_0 + \delta y)} + (\mathrm{Z} - \delta z)\frac{\partial f}{\partial(z_0 + \delta z)} = 0.$$

L'équation tangentielle de l'onde élémentaire étant, d'autre part,

$$\delta t\,\Pi(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma) - 1 = 0,$$

on a la condition

$$\delta t\,\Pi\left[x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f}{\partial(x_0 + \delta x)}, \frac{\partial f}{\partial(y_0 + \delta y)}, \frac{\partial f}{\partial(z_0 + \delta z)}\right]$$
$$= \delta x\frac{\partial f}{\partial(x_0 + \delta x)} + \delta y\frac{\partial f}{\partial(y_0 + \delta y)} + \delta z\frac{\partial f}{\partial(z_0 + \delta z)}.$$

Négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, cette relation devient

$$\delta t\,\Pi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0}\right) = \delta x\frac{\partial f}{\partial x_0} + \delta y\frac{\partial f}{\partial y_0} + \delta z\frac{\partial f}{\partial z_0}.$$

Et comme l'on a aussi

$$f(x_0 + \delta x,\ y_0 + \delta y,\ z_0 + \delta z) = t + \delta t,$$

qui se réduit, en y négligeant aussi les termes d'ordre supérieur au premier, et en tenant compte de (43), à

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y_0}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z_0}\delta z = \delta t,$$

il reste, en définitive,

$$\Pi\left(x_0, y_0, z_0, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0}\right) = 1;$$

et, comme le point (x_0, y_0, z_0) est quelconque, c'est précisément l'équation aux dérivées partielles qu'il s'agissait de retrouver.

III. — Les trajectoires.

10. Nous appellerons *trajectoire,* dans le mode de propagation considéré, le lieu des positions successives du point faisant partie d'un élément de contact quelconque dans le mouvement de cet élément de contact. Ces trajectoires s'obtiennent donc, par l'intégration du système (3), en considérant p, q comme des inconnues auxiliaires, c'est-à-dire qu'elles sont définies par les trois premières des équations (26). Si l'on tient compte, comme cela a lieu dans ces équations, de la manière dont elles sont décrites, elles dépendent de cinq constantes arbitraires; mais elles forment seulement un système de ∞^4 courbes de l'espace.

On peut les définir par un système différentiel analogue aux *équations de Lagrange* en Dynamique.

Nous introduirons à cet effet l'équation ponctuelle de la surface caractéristique du milieu, c'est-à-dire de la surface Ψ_A. Soit

$$\Omega(x, y, z, X, Y, Z) = 1 \tag{44}$$

cette équation. Nous pouvons supposer que Ω est homogène et du premier degré en X, Y, Z; on le montrerait en partant d'une forme quelconque de l'équation de cette surface, en la rendant homogène et en résolvant par rapport à la variable d'homogénéité, comme on a fait, dans une circonstance analogue, au n° **4**. On est, du reste, naturellement conduit à introduire cette forme particulière d'équation, parce qu'elle donne immédiatement l'équation de l'onde élémentaire qui serait

$$\Omega(x, y, z, X, Y, Z) = dt. \tag{45}$$

Écrivons que cette surface (44) est la même que celle qui est définie, en coordonnées tangentielles, par l'équation (19)

$$\Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1. \tag{19}$$

Le plan tangent à (44), en un point quelconque

$$X = x', \qquad Y = y', \qquad Z = z',$$

a pour équation

$$(46)\qquad X\frac{\partial\Omega}{\partial x'}+Y\frac{\partial\Omega}{\partial y'}+Z\frac{\partial\Omega}{\partial z'}=x'\frac{\partial\Omega}{\partial x'}+y'\frac{\partial\Omega}{\partial y'}+z'\frac{\partial\Omega}{\partial z'},$$

en posant, pour abréger,

$$\Omega=\Omega(x,y,z,x',y',z');$$

et l'on a

$$\Omega=x'\frac{\partial\Omega}{\partial x'}+y'\frac{\partial\Omega}{\partial y'}+z'\frac{\partial\Omega}{\partial z'}=1,$$

de sorte que cette équation (46) est simplement

$$X\frac{\partial\Omega}{\partial x'}+Y\frac{\partial\Omega}{\partial y'}+Z\frac{\partial\Omega}{\partial z'}=1.$$

On obtiendra donc l'équation (19) en posant

$$(47)\qquad \alpha=\frac{\partial\Omega}{\partial x'},\qquad \beta=\frac{\partial\Omega}{\partial y'},\qquad \gamma=\frac{\partial\Omega}{\partial z'},$$

et éliminant x', y', z' entre (47) et

$$(48)\qquad \Omega(x,y,z,x',y',z')=1.$$

Par suite, la relation différentielle unique qui résulte de (19), c'est-à-dire

$$(49)\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Pi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Pi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\Pi}{\partial\beta}d\beta+\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}d\gamma=0,$$

est une conséquence des relations (47), (48) et de celles qu'on en déduit par différentiation totale.

Or, en déduisant de l'équation tangentielle (19) l'équation ponctuelle correspondante, on serait conduit à écrire les relations

$$(50)\qquad x'=\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha},\qquad y'=\frac{\partial\Pi}{\partial\beta},\qquad z'=\frac{\partial\Pi}{\partial\gamma}$$

qui sont, par suite, des conséquences de (47) et (48); de sorte que (49) devient

$$(51)\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Pi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Pi}{\partial z}dz+x'\,d\alpha+y'\,d\beta+z'\,d\gamma=0.$$

On tire alors de (47)

$$x'\,d\alpha + y'\,d\beta + z'\,d\gamma = \left(x'\frac{\partial^2\Omega}{\partial x'\,\partial x} + y'\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'\,\partial x} + z'\frac{\partial^2\Omega}{\partial z'\,\partial x}\right)dx$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left(x'\frac{\partial^2\Omega}{\partial x'^2} + y'\frac{\partial^2\Omega}{\partial y'\,\partial x'} + z'\frac{\partial^2\Omega}{\partial z'\,\partial x'}\right)dx'$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui se réduit, à cause du degré d'homogénéité de Ω et de ses dérivées partielles, à

$$x'\,d\alpha + y'\,d\beta + z'\,d\gamma = \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz.$$

Et comme c'est la seule relation différentielle en dx, dy, dz, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ que l'on puisse tirer de (47) et (48), elle doit être identique à (51) si l'on tient compte des équations finics (47) et (48); c'est-à-dire que l'on a, comme conséquence du changement des coordonnées tangentielles en coordonnées ponctuelles effectué, les identités

$$(52)\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial x} + \frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial z} + \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0.$$

Cela posé, le changement de variables en question se fait immédiatement dans les équations (15), (18), (19). En comparant (15) et (50), on voit qu'il n'y a qu'à poser dans les formules précédentes

$$(53)\qquad \frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z'.$$

(Cela résulte d'ailleurs des considérations géométriques du n° 2.) Et les équations (18), comparées à (52) et à (47), donnent le système annoncé

$$(54)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial x'}\right) - \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial z'}\right) - \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

auquel il faut adjoindre l'équation (48)

$$(48)\qquad \Omega(x, y, z, x', y', z') = 1.$$

Ainsi se trouvent définies directement les trajectoires; et, si l'on a intégré ce système, on en déduit le mouvement des éléments de contact eux-mêmes au moyen des équations (47). On a donc là une forme nouvelle des équations d'une transformation de contact infinitésimale.

On peut remarquer qu'on déduit des équations (54), en multipliant par x', y', z' et ajoutant,

$$\frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial\Omega}{\partial x'}+y'\frac{\partial\Omega}{\partial y'}+z'\frac{\partial\Omega}{\partial z'}\right)-\frac{1}{dt}d\Omega=0,$$

ce qui est une identité, vu l'homogénéité de Ω. Ces équations se réduisent donc, en réalité, à deux seulement.

11. Si l'on prenait l'équation de Ψ_A sous une forme quelconque équivalente à (44)

$$\Theta(x, y, z, x', y', z')=0; \tag{55}$$

on aurait, en raisonnant comme au n° 4,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=L\frac{\partial\Theta}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y}=L\frac{\partial\Theta}{\partial y},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial z}=L\frac{\partial\Theta}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'}=L\frac{\partial\Theta}{\partial x'},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y'}=L\frac{\partial\Theta}{\partial y'},\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial z'}=L\frac{\partial\Theta}{\partial z'},$$

$$\frac{1}{L}=x'\frac{\partial\Theta}{\partial x'}+y'\frac{\partial\Theta}{\partial y'}+z'\frac{\partial\Theta}{\partial z'}.$$

La première équation (54) deviendrait donc

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{\partial\Theta}{\partial x'}\right)-L\frac{\partial\Theta}{\partial x}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial x'}-\frac{\partial\Theta}{\partial x}=-\frac{\frac{dL}{dt}}{L}\frac{\partial\Theta}{\partial x'}=\left(\frac{d}{dt}\log\frac{1}{L}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial x'}.$$

On aurait donc à adjoindre à l'équation (55) le système

$$\frac{\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial x'}-\frac{\partial\Theta}{\partial x}}{\frac{\partial\Theta}{\partial x'}}=\frac{\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial y'}-\frac{\partial\Theta}{\partial y}}{\frac{\partial\Theta}{\partial y'}}=\frac{\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial z'}-\frac{\partial\Theta}{\partial z}}{\frac{\partial\Theta}{\partial z'}}. \tag{56}$$

On voit, de plus, que la valeur commune de ces rapports (56) est

$$\frac{d}{dt}\log\left(x'\frac{\partial\theta}{\partial x'}+y'\frac{\partial\theta}{\partial y'}+z'\frac{\partial\theta}{\partial z'}\right),$$

mais c'est une conséquence de l'équation (55).

Le système différentiel général des trajectoires est donc formé seulement des équations (56) et (55).

Supposons, en particulier, que l'équation (55) soit de la forme

$$(57)\qquad \theta = \mathrm{H}(x, y, z, x', y', z') - 1 = 0,$$

H étant homogène de degré m en x', y', z'. On peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi en prenant pour H une puissance de Ω. On a alors

$$x'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}+y'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}+z'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'} = m\mathrm{H}$$

et la valeur commune des rapports (56) est zéro. Les équations des trajectoires prennent alors la forme de Lagrange

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = 0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = 0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right.$$

avec la condition (57). Mais, si $m \neq 1$, on peut supprimer la condition (57). Car, en multipliant les équations (58) par x', y', z' et ajoutant, il vient

$$\frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}+y'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}+z'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z'}\right)-\frac{d\mathrm{H}}{dt} = (m-1)\frac{d\mathrm{H}}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(59)\qquad \mathrm{H}(x, y, z, x', y', z') = h = \text{const.}$$

Or, remplacer dans l'équation (57) le terme -1 par le terme $-h$ revient à remplacer les surfaces caractéristiques Ψ_A par les surfaces homothétiques (avec un rapport d'homothétie constant) et n'altère pas essentiellement les trajectoires. D'une manière plus précise, cela revient à remplacer t par $h^{\frac{1}{m}}t$ dans toutes les équations.

Il est clair que, si l'on partait inversement d'un système (58), où H serait une fonction homogène en x', y', z' quelconque, on pourrait toujours l'interpréter comme correspondant à une transformation de contact infinitésimale et le ramener, par suite, à la forme canonique.

12. Revenons aux équations (54); elles ne contiennent le temps qu'en apparence. En effet, $\frac{\partial\Omega}{\partial x'}, \frac{\partial\Omega}{\partial y'}, \frac{\partial\Omega}{\partial z'}$ sont de degré zéro en x', y', z'; de sorte qu'on a, par exemple,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x'} = \frac{\partial\,\Omega(x, y, z, dx, dy, dz)}{\partial(dx)}.$$

Au contraire, $\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z}$ sont homogènes de degré un; et l'on a, par exemple,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}dt = \frac{\partial\,\Omega(x, y, z, dx, dy, dz)}{\partial x};$$

donc, en posant, pour abréger,

$$\bar{\Omega} = \Omega(x, y, z, dx, dy, dz), \tag{57}$$

les équations (54) s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} d\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial(dx)} - \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial x} &= 0,\\ d\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial(dy)} - \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial y} &= 0,\\ d\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial(dz)} - \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Et l'on voit qu'elles définissent les trajectoires, indépendamment de la loi suivant laquelle elles sont décrites. Bien entendu, elles se réduisent à deux équations distinctes seulement.

C'est l'équation (48) qui détermine ensuite la manière dont les trajectoires sont décrites, car elle s'écrit

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = dt. \tag{59}$$

c'est-à-dire que t est donné par la quadrature

$$(60)\qquad t = \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = \int \overline{\Omega}.$$

13. Les équations (58) donnent une propriété caractéristique des trajectoires; elles expriment, en effet, que la variation de l'intégrale

$$(61)\qquad \theta = \int \Omega(x, y, z, dx, dy, dz)$$

est nulle quand on se déplace sur une trajectoire; et la formule (60) montre que le temps t est justement la valeur correspondante de cette intégrale (61).

Cherchons à interpréter l'intégrale (61) prise entre deux points A et B d'une courbe quelconque. Il suffit pour cela de se représenter cette courbe comme un canal, de diamètre infiniment petit, à l'intérieur duquel l'ébranlement se propage sans frottements. Nous admettrons que, si l'ébranlement atteint à un instant quelconque le point M de cette courbe, de coordonnées x, y, z, au bout du temps dt il atteint le point M' de la courbe qui se trouve sur l'onde élémentaire qui a M pour origine; c'est-à-dire que le temps qu'il met pour aller de M en M' est donné, à un infiniment petit près d'ordre supérieur, par l'équation

$$\Omega(x, y, z, dx, dy, dz) = dt.$$

Alors l'*intégrale* (61) *représente le temps que met l'ébranlement à se propager de* A *et* B *en suivant la courbe considérée.*

Et *les trajectoires sont les courbes pour lesquelles la variation de ce temps* (*quand on les déforme infiniment peu*) *est nulle.*

Si nous cherchons à quelle condition elles correspondent au temps *minimum,* il nous faudra, suivant la théorie classique de la variation seconde, exprimer que la forme quadratique

$$(62)\qquad \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2}\xi^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'\,\partial z'}\eta\zeta$$

est constamment positive, sauf pour les valeurs de la forme

$$\xi = \lambda x', \qquad \eta = \lambda y', \qquad \zeta = \lambda z'.$$

Nous allons interpréter cette condition géométriquement.

Considérons, à cet effet, en un point quelconque $A(x, y, z)$ d'une trajectoire, la surface Ψ_A caractéristique. La tangente en A à cette trajectoire perce Ψ_A au point P qui a pour coordonnées (l'origine étant transportée en A) x', y', z'; car on peut supposer que l'on a

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') - 1 = 0. \tag{63}$$

Le plan tangent en P à Ψ_A a pour équation (*voir* n° **10**)

$$X \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + Y \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + Z \frac{\partial \Omega}{\partial z'} - 1 = 0. \tag{64}$$

Cherchons la position d'un point quelconque N de Ψ_A, supposé infiniment voisin de P, par rapport à ce plan tangent. Les coordonnées de N étant $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$, il faudra chercher le signe de

$$(x' + \xi) \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + (y' + \eta) \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + (z' + \zeta) \frac{\partial \Omega}{\partial z'} - 1,$$

qui se réduit, à cause de (63), à

$$\xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial z'}. \tag{65}$$

Or, le point N étant sur Ψ_A, on a

$$\Omega(x' + \xi, y' + \eta, z' + \zeta) - 1 = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$\Sigma \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{1}{1.2} \left(\Sigma \xi^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} + 2 \Sigma \eta \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial z'} \right) + \ldots = 0$$

ou encore

$$\Sigma \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x'} = - \frac{1}{1.2} \left(\Sigma \xi^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x'^2} + 2 \Sigma \eta \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y' \partial z'} \right) + \ldots. \tag{66}$$

Si donc la forme (62) est positive, le résultat de substitution est négatif, c'est-à-dire du même signe que pour le point

$$M(X = 0, Y = 0, Z = 0).$$

Les valeurs exceptées $\xi = \lambda x'$, $\eta = \lambda y'$, $\zeta = \lambda z'$ ne correspondent à aucun point N, car la condition

$$\Omega(x'+\lambda x', y'+\lambda y', z'+\lambda z') = 1$$

se réduit, à cause de l'homogénéité de Ω, à

$$1+\lambda = 1,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = 0,$$

ce qui donnerait le point P lui-même.

Si donc la condition analytique du minimum est remplie, *la surface* Ψ_A *a, en* P, *ses deux courbures de même signe, et tourne sa concavité vers* M.

Supposons réciproquement cette condition géométrique remplie. La forme (62) a son discriminant nul, à cause des relations que donne le théorème d'Euler appliqué aux fonctions homogènes de degré zéro $\frac{\partial\Omega}{\partial x'}, \frac{\partial\Omega}{\partial y'}, \frac{\partial\Omega}{\partial z'}$ (*voir* n° 10). Si elle était une différence de deux carrés, elle s'annulerait pour deux relations de la forme

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \tag{67}$$

vérifiées pour $\xi = \lambda x'$, $\eta = \lambda y'$, $\zeta = \lambda z'$, puisque ces valeurs annulent les dérivées partielles de cette forme. Ces relations représentent géométriquement deux plans passant par la droite AP et qui, dans l'hypothèse faite sur la forme de Ψ_A, coupent cette surface suivant des courbes passant en P. Il y aurait donc des points de la surface, infiniment voisins de P, et pour lesquels, en vertu de l'équation (66), leur distance au plan tangent en P serait d'ordre supérieur au second. Or cela est contradictoire avec l'hypothèse de deux courbures de même signe.

La forme (62) ne peut pas non plus se réduire à un carré parfait, car elle s'annulerait de nouveau pour tous les points d'un plan passant par AP, et la même contradiction se présenterait.

La condition géométrique trouvée est donc équivalente à la condition analytique classique.

Nous concluons donc que *les trajectoires sont les courbes suivant lesquelles les ébranlements se propagent le plus rapidement toutes les fois que les ondes élémentaires sont des surfaces ayant en tous leurs points leurs deux courbures de* *même sens, et tournant toujours leur concavité vers leurs origines respectives.*

L'application de ce résultat aux divers cas envisagés en Optique serait immédiate. Il est clair que, d'après la théorie du calcul des variations, il n'est vrai qu'en général, c'est-à-dire qu'autant que les arcs de trajectoires considérés ne contiennent pas de couples de foyers (points conjugués de Weierstrass).

14. La propriété des trajectoires de correspondre à l'évanouissement de la variation d'une intégrale subsiste quel que soit le système différentiel qui les définisse.

Le système (15)(18)(19) est fourni par la condition

$$\delta \int \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0, \tag{68}$$

lorsque α, β, γ sont liés par la condition (19)

$$\Pi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 1 \tag{19}$$

et que t est donné par (21)

$$dt = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz. \tag{21}$$

Le système (3) est donné par la condition équivalente

$$\delta \int \frac{dz - p\, dx - q\, dy}{W} = 0 \tag{69}$$

avec l'équation qui définit le temps, c'est-à-dire

$$dt = \frac{p\, dx + q\, dy - dz}{W}. \tag{70}$$

Mais ces nouvelles formes du théorème, qui se rapprochent de résultats exposés par MM. Yoshiye (¹) et E.-R. Hedrick (²), d'après les idées de M. Hilbert, se prêtent moins bien à une interprétation géométrique simple.

15. Nous insisterons, en vue des applications, sur la propriété des trajectoires, relative aux familles d'ondes, qui résulte de

(¹) *Math. Annalen*, t. LVII, p. 185.
(²) *Ann. of Math.*, 2ᵉ série, t. IV, p. 141, 157.

l'assimilation de la propagation des ondes à un groupe de transformations de contact. Et, pour rendre les énoncés plus concis, nous introduirons le mode de langage suivant :

Soient A un point quelconque, E un élément de contact de ce point; à cet élément correspond une trajectoire déterminée; nous dirons que la direction de la tangente à la trajectoire est conjuguée à l'élément et aussi que la trajectoire elle-même est conjuguée à l'élément. Si α, β, γ sont les coefficients de direction de la normale à l'élément et x', y', z' ceux de la trajectoire, les conditions qui expriment que la trajectoire est conjuguée à l'élément sont les équations (47) que nous écrirons, en supposant que α, β, γ ne sont ici déterminés, ainsi que x', y', z', qu'à un facteur près,

$$(71) \qquad \frac{\alpha}{\frac{\partial\Omega}{\partial x'}} = \frac{\beta}{\frac{\partial\Omega}{\partial y'}} = \frac{\gamma}{\frac{\partial\Omega}{\partial z'}}.$$

Nous dirons de même que la trajectoire est conjuguée en A à toute surface et à toute courbe admettant l'élément E pour l'un de ses éléments de contact. Dans le cas d'une surface, le fait s'exprimera toujours par les équations (71), où α, β, γ seront coefficients de direction de la normale à la surface. Dans le cas d'une courbe ayant ξ, η, ζ pour coefficients de direction de sa tangente, on aura la condition

$$(72) \qquad \xi\frac{\partial\Omega}{\partial x'} + \eta\frac{\partial\Omega}{\partial y'} + \zeta\frac{\partial\Omega}{\partial z'} = 0.$$

Elle exprime que la tangente à la courbe est parallèle à une des droites qui sont tangentes à l'onde élémentaire au point où cette onde est percée par la direction de la trajectoire.

On peut dès lors énoncer les faits suivants :

Si ∞^2 trajectoires sont conjuguées à une surface, elles sont conjuguées à ∞^1 surfaces et les arcs des trajectoires compris entre deux de ces surfaces correspondent à des temps égaux.

Si ∞^1 trajectoires sont conjuguées à une courbe, elles sont conjuguées à ∞^1 courbes et les arcs des trajectoires compris entre deux de ces courbes correspondent à des temps égaux.

Ces deux énoncés résultent, en effet, de la propagation d'une onde origine, surface ou courbe, au moyen du groupe de transformations de contact considéré. Relativement au second énoncé, on remarquera que les ∞^1 courbes issues de la courbe donnée sont tracées sur les ondes superficielles issues de la courbe qui constitue l'onde origine. On remarquera aussi qu'étant données ∞^1 trajectoires formant un système continu, il existe toujours une famille de ∞^1 courbes auxquelles elles sont conjuguées; car les coordonnées x, y, z d'un point de l'une quelconque de ces trajectoires sont des fonctions de t et d'un paramètre s

$$x = f(t, s), \qquad y = g(t, s), \qquad z = h(t, s) \tag{74}$$

et les courbes cherchées seront définies par l'équation différentielle

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x'} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z'} dz = 0, \tag{75}$$

où x, y, z, dx, dy, dz devront être remplacés par les fonctions (74) et leurs différentielles et où x', y', z' doivent avoir les valeurs

$$x' = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad y' = \frac{\partial g}{\partial t}, \qquad z' = \frac{\partial h}{\partial t}. \tag{76}$$

On peut enfin joindre aux deux énoncés précédents le suivant :

Les ∞^2 trajectoires issues d'un point A *sont conjuguées à ∞^1 surfaces et les arcs des trajectoires compris entre* A *et une de ces surfaces correspondent à des temps égaux.*

Les surfaces en question sont, en effet, les surfaces $\Phi_{A,t}$ dont nous sommes partis au n° 1.

IV. — Résumé général. Applications.

16. Les considérations précédentes peuvent se reprendre, sans modifications essentielles, en passant de l'espace ordinaire à un espace à n dimensions. Nous en énoncerons les points les plus importants.

I. Cet espace étant considéré comme rempli par un milieu, de nature constante, dans lequel se propagent, suivant une loi déterminée, des ébranlements d'une certaine nature, le mode de propagation est déterminé par le *système des ondes élémentaires* qui ont pour origines les divers points du milieu.

Cette propagation peut être considérée comme un déplacement des éléments de contact de l'espace, défini par un groupe de transformations de contact à un paramètre. L'onde élémentaire qui a pour origine un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le lieu des extrémités des déplacements élémentaires $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ dont varie ce point, considéré comme associé successivement avec tous ses éléments de contact, lorsque le temps varie de dt.

Son équation générale est donc de la forme

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = dt, \tag{77}$$

Ω étant homogène de degré *un* en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

On peut également définir le système des ondes élémentaires par leur équation générale écrite en coordonnées tangentielles, qui sera de la forme

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{1}{dt}, \tag{78}$$

où Π est homogène de degré *un* en $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On suppose ici que l'équation générale d'un plan tangent, l'origine étant transportée en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, est prise sous la forme

$$p_1 X_1 + p_2 X_2 + \ldots + p_n X_n - 1 = 0. \tag{79}$$

On peut considérer, au lieu des ondes élémentaires, les surfaces caractéristiques, lieux des extrémités des vitesses $\left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$. En posant

$$\frac{dx_1}{dt} = x'_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = x'_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = x'_n, \tag{80}$$

elles sont définies par l'une ou l'autre des deux équations

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 1, \tag{81}$$

ou

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid p_1, p_2, \ldots, p_n) = 1, \tag{82}$$

suivant que l'on se place au point de vue ponctuel, ou au point de vue tangentiel. L'équation (82) est identiquement vérifiée par les formules

$$(83)\qquad p_1=\frac{\partial\Omega}{\partial x'_1},\qquad p_2=\frac{\partial\Omega}{\partial x'_2},\qquad \ldots,\qquad p_n=\frac{\partial\Omega}{\partial x'_n};$$

et l'équation (81) est identiquement vérifiée par les formules

$$(84)\qquad x'_1=\frac{\partial\Pi}{\partial p_1},\qquad x'_2=\frac{\partial\Pi}{\partial p_2},\qquad \ldots,\qquad x'_n=\frac{\partial\Pi}{\partial p_n};$$

et l'on doit associer à ces formules la condition

$$(85)\qquad p_1x'_1+p_2x'_2+\ldots+p_nx'_n=1.$$

II. Un élément de contact quelconque aura pour coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid p_1, p_2, \ldots, p_n)$, c'est-à-dire que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seront les coordonnées de son point; et $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ les coefficients de direction de sa normale. Et le groupe de transformations de contact considéré sera défini par les équations canoniques [1]

$$(86)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial\Pi}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Pour qu'elles définissent exactement la propagation considérée, c'est-à-dire pour que le paramètre t y représente bien le temps, et non le temps multiplié par une constante, on doit y joindre l'équation (82), ou la condition (85), qui peut s'écrire

$$(87)\qquad dt=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n.$$

III. Le même mode de propagation peut se définir en cherchant directement les ∞' surfaces qui proviennent d'une onde origine quelconque. Une telle *famille d'ondes* étant représentée par une équation de la forme

$$(88)\qquad t=f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

le problème revient à chercher t en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. La

---

(1) Cette forme des équations d'une transformation de contact infinitésimale a été donnée par Lie. *Voir*, par exemple, *Theorie der Transformations-Gruppen*, t. II, p. 263.

formule (87) étant alors supposée représenter la différentielle totale de t, la solution du problème consiste à intégrer l'équation (82), considérée comme une équation aux dérivées partielles.

Et, si l'on a une intégrale de cette équation, renfermant $(n-1)$ constantes arbitraires essentielles, et dont aucune ne soit additive

$$t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \tag{89}$$

l'intégration du système (86), (87) est donnée par les formules ([1])

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial a_k} = b_k, \quad t = f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_n \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (k = 1, 2, \ldots, \overline{n-1}). \end{array} \right. \tag{90}$$

IV. Si, dans le mouvement des éléments de contact, on considère seulement le mouvement des points de ces éléments, on obtient ce que l'on peut appeler les *trajectoires* de la propagation. Elles sont définies directement par le système différentiel

$$d\frac{\partial \Omega}{\partial (dx_i)} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{91}$$

et la manière dont elles sont décrites est donnée par l'équation

$$dt = \Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid dx_1, dx_2, \ldots, dx_n). \tag{92}$$

Cela équivaut à dire qu'elles annulent la variation de l'intégrale

$$\theta = \int \Omega(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid dx_1, dx_2, \ldots, dx_n). \tag{93}$$

La valeur de cette intégrale prise le long d'un arc de courbe quelconque donne le temps que met un ébranlement à se propager le long de cet arc.

Enfin, si l'on convient de dire qu'une trajectoire est conjuguée à une multiplicité, si elle correspond au mouvement d'un élément de contact de cette multiplicité, on a le théorème suivant :

Si ∞^p trajectoires sont conjuguées à une multiplicité à p dimensions, elles sont conjuguées à ∞^1 multiplicités de

---

([1]) C'est, sous l'une de ses formes, le *théorème de Jacobi*. Si l'on veut faire abstraction de la condition (87), il suffit de multiplier t par une nouvelle constante arbitraire, dans les formules (90); cela résulte de ce qui précède.

même nature, et les arcs de ces trajectoires compris entre deux de ces multiplicités correspondent tous au même intervalle de temps.

17. Les applications sont nombreuses. Considérons d'abord la propagation de la lumière dans un milieu isotrope, mais non homogène; les ondes élémentaires sont des sphères, c'est-à-dire que

$$\Omega = \omega(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Les trajectoires sont les rayons lumineux; et les conditions (71) ou (72) deviennent des conditions d'orthogonalité.

D'où le théorème que des rayons lumineux issus d'un point, ou normaux à une surface, sont normaux à une infinité de surfaces. Les familles d'ondes sont les familles de surfaces orthogonales à une même congruence de rayons. Ces rayons sont curvilignes, en général.

Si le milieu est homogène, mais non pas nécessairement isotrope, Ω est fonction de x', y', z' seulement; on conclut alors des équations (58) et (59) que x', y', z' sont constants. Les rayons lumineux sont rectilignes, et la vitesse de propagation est constante sur chaque rayon. A chaque direction de rayon est associée une direction de plan; c'est le plan tangent à la surface d'onde au point où elle est percée par la direction du rayon (1).

18. Tout problème où intervient une intégrale de la forme (93), dont la variation doit être nulle, constitue une application de ce qui précède; et la notion de transformation de contact y interviendra utilement. Tel le problème des *brachistochrones;* le problème général de l'*équilibre des fils;* le problème des *lignes géodésiques.* Tel enfin le *problème général de la Dynamique.* Le théorème général sur les multiplicités et les trajectoires conjuguées donne la clef des théorèmes de Thomson et de Tait, et de leurs généralisations.

Sans insister sur les détails, examinons le cas des équations de

---

(1) *Comparez :* LÉVISTAL, *Recherches d'Optique géométrique* (*Annales de l'École Normale,* 7e série, t. IV, p. 195).

la Dynamique. Partons des équations de Lagrange, où nous supposerons que, ni la force vive $2T(x_1, \ldots, x_n \mid x'_1, \ldots, x'_n)$ du système, ni la fonction des forces $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne dépendent du temps. Ces équations sont

$$(94) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et, en supposant que l'on a donné à la constante des forces vives une valeur particulière, on peut écrire l'équation des forces vives, qu'il faut joindre à (94),

$$(95) \qquad T = U.$$

Au moyen de cette équation, nous allons éliminer le temps des équations (94). Posons

$$\overline{T} = T(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid dx_1, dx_2, \ldots, dx_n),$$

et nous écrirons (95) sous la forme

$$\overline{T} = U\, dt^2,$$

c'est-à-dire

$$(96) \qquad dt = \sqrt{\frac{\overline{T}}{U}} = S(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n).$$

Donc

$$T = \frac{\overline{T}}{S^2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x'_i} = \frac{1}{S}\frac{\partial \overline{T}}{\partial\, dx_i}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{S^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}.$$

Par suite

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = \frac{1}{S}\frac{\partial (US^2)}{\partial\, dx_i} = 2U\frac{\partial S}{\partial\, dx_i} = 2\frac{\partial (US)}{\partial\, dx_i},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{S^2}\frac{\partial (US^2)}{\partial x_i};$$

et les équations (94) deviennent

$$2\frac{1}{S}\, d\frac{\partial (US)}{\partial x_i} - \frac{2}{S}U\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou enfin, en posant,

$$(97) \qquad \Omega = 2US = 2\sqrt{U\overline{T}},$$

$$d\frac{\partial \Omega}{\partial (dx_i)} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Et comme Ω est homogène de degré *un* par rapport aux différentielles, c'est un système de la forme (91), où Ω a seulement la forme particulière

$$(98)\qquad \Omega = 2\sqrt{U(x_1, \ldots, x_n)\,T(x_1, \ldots, x_n \mid dx_1, \ldots, dx_n)},$$

caractérisée par ce fait que T est une forme quadratique définie positive des différentielles.

Cette fonction Ω est l'*action élémentaire* du système; et nous arrivons ainsi, par un calcul classique, au *principe de la moindre action*. Mais Ω a pour nous une autre signification : l'équation $\Omega = d\tau$ définissant le système des ondes élémentaires d'un mode de propagation d'ondes, dans lequel les trajectoires sont les mêmes que celles du mouvement dynamique considéré. Seulement ce qui correspond au temps τ du mouvement ondulatoire, c'est l'*action* du mouvement dynamique.

En d'autres termes, les trajectoires de tout problème de dynamique sont identiques à celles d'un groupe de transformations de contact à un paramètre; mais le paramètre canonique de ce groupe est, non pas le temps t, mais l'action

$$(99)\qquad \tau = 2\int \sqrt{UT}$$

du problème de dynamique.

Il résulte de ce qui précède qu'en gardant cette action pour variable indépendante, on pourra ramener l'intégration du problème à celle d'un système canonique (86), ou d'une équation aux dérivées partielles (82). Il faudra ensuite déterminer le temps par la quadrature

$$(100)\qquad t = \frac{1}{2}\int \frac{d\tau}{U},$$

qui provient des deux formules

$$dt = \sqrt{\frac{T}{U}}, \qquad d\tau = 2\sqrt{UT}.$$

Comparons le calcul avec celui d'Hamilton. Nous aurons, pour arriver à l'équation (82), à éliminer $x'_1, \ldots, x'_n$ des équations homogènes de degré *zéro* (83), c'est-à-dire

$$(101) \qquad p_i = \sqrt{\frac{U}{T}} \cdot \frac{\partial T}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le calcul d'Hamilton, pour arriver à l'équation aux dérivées partielles de Jacobi,

$$(102) \qquad H(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

il faut éliminer $x'_1, \ldots, x'_n$ entre les équations

$$(103) \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \qquad T - U = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Or, on déduit de ces équations les équations homogènes (101). L'équation (82)

$$(104) \qquad \Pi(x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) - 1 = 0$$

est donc équivalente à l'équation (102) de Jacobi-Hamilton ([1]). Et, si l'on écrit (102) sous la forme

$$\sqrt{\frac{H+U}{U}} - 1 = 0,$$

le radical qui y figure étant homogène de degré *un*, on a identiquement

$$(105) \qquad \Pi \equiv \sqrt{\frac{H}{U} + 1}.$$

Quant à notre système canonique

$$(106) \qquad \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour en déduire le système de Hamilton, il faut faire intervenir, non seulement la formule (100), mais encore l'équation des forces vives $H = 0$. Le calcul résulte immédiatement de la formule (105).

Remarquons enfin que cette formule (105), qui donne la fonction caractéristique de la transformation de contact infinitésimale,

---

([1]) C'est le fait constaté par Lie, dans le cas particulier du mouvement d'un point matériel (*Leipziger Berichte*, t. XLI, p. 145).

peut s'écrire

$$\Pi = \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{U}}, \tag{107}$$

en désignant par $\mathfrak{T}$ la forme adjointe de T, ou plus exactement ce que devient T par le changement de variables

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{108}$$