BULLETIN DE LA S. M. F.

COMBEBIAC

Remarques sur la question des principes de l'analysis sitûs

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 191-196

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__191_1>

REMARQUES SUR LA QUESTION DES PRINCIPES DE L'ANALYSIS SITÛS;

Par M. Combebiac.

Les axiomes doivent exprimer les propriétés fondamentales des concepts indéfinissables logiquement (les propriétés des autres découlent de leurs définitions), c'est-à-dire doivent avoir pour effet de *classer* ces concepts dans des catégories préalablement conçues; les théories fondées sur ces axiomes deviennent alors des applications de théories plus générales. C'est ainsi que diverses branches des mathématiques se présentent comme des applications, savoir : l'Analyse mathématique, de l'étude de certains ensembles ordonnés; la Géométrie projective, de celle de certains ensembles de lignes; la Géométrie métrique, de celle de certains groupes de transformations ponctuelles.

Seule la question des principes de l'*Analysis sitûs* conserve encore quelque obscurité, bien qu'il ne soit pas douteux que cette branche de la Géométrie doit être rattachée à une théorie générale des variétés numériques. On se propose, en rapprochant quelques résultats dus à la théorie des ensembles, de préciser la position de cette question et peut-être aussi de fournir une indication pour la poursuite de sa solution.

I.

L'IDÉE D'ORDRE COMPLEXE.

M. G. Cantor [1] avait manifesté l'intention d'étudier, en plus

[1] G. Cantor, *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, traduction française par Marotte, p. 24; Hermann, Paris, 1904.

des ensembles *simplement ordonnés,* des ensembles ordonnés d'ordre deux, trois, etc. Une telle généralisation de l'idée d'ordre vise évidemment les variétés à plusieurs dimensions. Bien que rien n'ait encore été publié à ce sujet, il est possible de préciser, tout au moins, la manière dont une théorie générale de l'ordre fournirait à l'*Analysis sitûs* son fondement.

A s'en tenir aux types d'ordre simple usuels, l'idée d'ordre se présente comme la notion commune à certaines représentations numériques d'un même ensemble; c'est ainsi que l'ordre inhérent à un continu à une dimension est commun à une infinité de représentations numériques de cet ensemble, qui se déduisent les unes des autres au moyen de transformations biunivoques et continues, c'est-à-dire définies par des fonctions numériques continues, uniformes et à inverses uniformes. La théorie de l'ordre a donc pour effet de rendre l'étude des continus à une dimension indépendante de leurs représentations numériques et permet de se passer, pour cette étude, de l'intervention de tout système de coordonnées.

L'idée d'ordre complexe aurait le même rôle à jouer par rapport aux continus à n dimensions, c'est-à-dire que l'ordre complexe inhérent à l'un de ces continus doit représenter ce qu'ont de commun les systèmes de coordonnées de cet ensemble qui se déduisent les uns des autres au moyen de transformations biunivoques et continues. Cet ordre peut évidemment être conçu indépendamment des systèmes de coordonnées qui le caractérisent; les diverses particularités que peuvent présenter les continus donneraient lieu alors à divers types d'ordre complexe analogues aux types d'ordre simple distingués par M. G. Cantor.

L'*Analysis sitûs* a pour objet l'étude de la continuité géométrique, c'est-à-dire des propriétés inhérentes aux représentations habituelles de l'espace sur la variété numérique complète à trois dimensions. Quelles que soient les notions intuitives qui entrent comme éléments constituants dans celle de la continuité géométrique, les propriétés qui font l'objet de l'*Analysis sitûs* résultent du fait que cette continuité définit, pour l'espace ponctuel, un ordre complexe du même type que celui de la variété numérique complète à trois dimensions.

La nature logique de l'*Analysis sitûs* est donc bien spécifiée;

cette science constitue une application de la théorie d'un certain type d'ordre complexe.

II.

LA NOTION DE VOLUME.

Une proposition ayant pour but de classer l'*Analysis sitûs* ne peut évidemment exprimer en rien des qualités de l'espace lui-même (sauf sa puissance) et ne peut intéresser que les notions qui ont été réunies sous le terme assez vague de continuité géométrique. Il importe tout d'abord de réduire l'idée de cette continuité à des notions à la fois plus intuitives et plus précises.

Dans tout ensemble ayant la puissance du continu et rapporté à un système de n coordonnées il existe des ensembles *continus par rapport à ce système de coordonnées*. Ces ensembles jouissent de la même propriété par rapport à tous les systèmes de coordonnées qui se déduisent les uns des autres par transformations biunivoques et continues, c'est-à-dire qui déterminent la même notion de continuité (le même ordre complexe). Ces ensembles peuvent être appelés les *segments* relatifs à l'ordre considéré, et il est facile de se rendre compte qu'ils déterminent complètement, à leur tour, l'ordre correspondant.

Les segments déterminés par la continuité géométrique sont évidemment les volumes. L'axiome fondamental de l'*Analysis sitûs* peut donc être pris sous la forme suivante :

A. — *Les volumes sont les segments relatifs à un ordre complexe du même type que celui qui est inhérent à la variété numérique complète à trois dimensions.*

Cette proposition a pour effet de classer la notion de volume (1)

(1) Mais non de la définir. Il n'est peut-être pas inutile d'observer, à ce propos, que, bien que les définitions comportent un haut degré d'arbitraire, elles doivent néanmoins satisfaire à certaines conditions grammaticales; c'est ainsi que les deux termes d'une définition, savoir la dénomination, d'une part, et les propriétés en cause, d'autre part, doivent s'appliquer au même objet, et il ne saurait être licite de dire, par exemple : j'applique l'adjectif *droite* à toute ligne appartenant à un ensemble jouissant de telles et telles propriétés, car tout qualificatif du substantif *ligne* doit exprimer une qualité des lignes, c'est-à-dire déterminer une répartition des lignes en deux ensembles formés, l'un des lignes qui possèdent la qualité visée, l'autre de celles qui ne la possèdent pas.

dans une catégorie préalablement conçue et définie en fonction des concepts mathématiques généraux (en admettant que l'on soit parvenu à définir le type d'ordre visé indépendamment des concepts numériques); elle constitue donc un axiome, dans la véritable acception du mot.

Il est intéressant d'observer que les volumes ne sont pas les seuls ensembles de points qui jouissent de la propriété spécifiée. En effet, si l'on applique aux divers points de l'espace une transformation ponctuelle biunivoque mais discontinue, les volumes deviennent des ensembles de points, qui ne sont pas des volumes mais qui possèdent, en tant qu'ensembles de points, les mêmes propriétés que les volumes, c'est-à-dire qu'ils constituent les segments d'un nouveau dispositif ordinal semblable à celui qui est déterminé par la continuité géométrique. De même les lignes seraient ainsi transformées en ensembles simplement ordonnés qui leur sont semblables et qui jouent dans le nouveau dispositif le même rôle que les lignes dans l'ancien.

L'*Analysis sitûs* se présente donc comme une application d'une théorie plus générale et à laquelle il est difficile de refuser le qualificatif *géométrique,* puisqu'elle conserve la notion de point.

III.

LES SEGMENTS D'UN DISPOSITIF ORDINAL.

Les remarques précédentes ont pour effet de ramener la question des principes de l'*Analysis sitûs* à la résolution de ce problème : édifier une théorie générale de l'ordre.

Tandis que la notion d'ordre simple est une des plus nettes qui soient fournies par l'intuition et tandis que ses propriétés sont des plus faciles à concevoir et à énoncer, il est loin d'en être de même pour la notion d'ordre complexe. On peut essayer d'aborder celle-ci indirectement.

Comme généralisation de ce qui a été observé pour les variétés numériques, tout ordre simple ou complexe donne lieu à des *segments,* qui le déterminent complètement. (Dans le cas d'un ordre simple, ils sont définis par la condition de contenir, chacun, tous les éléments compris entre deux quelconques de ses propres éléments.) On peut dès lors se demander si l'on n'aurait pas quelque facilité à fonder une théorie générale de l'ordre en adoptant comme notion fondamentale celle de segment. Cette voie présenterait l'avantage, en ce qui concerne la Géométrie, de prendre son point de départ dans les données intuitives elles-mêmes.

A cet effet, il serait tout d'abord nécessaire de déterminer : 1° les conditions auxquelles doivent satisfaire des ensembles pour constituer les segments d'un dispositif ordinal; 2° les propriétés de ces segments qui caractérisent les diverses catégories à distinguer dans les dispositifs ordinaux (dispositifs à une, deux, etc. dimensions, dispositifs compacts ou disjoints, fermés ou ouverts, limités ou illimités, etc.). On signale seulement, à titre d'indication, trois propriétés qui doivent s'appliquer, semble-t-il, aux segments d'un dispositif ordinal quelconque.

Deux segments qui ont des éléments communs forment, par leur réunion, un segment. (C'est une propriété essentielle de l'idée de continuité.)

On peut toujours diviser un segment en deux autres contenant respectivement deux éléments distincts arbitrairement choisis dans le segment primitif.

Si deux segments s et s' sont contenus dans un troisième, celui-ci contient également un segment σ tel que les ensembles (s, σ) et (s', σ), formés respectivement par la réunion de σ avec s et s', constituent des segments.

IV.

L'UNITÉ DES MATHÉMATIQUES.

La Géométrie peut être établie tout entière sans mettre en jeu d'autres concepts que ceux qui ressortissent à l'*Analysis sitûs;* ceux-ci permettent en effet de définir et, par conséquent, d'étudier les catégories auxquelles appartiennent les autres concepts géométriques; on peut en effet énoncer les axiomes de la Géométrie projective et de la Géométrie métrique (considérées comme indépendantes l'une de l'autre) sous la forme suivante :

P. — *Les lignes droites sont des lignes sans point double,* *s'étendant à l'infini dans les deux sens et formant un ensemble qui jouit des propriétés suivantes :*

Une des lignes de l'ensemble est déterminée par deux quelconques de ses points ;

Toutes les lignes de l'ensemble qui s'appuient sur deux d'entre elles concourantes sont situées sur une même surface ;

Par un point extérieur à une ligne de l'ensemble on ne peut mener à cette ligne qu'une seule ligne asymptotique appartenant à l'ensemble.

M. — *Les déplacements sans déformation sont des transformations ponctuelles formant un groupe métrique archimédien et dont les lignes axiales présentent la propriété de l'unicité de l'asymptotique.* On doit entendre par *groupes métriques* les groupes semblables soit au groupe des déplacements sans déformation, soit au groupe projectif continu conservant une sphère réelle ou imaginaire à centre réel ; les groupes archimédiens sont ceux de ces groupes pour lesquels la surface invariante (transformée d'un plan ou d'une sphère réelle) est reportée à l'infini. Bien entendu, l'on doit adopter, pour les groupes métriques, une définition indépendante des concepts métriques ; mais il suffit, pour cela, d'exprimer géométriquement les propriétés caractéristiques indiquées par Sophus Lie Φ et qui, pour les groupes métriques archimédiens, se réduisent à la suivante (1) :

Pour les transformations du groupe qui laissent fixe un point quelconque de l'espace, le lieu des transformés d'un autre point quelconque est une surface fermée qui passe par le second point et entoure le premier.

Les principes de l'*Analysis sitûs* sont donc ceux de la Géométrie tout entière, et l'on voit qu'une théorie générale de l'ordre réaliserait l'unité *logique* des Mathématiques, l'Analyse numérique et la Géométrie devenant alors des applications de cette théorie.

Enfin, on constate que l'espace se voit dépouillé, au profit d'autres concepts, de toutes les qualités qui lui étaient attribuées en propre, à l'exception de celles qui appartiennent à tous les ensembles ayant la puissance du continu.

(1) G. Combebiac, *Théorie géométrique des groupes métriques* (*Enseignement mathématique*, 1905).