BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Remarques sur quelques théorèmes d'existence

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 85-108
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__85_0>

REMARQUES SUR QUELQUES THÉORÈMES D'EXISTENCE;

Par M. E. Goursat.

1. En démontrant, d'après Cauchy, l'existence d'une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad p = f(x, y, z, q),$$

se réduisant, pour $x = x_0$, à une fonction donnée $\varphi(y)$ de y, sous les conditions habituelles que je ne rappelle pas, on s'attache uniquement à prouver que l'on peut obtenir un développement en série entière qui satisfait formellement à l'équation (1), et qui est convergent tant que les modules des différences $x - x_0$, $y - y_0$ restent inférieurs à certaines limites. Il semble, d'après cela, que l'existence de la fonction intégrale n'est établie que dans un domaine de valeurs des variables complexes défini par les conditions

$$|x - x_0| \leqq r, \qquad |y - y_0| \leqq r',$$

r et r' étant deux nombres positifs. Mais il peut se faire que la fonction donnée $\varphi(y)$ soit holomorphe en dehors du cercle de rayon r' décrit du point y_0 pour centre dans le plan de la variable y. Il est bien facile, comme nous allons le voir, de compléter la démonstration de façon à montrer que l'existence de la fonction intégrale est assurée dans un domaine plus étendu que le précédent.

2. Nous présenterons d'abord quelques remarques bien simples qui nous seront utiles. Soit $F(x, y)$ une fonction analytique des deux variables complexes x et y, holomorphe lorsque les variables x et y sont assujetties respectivement à rester dans deux domaines $\mathfrak{D}_x$ et $\mathfrak{D}_y$, limités par une ou plusieurs courbes fermées, et comprenant leurs frontières; toutes les dérivées partielles de $F(x, y)$ sont alors holomorphes dans les mêmes domaines. Lorsque les deux domaines $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$ se composent de deux cercles, la formule de Taylor fournit pour $F(x, y)$ un développement en série entière valable dans tout cet ensemble.

Considérons encore le cas où un seul domaine, $\mathcal{D}_x$ par exemple, est un cercle de centre x_0 et de rayon R, tandis que le domaine $\mathcal{D}_y$ est limité par une ou plusieurs courbes fermées de forme quelconque. Si l'on donne à la variable y une valeur déterminée $\bar{y}$ dans le domaine $\mathcal{D}_y$, la fonction $F(x, \bar{y})$ de la variable x est holomorphe dans le cercle de rayon R et de centre x_0; il s'ensuit que la fonction $F(x, y)$ peut être représentée par un développement en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$:

$$(2) \quad F(x,y) = P_0(y) + P_1(y)(x - x_0) + \ldots + P_n(y)(x - x_0)^n + \ldots.$$

dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathcal{D}_y$. Le coefficient $P_n(y)$ est égal en effet au quotient

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right)_{x=x_0}$$

Le développement (2) est convergent tant que les variables x et y restent respectivement dans leurs domaines, et la formation de cette série exige seulement que l'on connaisse les expressions des dérivées successives par rapport à x de la fonction $F(x, y)$, pour $x = x_0$, lorsque y décrit le domaine $\mathcal{D}_y$.

Soient y_0 un point intérieur au domaine $\mathcal{D}_y$, et ρ un nombre positif tel que le cercle de rayon ρ et de centre y_0 soit tout entier dans $\mathcal{D}_y$. A l'intérieur de ce cercle, les fonctions $P_0(y)$, $P_1(y), \ldots, P_n(y), \ldots$ peuvent être développées en séries entières ordonnées suivant les puissances de $y - y_0$ et le développement (2) peut être remplacé par un développement en série entière ordonné suivant les puissances de $x - x_0$ et de $y - y_0$:

$$(3) \qquad F(x,y) = \sum_i \sum_k A_{ik}(x - x_0)^i (y - y_0)^k;$$

mais ce nouveau développement n'est valable que dans une partie du domaine $\mathcal{D}_y$, tandis que le précédent (2) est valable dans tout ce domaine.

Inversement, supposons que l'on ait obtenu, pour une fonction des deux variables x, y, un développement en série de la forme (2), dans lequel les coefficients $P_0(y)$, $P_1(y)$, ..., $P_n(y)$, ... sont des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathfrak{D}_y$. Supposons de plus qu'en remplaçant chacune de ces fonctions $P_n(y)$ par son développement en série entière suivant les puissances de $y - y_0$ (y_0 étant un point quelconque intérieur à $\mathfrak{D}_y$), la série entière (3) obtenue soit convergente pourvu que l'on ait

$$|x - x_0| \leqq R, \qquad |y - y_0| \leqq \rho$$

R et ρ étant deux nombres *positifs, dont le premier* R *est indépendant de* y_0. Il suit de là que la série (2) est convergente lorsque la variable x est dans le cercle de rayon R décrit du point x_0 pour centre, la variable y restant dans le domaine $\mathfrak{D}_y$, et que *la somme de cette série est une fonction holomorphe dans ce domaine.* Il en est ainsi en effet lorsque y est dans le voisinage du point y_0, et ce point y_0 est un point quelconque de y.

3. Tout ceci s'étend immédiatement aux fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables. Soit

$$u = F(x_1, x_2, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q)$$

une fonction de $p + q$ variables x_i, y_k

$$(i = 1, 2, \ldots, p; k = 1, 2, \ldots, q).$$

que nous partagerons en deux groupes jouant un rôle dissymétrique. Chacune des variables x_i décrit un cercle de centre fixe x_i^0 et de rayon r_i, tandis que chacune des variables y_k décrit un domaine $\mathfrak{D}_k$, limité par une ou plusieurs courbes de forme arbitraire; nous supposerons tous ces domaines fermés, c'est-à-dire comprenant leurs limites. Si la fonction u est holomorphe lorsque les variables x_i, y_k décrivent leurs domaines respectifs, elle peut être représentée dans tout cet ensemble de domaines par une série entière ordonnée suivant les puissances de $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$, ..., $x_p - x_p^0$,

$$(4) \qquad u = \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \ldots (x_p - x_p^0)^{\alpha_p},$$

les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ étant des fonctions holomorphes des variables y_k, quand elles restent respectivement dans les domaines $\mathfrak{D}_1$,

$\mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_q$. Ces coefficients s'expriment encore au moyen des dérivées partielles de la fonction u par rapport aux seules variables x_i, où l'on aurait remplacé après la différentiation x_i par x_i^0. La réciproque s'énonce comme plus haut et s'établit de la même façon.

Pour appliquer ces considérations au domaine réel, il suffit de supposer que les membres $x_1^0, \ldots, x_p^0$ sont tous réels, et que les différents domaines $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2, \ldots, \mathbb{D}_q$ se réduisent à des bandes rectangulaires infiniment minces comprenant un segment de l'axe réel dans le plan de la variable correspondante. Reprenons, par exemple, une fonction $z = F(x, y)$ des deux variables x, y, que nous supposons holomorphe lorsque x reste dans un cercle de rayon R et de centre a (a étant réel), et que la variable y reste dans le rectangle obtenu en faisant varier la partie réelle de y de b à c (b et c étant deux nombres réels), et la partie réelle de $\frac{y}{i}$ de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$. Admettons de plus que cette fonction prend une valeur réelle quand on donne à x une valeur réelle, comprise entre $a - \mathrm{R}$ et $a + \mathrm{R}$, et à y une valeur réelle, comprise entre b et c. Alors l'équation

$$z = F(x, y)$$

représente, par rapport à un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, une bande de surface se projetant à l'intérieur du rectangle limité par les quatre droites

$$x = a - \mathrm{R}, \qquad x = a + \mathrm{R}, \qquad y = b, \qquad y = c.$$

Pour tout point pris dans ce rectangle, z est égal à la somme d'une série convergente de la forme (2), $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ étant des fonctions continues de y entre b et c. La série de Taylor ne représenterait la surface que dans un domaine bien moins étendu, si la fonction $F(x, y)$, considérée comme fonction de y, avait des points singuliers voisins de l'axe réel dans le plan de la variable y.

Considérons par exemple la fonction $z = \mathrm{Log}(1 + x + y)$; si on la développe en série entière ordonnée suivant les puissances de x et de y, la série obtenue ne sera convergente que si l'on a

$$|x| + |y| < 1.$$

Mais on a aussi

$$\mathrm{Log}(1+x+y) = \mathrm{Log}(1+y)$$
$$+\frac{x}{1+y} - \frac{x^2}{2(1+y)^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{x^n}{(1+y)^n} \pm \ldots$$

et la nouvelle série est convergente si y est positif, et $|x|$ inférieur à l'unité.

4. Reprenons maintenant l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad p = f(x, y, z, q),$$

et supposons que l'on veuille obtenir une intégrale de cette équation se réduisant, pour $x = x_0$, à une fonction donnée $\varphi(y)$. En posant $z = \varphi(y) + u$, l'équation proposée devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left[x, y, \varphi(y) + u, \varphi'(y) + \frac{\partial u}{\partial y}\right],$$

et l'on est ramené à trouver une intégrale de la nouvelle équation, s'annulant, quel que soit y, pour $x = x_0$. Pour ne pas multiplier les notations, nous partirons de l'équation (1) en supposant que la fonction initiale $\varphi(y)$ est $\varphi(y) = 0$, et nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, q)$ des quatre variables x, y, z, q est holomorphe lorsque les modules de $x - x_0$, z, q ne dépassent pas certaines valeurs positives a, b, c, tandis que la variable y reste dans un domaine fermé $\mathcal{D}_y$, limité par une ou plusieurs courbes. Le second membre $f(x, y, z, q)$ peut alors être développé en série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, de z et de q, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathcal{D}_y$

$$f = \sum P_{\alpha\beta\gamma}(x - x_0)^\alpha z^\beta q^\gamma.$$

Imaginons de même que l'on développe l'intégrale cherchée, qui s'annule pour $x = x_0$, suivant les puissances de $x - x_0$,

$$(5) \qquad z = \varphi_1(y)(x - x_0) + \varphi_2(y)(x - x_0)^2 + \ldots + \varphi_n(y)(x - x_0)^n + \ldots.$$

En substituant cette série à la place de z dans l'équation (1), et en remplaçant de même q par

$$\varphi'_1(y)(x - x_0) + \varphi'_2(y)(x - x_0)^2 + \ldots + \varphi'_n(y)(x - x_0)^n + \ldots,$$

on obtient deux séries entières en $x - x_0$; en écrivant qu'elles sont identiques, on détermine de proche en proche les coefficients $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, au moyen des coefficients $P_{\alpha\beta\gamma}$ par les seules opérations d'addition, de multiplication, et de *différentiation*. Tous les coefficients de la série obtenue (5), qui satisfait formellement à l'équation (1), sont donc des fonctions holomorphes de y dans le domaine $\mathcal{D}_y$.

Théorème. — *Soit $\mathcal{D}'_y$ un domaine quelconque intérieur à $\mathcal{D}_y$, limité par une ou plusieurs courbes n'ayant aucun point commun avec la frontière de $\mathcal{D}_y$. A ce domaine $\mathcal{D}'_y$ on peut associer un nombre positif* R *tel que la série* (5) *soit convergente pour toute valeur de y dans $\mathcal{D}'_y$, pourvu que l'on ait $|x - x_0| \leqq R$, et représente une fonction holomorphe des deux variables x et y dans ces domaines.*

Nous rappellerons d'abord le théorème d'existence de Cauchy, sous sa forme habituelle. Soit $\varphi(x, y, z, q)$ une fonction holomorphe des variables x, y, z, q, dans le domaine défini par les inégalités

$$(6) \qquad |x - x_0| \leqq a, \qquad |y - y_0| \leqq \rho, \qquad |z| \leqq b, \qquad |q| \leqq c;$$

l'équation

$$(7) \qquad p = \varphi(x, y, z, q)$$

admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0), se réduisant à zéro pour $x = x_0$, quel que soit y.

On a une limite supérieure des modules des coefficients de la série qui représente cette intégrale en considérant l'équation auxiliaire

$$(8) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{a}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{\rho}\right)\left(1 - \frac{z}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial y}\right)},$$

où M est une limite supérieure du module de $\varphi(x, y, z, q)$ dans le domaine défini par les inégalités (6). Cette équation auxiliaire admet elle-même une intégrale s'annulant pour $x = x_0$, et cette intégrale est holomorphe dans un certain domaine

$$|x - x_0| \leqq R, \qquad |y - y_0| \leqq r,$$

R et r étant des nombres positifs qui ne dépendent que de M, a, b, c, ρ. L'intégrale de l'équation (7) est *a fortiori* holomorphe dans le même domaine.

Cela posé, soit M un nombre supérieur à $|f(x, y, z, q)|$ lorsque la variable y décrit le domaine $\mathfrak{D}_y$, tandis que les modules de $x - x_0$, z, q ne dépassent pas les limites a, b, c,

$$|x - x_0| \leqq a, \qquad |z| \leqq b, \qquad |q| \leqq c.$$

Prenons en même temps un nombre positif ρ tel que le cercle de rayon ρ décrit d'un point quelconque de $\mathfrak{D}'_y$ pour centre soit tout entier à l'intérieur de $\mathfrak{D}_y$. Les nombres a, b, c, ρ, M étant ainsi définis, soit y_0 un point quelconque de $\mathfrak{D}'_y$; d'après le théorème que nous venons de rappeler, l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point (x_0, y_0), se réduisant à zéro pour $x = x_0$. Cette intégrale est représentée par un développement en série entière

$$(9) \qquad z = \sum C_{\alpha\beta}(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$$

convergente pour

$$|x - x_0| \leqq R. \qquad |y - y_0| \leqq r.$$

Si l'on ordonne cette série suivant les puissances de $x - x_0$, la nouvelle série obtenue est forcément identique à la série (5), puisqu'elle doit aussi satisfaire formellement à l'équation (1). Le nombre R étant indépendant de y_0, il suit de là qu'inversement la série (5) est convergente pourvu que l'on ait

$$|x - x_0| \leqq R,$$

lorsque y décrit la région $\mathfrak{D}'_y$, et représente une fonction holomorphe dans ce domaine. C'est la proposition que l'on voulait établir.

5. Il n'est nullement évident qu'une fonction analytique des deux variables x, y qui, pour $x = x_0$, se réduit à la fonction $\varphi(y)$ de la seule variable y holomorphe dans un domaine $\mathfrak{D}_y$, soit aussi une fonction holomorphe par rapport aux deux variables x et y lorsque x décrit un cercle de rayon $r > 0$ et de centre x_0, et que y

décrit un domaine $\mathfrak{D}'_y$ intérieur à $\mathfrak{D}_y$, aussi petit que soit le rayon r. Par exemple, la fonction

$$z = y^2 + x \operatorname{Log} y$$

se réduit, pour $x = 0$, à une fonction holomorphe dans tout le plan, et cependant ce n'est pas une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine défini par les inégalités $|x| \leqq r$, $|y| \leqq \rho$, aussi petits que soient les nombres positifs r et ρ.

La propriété qui vient d'être démontrée a son origine dans cette circonstance que les coefficients des diverses puissances de $x - x_0$ dans le développement cherché s'obtiennent par des additions, multiplications et différentiations. On ne peut introduire ainsi de singularités n'appartenant pas aux fonctions dont on est parti. Il n'en serait plus de même si ces coefficients se déterminaient par l'intégration d'équations différentielles. Ce cas peut se présenter effectivement quant on veut déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles passant par une caractéristique donnée (1). Considérons par exemple l'équation linéaire.

$$pz + q + Yz + Y_1 x = 0,$$

Y et Y_1 étant des fonctions holomorphes de la variable y dans un domaine comprenant un segment ab de l'axe réel ($a < b$), et prenant des valeurs réelles tout le long de cet axe. La droite $x = 0$, $z = 0$ est une caractéristique; il existe donc une infinité d'intégrales réelles $z = F(x, y)$ se réduisant à zéro pour $x = 0$, mais il peut se faire qu'il n'en existe aucune qui soit holomorphe lorsque l'on a $|x| < r$, quelque petit que soit le nombre positif r, et que la variable y reste dans un domaine comprenant le segment ab de l'axe réel dans le plan de la variable y. En effet, si l'on cherche à développer une intégrale s'annulant pour $x = 0$ suivant les puissances de x,

$$z = x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots, \tag{10}$$

on a, pour déterminer le premier coefficient $\varphi_1(y)$, l'équation différentielle de Riccati

$$\varphi'_1(y) + \varphi_1^2 + Y\varphi_1 + Y_1 = 0,$$

(1) L'étude de ce cas fera l'objet d'un prochain Mémoire.

que l'on ramène à une équation différentielle linéaire

$$u'' + Yu' + Y_1 = 0,$$

en posant $\varphi_1 = \frac{u'}{u}$. Si toutes les intégrales réelles de l'équation linéaire en u ont au moins une racine entre a et b, toute intégrale réelle de l'équation en φ_1 aura au moins un pôle dans le même intervalle. Le développement (10) ne pourra donc s'appliquer à tout l'intervalle (a, b), aussi petit que soit $|x|$.

6. Nous allons vérifier le théorème général qui précède dans un cas particulier, au moyen des méthodes habituelles du calcul des limites. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(11) \qquad p = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{z}{c}\right)\left(1-\frac{q}{\rho}\right)} - M,$$

où M, a, b, c, ρ sont des nombres positifs. D'après le théorème d'existence de Cauchy, tel qu'on l'énonce habituellement, on peut affirmer que cette équation admet une intégrale $Z(x, y)$ holomorphe dans le domaine du point $x = 0$, $y = 0$, et se réduisant identiquement à zéro pour $x = 0$. Nous pouvons énoncer une proposition plus précise en observant que le domaine $\mathcal{D}_y$ est ici un cercle ayant pour centre l'origine :

A tout nombre positif $\theta < 1$ on peut associer un autre nombre positif η tel que l'intégrale $Z(x, y)$ soit sûrement holomorphe lorsque les modules des variables x et y ne dépassent pas les nombres θb et η respectivement.

Pour démontrer directement cette proposition, il suffit de compléter sur certains points la démonstration que j'ai donnée [1] antérieurement des théorèmes généraux d'existence. On peut supposer, pour simplifier un peu les calculs, $b = a$, car il suffit d'une transformation telle que $y = \frac{b}{a} y'$, y' étant la nouvelle variable, pour être ramené à ce cas. Nous pouvons aussi remplacer l'équa-

[1] *Bulletin de la Société mathématique. — Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 360 et suivantes.

tion (11) par une équation auxiliaire

$$(12)\qquad p=\frac{M}{\left(1-\dfrac{\dfrac{x}{\alpha}+y}{a}\right)\left(1-\dfrac{z}{c}\right)\left(1-\dfrac{q}{\rho}\right)}-M,$$

α étant un nombre positif inférieur à l'unité, car le second membre de la nouvelle équation est une fonction majorante pour le second membre de l'équation (11). Le développement en série entière de l'intégrale $Z(x, y)$ de l'équation (11) qui se réduit à zéro pour $x=0$ est certainement convergent dans le même domaine que le développement en série entière de l'intégrale $Z_1(x, y)$ de l'équation (12) qui est identiquement nulle pour $x=0$, et celle-ci à son tour est certainement convergente dans le même domaine que toute autre intégrale de la même équation (12) représentée par un développement en série entière dont tous les coefficients sont des nombres réels et positifs.

Cela étant, cherchons une intégrale de l'équation (12) qui soit fonction de la seule variable $X=\frac{x}{\alpha}+y$. Si l'on a

$$z=f\left(\frac{x}{\alpha}+y\right)=Z(X),$$

on en déduit

$$p=\frac{1}{\alpha}\frac{dZ}{dX},\qquad q=\frac{dZ}{dX},$$

et l'équation (12) devient

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dZ}{dX}=\frac{M}{\left(1-\dfrac{X}{a}\right)\left(1-\dfrac{Z}{c}\right)\left(1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dZ}{dX}\right)}-M,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(13)\qquad \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{M}{\rho}\right)\frac{dZ}{dX}=\frac{1}{\alpha\rho}\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\frac{M}{\left(1-\dfrac{X}{a}\right)\left(1-\dfrac{Z}{c}\right)}-M.$$

Si le nombre positif α est inférieur à $\frac{\rho}{M}$, l'équation (13) admet une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant à zéro, ainsi que sa dérivée première, pour $X=0$, et représentée par une série entière dont tous les autres coefficients sont réels et positifs. Cela suffit pour prouver que l'intégrale $Z(x, y)$ est holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = 0, y = 0$. Pour compléter la démonstration, nous allons étudier le domaine de convergence de l'intégrale de l'équation (13), que nous venons de définir, considérée comme fonction de X et de α.

Cette équation (13) peut s'écrire

$$\text{(13 } bis\text{)} \qquad \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2 - (\rho - \alpha M)\frac{dZ}{dX} + \alpha\rho\varphi(X, Z) = 0,$$

en posant pour abréger

$$\varphi(X, Z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{X}{a}\right)\left(1 - \frac{Z}{c}\right)} - M;$$

la racine de l'équation (13 *bis*) qui est nulle pour $X = Z = 0$ a pour expression

$$(14) \qquad \frac{dZ}{dX} = \frac{\rho - \alpha M}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha\rho\,\varphi(X, Z)}{(\rho - \alpha M)^2}}\right],$$

en prenant la détermination du radical qui se réduit à l'unité pour $\alpha = 0$. Soit θ' un nombre positif inférieur à l'unité; la fonction $\varphi(X, Z)$ est holomorphe lorsque l'on a

$$|X| \leqq \theta' a, \qquad |Z| \leqq \theta' c,$$

et son module reste inférieur à un nombre positif A. Prenons un nombre positif $\alpha_1 < \frac{\rho}{M}$, tel que l'on ait

$$A\left|\frac{4\alpha\rho}{(\rho - \alpha M)^2}\right| < 1,$$

lorsque $|\alpha|$ est inférieur à α_1. Le second membre de l'équation (14) considérée comme fonction des variables X, Z, α, est alors une fonction holomorphe de ces variables dans le domaine défini par les inégalités

$$|X| \leqq \theta' a, \qquad |Z| \leqq \theta' c, \qquad |\alpha| < \alpha_1,$$

et, si l'on développe ce second membre suivant les puissances de X, Z, α, tous les termes du développement contiennent α en facteur. Pour $\alpha = 0$, l'équation (14) admet l'intégrale particulière $Z = 0$; d'après un théorème général de M. Poincaré ([1]), l'intégrale de cette équation qui est nulle pour $X = 0$ est une fonction holomorphe de X dans le cercle de rayon $\theta'\theta'' a$ (θ'' étant un nombre positif inférieur à 1), pourvu que $|\alpha|$ soit inférieur à un nombre positif convenable. Mais θ' et θ'' étant deux nombres positifs quelconques inférieurs à un, le produit $\theta'\theta'' a$ est un nombre positif quelconque inférieur à a, et le résultat obtenu peut s'énoncer ainsi : a' étant un nombre positif quelconque inférieur à a, on peut prendre pour α un nombre positif assez petit pour que l'intégrale de l'équation (13) qui se réduit à zéro pour $X = 0$ soit une fonction holomorphe de X dans le cercle de rayon a' décrit de l'origine pour centre.

Si l'on développe cette intégrale suivant les puissances positives des deux variables x et y, la série obtenue sera convergente pourvu que l'on ait

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| + |y| \leqq a'.$$

Etant donné un nombre positif θ inférieur à un, prenons pour a' un nombre compris entre θa et a, et soit ε un autre nombre positif inférieur à $a' - \theta a$. La série précédente sera convergente si l'on a

$$|y| < \theta a, \qquad \left|\frac{x}{\alpha}\right| < \varepsilon;$$

il en sera donc de même *a fortiori* de la série entière qui représente l'intégrale $Z(x, y)$ de l'équation (11), qui est nulle pour $x = 0$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. — Il est à remarquer que le théorème général du n° 4 pourrait se déduire du cas particulier précédent. En effet, si le domaine $\mathfrak{D}_y$ est simplement connexe, on peut le remplacer par un cercle en effectuant sur la variable y une transformation conforme, et, au moyen de quelques transformations faciles, on peut aussi ramener l'équation (1) à la forme (11).

Lorsque le domaine $\mathfrak{D}_y$ est à connexion multiple, on démontrera

---

([1]) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, chap. II.

de la même façon que l'intégrale déterminée par les conditions initiales est holomorphe lorsque la variable y décrit un domaine *simplement connexe* $\mathfrak{D}'_y$ intérieur à $\mathfrak{D}_y$, pourvu que $|x - x_0|$ reste plus petit qu'un nombre positif convenable. Comme tout domaine intérieur à $\mathfrak{D}_y$ peut se décomposer en un nombre fini de domaines simplement connexes, on en déduit encore aisément le théorème général du n° 4.

7. La méthode précédente s'étend, sans d'autres difficultés que quelques complications d'écriture, à un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, ramené à la forme normale.

Soit

$$(15) \qquad \frac{\partial^{n_1} z_1}{\partial x_1^{n_1}} = F_1, \qquad \frac{\partial^{n_2} z_2}{\partial x_1^{n_2}} = F_2, \qquad \dots, \qquad \frac{\partial^{n_p} z_p}{\partial x_1^{n_p}} = F_p$$

un système de p équations aux dérivées partielles entre les p fonctions $z_1, z_2, \dots, z_p$, et m variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_m$; les seconds membres $F_1, F_2, \dots, F_p$ ne renferment, outre les variables et les fonctions inconnues, que les dérivées partielles de z_1 dont l'ordre ne dépasse pas n_1, les dérivées partielles de z_2 dont l'ordre ne dépasse pas n_2, etc.; enfin, les dérivées partielles $\frac{\partial^{n_i} z_i}{\partial x_1^{n_i}}$ ne figurent pas dans ces seconds membres.

D'après le théorème général de Cauchy, un système d'intégrales est complètement déterminé si l'on se donne les fonctions des $(m-1)$ variables $x_2, x_3 \dots, x_m$, auxquelles se réduisent pour $x_1 = x_1^0$ les fonctions

$$\begin{array}{llll}
z_1, & \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^{n_1-1} z_1}{\partial x_1^{n_1-1}}, \\
z_2, & \frac{\partial z_2}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^{n_2-1} z_2}{\partial x_1^{n_2-1}}, \\
\dots, & \dots, & \dots, & \dots\dots, \\
z_p, & \frac{\partial z_p}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial^{n_p-1} z_p}{\partial x_1^{n_p-1}}.
\end{array}$$

Nous supposerons, ce qu'on peut toujours faire sans diminuer la généralité, que toutes ces fonctions initiales sont nulles. Nous admettrons en outre que les fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$ défini de la manière suivante : chacune des $(m-1)$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_m$ reste comprise dans son plan dans une région de forme arbitraire, limitée par plusieurs courbes fermées, tandis que les modules de $x_1 - x_1^0$, et de toutes les autres variables qui figurent dans ces fonctions, restent inférieurs à des limites convenables. Dans ces conditions, si l'on fait décrire à chacune des variables $x_2, x_3, \ldots, x_m$ des domaines $\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \ldots, \mathfrak{D}_m$, respectivement intérieurs aux précédents, on peut leur faire correspondre un nombre positif η tel que les intégrales satisfaisant aux conditions initiales données soient holomorphes lorsque les variables $x_2, x_3, \ldots, x_m$ restent respectivement dans les domaines $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3, \ldots, \mathfrak{D}_m$, pourvu que le module de $x_1 - x_1^0$ reste inférieur à η.

Remarque. — Au lieu de supposer que chacune des variables $x_2, x_3, \ldots, x_m$ décrit dans son plan un domaine déterminé, on peut faire une hypothèse plus générale. La variable complexe x_i est en effet l'ensemble de deux variables réelles

$$x_i = x'_i + \sqrt{-1}\, x''_i;$$

si l'on regarde les $2m-2$ variables $x'_i, x''_i (i = 2, \ldots, m)$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2m-2$ dimensions, tout continuum connexe à $2m-2$ dimensions R_{2m-2}, situé dans l'espace à $2m-2$ dimensions, définit un domaine de variabilité pour le système des variables complexes $x_2, x_3, \ldots, x_m$. Tout continuum R'_{2m-2}, intérieur à R_{2m-2}, définit de même un nouveau domaine de variabilité intérieur au premier. Cela posé, on voit aisément qu'au lieu de supposer que chaque variable $x_i (i > 2)$ décrit un domaine déterminé *isolément*, on pourrait supposer le domaine de variabilité de ce système de variables défini par un certain continuum R_{2m-2}. Il suffirait alors de modifier l'énoncé en remplaçant l'ensemble des domaines $\mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_m$ par un continuum R''_{2m-2} intérieur à R_{2m-2}.

II.

8. On peut appliquer le théorème général du n° 4 aux équations différentielles ordinaires de différentes manières. On peut, par

exemple, considérer les valeurs initiales comme de nouvelles variables indépendantes, ne figurant pas explicitement dans les équations. Ainsi, soit

$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

une équation différentielle du premier ordre, et soit $Y(x, x_0, y_0)$ l'intégrale de cette équation qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$. Pour étudier cette intégrale, considérée comme fonction des trois variables indépendantes x, x_0, y_0, on peut poser dans l'équation (16) $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$, ce qui conduit à une nouvelle équation

$$(17) \qquad \frac{dy'}{dx'} = f(x_0 + x', y_0 + y'),$$

que l'on peut regarder comme une équation aux dérivées partielles définissant une fonction des trois variables x', x_0, y_0. En appliquant le théorème général à l'intégrale de l'équation (17) qui est nulle pour $x' = 0$, on obtient le résultat suivant que l'on pourrait aussi établir directement.

Supposons la fonction $f(x, y)$ holomorphe lorsque les variables x, y décrivent respectivement dans leurs plans deux domaines fermés $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$. Soient $\mathfrak{D}'_x$, $\mathfrak{D}'_y$ deux nouveaux domaines intérieurs respectivement aux précédents $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, et limités par des courbes fermées n'ayant aucun point commun avec la frontière de $\mathfrak{D}_x$ ou de $\mathfrak{D}_y$. A ces deux domaines $\mathfrak{D}'_x$, $\mathfrak{D}'_y$ on peut faire correspondre un nombre positif R, tel que l'intégrale $Y(x, x_0, y_0)$ soit holomorphe, lorsque les variables x_0, y_0 décrivent respectivement $\mathfrak{D}'_x$ et $\mathfrak{D}'_y$, pourvu que le module de $x - x_0$ soit $\leqq R$.

Cette intégrale peut être développée en une série entière ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$

$$\begin{aligned} Y(x, x_0, y_0) = {} & P_0(x_0, y_0) \\ & + P_1(x_0, y_0)(x - x_0) + \ldots + P_n(x_0, y_0)(x - x_0)^n + \ldots \end{aligned}$$

dont les coefficients P_n sont des fonctions holomorphes des variables x_0, y_0 dans les domaines $\mathfrak{D}'_x$ et $\mathfrak{D}'_y$ respectivement Quelles que soient les valeurs de ces variables, pourvu qu'elles appartiennent à ces domaines, le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à R.

On sait que cette proposition joue un rôle important dans la théorie analytique des équations différentielles.

9. Considérons encore une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \tag{18}$$

dont le second membre $f(x, y, \lambda)$ est une fonction holomorphe des trois variables x, y, λ, lorsque les variables x et y restent respectivement dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0, tandis que le paramètre λ décrit un certain domaine $\mathfrak{D}_\lambda$. On peut regarder l'équation (18) comme une équation aux dérivées partielles entre les deux variables indépendantes x et λ et la fonction y. D'après le théorème général démontré au n° **4**, *l'intégrale de cette équation qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0, est une fonction holomorphe de x et de λ, lorsque la variable λ décrit un domaine quelconque $\mathfrak{D}'_\lambda$, intérieur à $\mathfrak{D}_\lambda$, pourvu que le module $|x - x_0|$ reste inférieur à un nombre positif assez petit.*

Cette proposition [1], qui pourrait évidemment être généralisée, est utile pour établir certains théorèmes d'existence, comme nous allons le montrer par un exemple.

10. Soit

$$s = F(x, y, z, p, q, r, t) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \alpha_1 p + \beta_1 q + ar + bt + \ldots \tag{19}$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre dont le second membre est une fonction holomorphe des variables x, y, z, p, q, r, t, dans le voisinage des valeurs

$$x = y = z = p = q = r = t = 0,$$

s'annulant pour ces valeurs. Proposons-nous de déterminer une intégrale de cette équation, holomorphe dans le domaine des valeurs $x = y = 0$, et s'annulant identiquement, quand l'une des variables x ou y prend la valeur zéro. Si l'on suppose cette inté-

---

[1] On remarquera que ce théorème est très différent du théorème cité plus haut de M. Poincaré.

grale développée en série entière, tous les termes sont divisibles par xy. Pour calculer les coefficients de cette série, il suffit de pouvoir exprimer toutes les dérivées partielles de la fonction inconnue

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n}$$

au moyen des dérivées partielles prises par rapport à la variable x seule, ou à la variable y seule. Si les coefficients a et b de r et de t dans le second membre sont quelconques, ce calcul ne peut se faire par des additions et des multiplications seulement. Par exemple, pour calculer les deux dérivées du troisième ordre

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2},$$

on a à résoudre deux équations linéaires

$$\begin{aligned} -a\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2} &= F_1, \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y} - b\frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2} &= F_2, \end{aligned}$$

les seconds membres s'exprimant au moyen de x, y, z, p, q, r, t et des dérivées $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. Si l'on suppose qu'aucun des coefficients a, b n'est égal à zéro, on voit que $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y}\right)_0$ ne s'expriment pas au moyen des coefficients de F par les seules opérations d'addition et de multiplication, et l'on ne peut appliquer sans précaution les méthodes habituelles du calcul des limites.

Pour éviter cette difficulté, introduisons dans l'équation (19) un paramètre variable λ, en remplaçant les coefficients a et b de r et de t par $a\lambda$ et $b\lambda$ respectivement, et considérons l'équation auxiliaire

$$s = F(x, y, \lambda, z, p, q, r, t), \tag{20}$$

qui ne diffère de l'équation proposée (19) qu'en ce qu'on a remplacé a par $a\lambda$ et b par $b\lambda$. Si l'on regarde maintenant x, y, λ comme trois variables indépendantes, on peut se proposer de déterminer une intégrale de cette équation, holomorphe dans le voisinage des valeurs $x = y = \lambda = 0$, et s'annulant identiquement quand l'une des variables x ou y a la valeur zéro. Pour cela, on commence par former une série entière en x, y, λ

$$\sum C_{\alpha\beta\gamma}\, x^{\alpha} y^{\beta} \lambda^{\gamma}, \tag{21}$$

satisfaisant formellement à l'équation (20), et ne contenant aucun terme indépendant de x ou de y, de façon que tous les coefficients $C_{0\beta\gamma}$, $C_{\alpha 0\gamma}$ soient nuls. Pour montrer que cela est possible, imaginons cette série (21) ordonnée suivant les puissances entières de λ; elle s'écrit

$$z = z_0 + \lambda z_1 + \lambda^2 z_2 + \ldots + \lambda^n z_n + \ldots, \tag{21 bis}$$

$z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ étant des séries entières en x et y, dont tous les termes sont divisibles par xy. Si l'on substitue cette série à la place de z dans les deux membres de l'équation (20), et qu'on identifie les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres, on a pour déterminer z_0 l'équation

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\, \partial y} = F\left(x, y, z_0, \frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) - a\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2},$$

dont le second membre ne renferme aucun terme du premier degré en $\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$ ou $\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}$; on sait que cette équation admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $x = 0$, $y = 0$, s'annulant quand l'une des variables x ou y a la valeur zéro, et tous les coefficients de la série qui représentent z_0 se déduisent des coefficients de F par des additions et des multiplications seulement. D'une façon générale, en égalant les coefficients de λ^n dans les deux membres, on a pour déterminer z_n une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = \varphi\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z_n}{\partial y^2}\right),$$

ne renfermant aucun terme en $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}$. En raisonnant de proche en proche, on voit donc que *l'on peut former un développement en série entière, de la forme* (21 *bis*) *ou* (21), *satisfaisant formellement à l'équation* (20) *et dont tous les coefficients se dé-*

duisent des coefficients de la fonction $F(x, y, z, p, q, r, t)$ *par les seules opérations d'addition et de multiplication.*

Cela posé, remarquons qu'on passe de l'équation (20) à l'équation (19) en donnant au paramètre λ la valeur $\lambda = 1$. On pourra donc affirmer l'existence d'une intégrale de l'équation (19) satisfaisant aux conditions énoncées si l'on peut trouver deux nombres positifs quelconques η et η', et un nombre positif $\mu > 1$, tel que la série entière (21) soit convergente lorsque l'on a

$$|x| < \eta, \qquad |y| < \eta', \qquad |\lambda| < \mu.$$

Alors en effet la série (21), où l'on fait $\lambda = 1$, est convergente pourvu que l'on ait $|x| < \eta$, $|y| < \eta_1$, et représente dans ce domaine une fonction holomorphe des variables x et y qui satisfait à l'équation (19) et qui s'annule quand l'une des variables x et y prend la valeur zéro.

11. Pour trouver une limite du domaine de convergence de la série (21), nous pouvons maintenant nous servir de fonctions majorantes, puisque les coefficients de cette série se déduisent des coefficients de F par les seules opérations d'addition et de multiplication.

Soit $A = |a|$, $B = |b|$; nous pouvons prendre pour fonction majorante de $F(x, y, z, \lambda, p, q, r, t)$ une expression de la forme

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x+y}{\rho}\right)\left(1 - \frac{z+p+q}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{r+t}{R}\right)} - M\left(1 + \frac{r+t}{R}\right) + \lambda(Ar + Bt),$$

M, ρ, ρ_1 et R étant des nombres positifs; la fonction

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{\frac{x}{h} + \frac{y}{l}}{\rho}\right)\left(1 - \frac{z+p+q}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{r+t}{R}\right)} - M\left(1 + \frac{r+t}{R}\right) + \lambda(Ar + Bt),$$

où h et l sont deux nombres positifs inférieurs à l'unité, est *a fortiori* majorante pour F. Si donc nous cherchons un développement en série entière de la forme

$$\sum C'_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta \lambda^\gamma \tag{22}$$

dont tous les termes contiennent xy en facteur, et satisfaisant formellement à l'équation

$$(23)\quad s=\frac{M}{\left(1-\frac{\frac{x}{h}+\frac{y}{l}}{\rho}\right)\left(1-\frac{r+p+q}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{r+t}{R}\right)}-M\left(1+\frac{r+t}{R}\right)+\lambda(Ar+Bt),$$

tous les coefficients de ce nouveau développement seront des nombres réels et positifs supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la série (21)

$$|C_{\alpha\beta\gamma}|\leqq C'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Si donc la série (22) est convergente dans un certain domaine, il en est de même de la série (21).

Il existe une infinité de séries de la forme (22) satisfaisant formellement à l'équation (23), et tous les coefficients $C'_{\alpha\beta\gamma}$ se déduisent par les seules opérations d'addition et de multiplication des coefficients $C'_{0\beta\gamma}$ et $C'_{\alpha 0\gamma}$. La série (22) s'obtient précisément en supposant que l'on a

$$C'_{0\beta\gamma}=0,\qquad C'_{\alpha 0\gamma}=0,$$

quels que soient α, β, γ. Si, parmi tous les développements de cette forme qui satisfont formellement à l'équation (23), il en existe un dont tous les coefficients sont des nombres *positifs*, qui soit convergent dans un certain domaine, on pourra affirmer que la série (22), et par suite la série (21), est convergente dans le même domaine.

Cela posé, cherchons à satisfaire à l'équation (23) en prenant pour z une fonction des deux variables $u=\frac{x}{h}+\frac{y}{l}$, et λ,

$$z=\varphi\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{l},\lambda\right);$$

on aura

$$p=\frac{1}{h}\varphi'(u),\qquad q=\frac{1}{l}\varphi'(u),$$

$$r=\frac{1}{h^2}\varphi''(u),\qquad s=\frac{1}{hl}\varphi''(u),\qquad t=\frac{1}{l^2}\varphi''(u),$$

et l'équation (23) devient

$$\left[\frac{1}{hl} - \lambda\left(\frac{A}{h^2} + \frac{B}{l^2}\right)\right] \varphi''(u) \left[1 - \frac{\varphi''(u)}{R}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2}\right)\right]$$
$$= M\frac{\varphi''^2(u)}{R^2}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{l^2}\right)^2 + \Psi[u, \varphi(u), \varphi'(u)]$$

en posant

$$\Psi = \frac{M}{\left(1 - \frac{u}{\rho}\right)\left[1 - \frac{\varphi}{\rho_1} - \frac{\varphi'}{\rho_1}\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{l}\right)\right]} - M.$$

Voyons d'abord dans quel cas on peut déterminer les deux nombres positifs h et l de façon que l'on ait

$$(24) \qquad \frac{1}{hl} - \left(\frac{A}{h^2} + \frac{B}{l^2}\right) > 0,$$

ou

$$hl > Al^2 + Bh^2.$$

Il faut d'abord pour cela que le trinome

$$Al^2 - hl + Bh^2$$

ait ses racines réelles, c'est-à-dire que l'on ait

$$(25) \qquad 1 - 4AB > 0.$$

Si cette condition est satisfaite, il suffira de prendre pour h et l deux nombres positifs inférieurs à l'unité, de façon que le rapport $\frac{l}{h}$ soit compris entre les deux racines du trinome, ce qui est évidemment possible. Les nombres h et l étant choisis de cette façon, posons

$$\frac{A}{h^2} + \frac{B}{l^2} = \frac{1}{\lambda_1}\,\frac{1}{hl},$$

λ_1 étant un nombre positif supérieur à un; l'équation précédente peut encore s'écrire

$$(26) \quad \frac{1}{hl}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\varphi''(u) = \varphi''^2(u)\left\{H + K\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\right\} + \Psi[u, \varphi(u), \varphi'(u)],$$

H et K étant des nombres positifs, ou

$$(26') \qquad \varphi''(u) = hl\,\varphi''^2(u)\left\{\frac{H}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}} + K\right\} + \frac{\Psi[u, \varphi(u), \varphi'(u)]}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}}.$$

Cette équation (26') admet une intégrale s'annulant ainsi que ses dérivées du premier et du second ordre, pour $u = 0$, et, si l'on développe cette intégrale suivant les puissances de u et de λ, on obtient, en identifiant les deux membres, des coefficients tous positifs. En remplaçant dans le développement ainsi obtenu u par $\frac{x}{h} + \frac{y}{l}$, on obtient un développement en série de la forme (22), satisfaisant formellement à l'équation (23) et dont tous les coefficients sont positifs.

Il nous reste à montrer que ce développement est convergent dans un domaine défini par des inégalités telles que

$$|x| < \eta, \qquad |y| < \eta', \qquad |\lambda| < \mu,$$

η et η' étant deux nombres positifs, et μ un nombre positif *supérieur à un*. Or il suffit pour cela de prouver que l'intégrale de l'équation (26), qui est nulle ainsi que ses deux premières dérivées pour $u = 0$, est une fonction holomorphe de λ et de u, lorsque le module de λ reste inférieur à un nombre μ supérieur à un, pourvu que le module de la variable u soit plus petit qu'un nombre positif convenable.

Pour démontrer ce dernier point, nous remarquerons que l'équation (26') résolue par rapport à $\varphi''(u)$ nous donne pour $\varphi''(u)$ une expression

$$\varphi''(u) = \mathrm{T}[u, \lambda, \varphi(u), \varphi'(u)],$$

qui est holomorphe lorsque le module de λ reste inférieur à un nombre positif quelconque $\lambda_2 < \lambda_1$, pourvu que les modules de u, $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ restent eux-mêmes plus petits qu'un nombre positif assez petit. D'après le théorème du n° 9, qui s'étend évidemment à une équation du second ordre, l'intégrale de l'équation (26) satisfaisant aux conditions initiales est une fonction holomorphe de λ et de u, pourvu que l'on ait $|\lambda| < \mu < \lambda_2$, $|u| < \eta$, η étant un nombre positif, et μ un nombre positif quelconque inférieur à λ_2. Mais λ_1 étant supérieur à un, on peut prendre pour λ_2 et par suite pour μ des nombres plus grands que l'unité. La proposition est donc établie.

La condition (25) est identique à la condition obtenue par M. Riquier (*Comptes rendus*, 12 janvier 1903, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1904) par une méthode toute différente. Il est clair d'ailleurs que le procédé employé ici est susceptible de nombreuses généralisations.

Cette condition $4AB < 1$ est seulement une condition *suffisante* pour qu'on puisse affirmer l'existence d'une intégrale de l'équation (19) satisfaisant aux conditions initiales données, mais rien ne prouve qu'elle soit *nécessaire*. C'est ce qui a lieu en particulier pour les équations linéaires en r, s, t, comme je l'ai montré dans un Mémoire antérieur (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. V, p. 405-436).

12. On est conduit à la question qui fait l'objet des paragraphes précédents quand on cherche à déterminer une surface intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre passant par deux courbes données Γ, Γ', ayant un point commun O sans être tangentes en ce point. Si l'on suppose que l'on effectue d'abord une transformation ponctuelle de façon à remplacer les courbes données Γ, Γ' par les deux axes de coordonnées Ox, Oy, la question revient à déterminer une intégrale d'une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q, r, t, s) = 0, \tag{27}$$

se réduisant à zéro quand l'une des variables x ou y a la valeur zéro. Soit s_0 une racine *simple* de l'équation

$$F(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, s) = 0;$$

la racine de l'équation (27) qui tend vers s_0 lorsque x, y, z, p, q, r, t tendent respectivement vers zéro est représentée par un développement en série

$$s = s_0 + \ldots$$

dont le terme constant est s_0; il suffit de poser $z = s_0 xy + z'$ pour être ramené à une équation de la forme (19) avec les mêmes conditions initiales.

Lorsque les coefficients de l'équation sont réels, les directions caractéristiques de l'élément initial sont fournies par l'équation du second degré

$$-a\,dy^2 - dy\,dx - b\,dx^2 = 0,$$

et ces directions sont réelles pourvu que l'on ait

$$\text{(28)} \qquad I\,ab < \frac{1}{4}.$$

Cette condition est identique à la condition (25) lorsque a et b sont de même signe; si a et b sont de signes contraires, la condition (28) est vérifiée d'elle-même, tandis que la condition (25) ne l'est pas forcément.

En résumé, lorsque la condition (25) est satisfaite et les coefficients réels, les directions caractéristiques issues de l'origine sont réelles, mais la réciproque n'est pas vraie.