D. ANDRÉ

Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordres quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 159-170
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__159_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES SOMMES DES NOMBRES, PRIS DE QUATRE EN QUATRE, DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES D'ORDRE QUELCONQUE;

Par M. Désiré André.

1. En étudiant les nombres des permutations alternées [1], M. Estanave avait été conduit, vers la fin de 1902, à considérer les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons simples de m objets. Il était arrivé, relativement à ces sommes, à plusieurs congruences remarquables, qu'il avait découvertes par l'observation, démontrées en toute rigueur, et finalement énoncées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* [2]. C'est l'examen de quatre d'entre elles qui m'a amené à m'occuper des sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons simples de m objets.

Dans une lettre insérée presque entièrement au même Recueil [3], j'ai donné sur ces sommes, dans le cas des combinaisons simples, un théorème dont les congruences de M. Estanave ne sont que des corollaires immédiats. Je me propose, dans le présent travail, d'exposer les résultats que j'ai obtenus en étudiant ces mêmes sommes, non plus dans le cas des combinaisons simples, mais dans le cas des combinaisons régulières d'ordre quelconque. Le plus

---

(1) J'ai fait connaître la notion et les propriétés des permutations alternées dans une Note et un Mémoire : *Développements de* sécx *et de* tang$x$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, 1879, p. 965-967); *Sur les permutations alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VII, 1881, p. 167-184).

(2) Questions 212 et 213, t. X, 1903, p. 34.

(3) T. X, 1903, p. 189-192.

important de ces résultats est un théorème très vaste, dont celui que j'ai donné pour les combinaisons simples n'est que le premier cas particulier.

2. J'ai appelé, il y a longtemps ([1]), *combinaisons régulières d'ordre a* de m objets distincts pris n à n, celles des combinaisons de ces m objets, n à n, où chaque objet peut être répété jusqu'à a fois, mais non pas davantage. Les combinaisons simples sont évidemment les combinaisons régulières d'ordre 1 ; les combinaisons complètes, celles d'ordre n. J'ai désigné par $(m, n)_a$ le nombre des combinaisons régulières, d'ordre a, de m objets distincts pris à n, en convenant de regarder $(m, 0)_a$ comme égal à l'unité.

Ces nombres $(m, n)_a$ peuvent être disposés en un triangle où les lignes correspondent aux valeurs 1, 2, 3, ... de m ; et les colonnes, aux valeurs 0, 1, 2, ... de n. Chaque élément de ce triangle est égal à celui qui est juste au-dessus, plus les a éléments placés à la gauche de celui-ci. A chaque valeur de a correspond un triangle ; dans le cas où a est égal à 1, ce triangle n'est autre chose que celui de Pascal ; aussi ai-je proposé ([2]) d'appeler tous ces triangles *les triangles de Pascal des différents ordres*.

Considérons le triangle d'ordre a, et, dans ce triangle, la ligne de rang m. Elle nous présente $ma + 1$ termes, qui sont les nombres

$$(m, 0)_a, \quad (m, 1)_a, \quad (m, 2)_a, \quad \ldots, \quad (m, ma)_a.$$

Si nous additionnons ces termes de quatre en quatre de toutes les manières possibles, nous obtenons quatre sommes que nous représentons par les symboles

$$S_m^0, \quad S_m^1, \quad S_m^2, \quad S_m^3,$$

l'indice supérieur n'étant que la valeur de n dans le terme par lequel on commence l'addition.

Dans le triangle d'ordre a, chaque ligne donne ainsi quatre

([1]) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. V, 1876, p. 155-198).

([2]) *Liste et résumé de mes principaux travaux mathématiques*, p. 17 (1 vol. in-8° raisin, Paris, Gauthier-Villars, 1904).

sommes. Placées les unes sous les autres, ces sommes forment le rectangle

$$\begin{array}{cccc} S_1^0, & S_1^1, & S_1^2, & S_1^3, \\ S_2^0, & S_2^1, & S_2^2, & S_2^3, \\ S_3^0, & S_3^1, & S_3^2, & S_3^3, \\ S_4^0, & S_4^1, & S_4^2, & S_4^3, \\ S_5^0, & S_5^1, & S_5^2, & S_5^3, \\ .., & .., & .., & .., \end{array}$$

dont les quatre colonnes s'étendent indéfiniment vers le bas. C'est ce rectangle que nous allons étudier, d'abord dans ses éléments, ensuite dans ses lignes, et enfin dans ses colonnes.

3. Comme je l'ai démontré par des raisonnements combinatoires très simples ([1]), les nombres des combinaisons régulières d'ordre a de m objets, c'est-à-dire les éléments constituant la $m^{\text{ième}}$ ligne de notre triangle, ne sont autres choses que les coefficients des puissances successives de x dans le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynome

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^a.$$

Si donc je désigne ce polynome par $\varphi(x)$, ce sont les coefficients du développement de $\varphi^m(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, et les sommes

$$S_m^0, \quad S_m^1, \quad S_m^2, \quad S_m^3$$

sont les résultats qu'on obtient en additionnant de quatre en quatre les coefficients de ce même développement.

Or, si nous appelons r l'une quelconque des racines quatrièmes de l'unité, nous avons, comme on le voit sans peine, les quatre égalités suivantes

$$4S_m^0 = \sum r^4 \varphi^m(r), \qquad 4S_m^2 = \sum r^2 \varphi^m(r),$$

$$4S_m^1 = \sum r^3 \varphi^m(r), \qquad 4S_m^3 = \sum r \ \varphi^m(r),$$

([1]) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications*, déjà cité, p. 189.

chaque $\sum$ s'étendant aux quatre racines quatrièmes de l'unité.

Il est, d'ailleurs, évident que les seconds membres de toutes ces égalités sont des fonctions symétriques de ces quatre racines et, par conséquent, que l'on doit pouvoir facilement en calculer, sous forme explicite, les valeurs respectives.

4. Représentons par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Les quatre racines quatrièmes de l'unité seront

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i.$$

La première opération à effectuer sera donc de calculer les valeurs des expressions

$$\varphi(+1), \quad \varphi(-1), \quad \varphi(+i), \quad \varphi(-i),$$

valeurs qui dépendent de la forme du nombre a. Cette forme est forcément l'une des suivantes

$$4\alpha+1, \quad 4\alpha+2, \quad 4\alpha+3, \quad 4\alpha+4,$$

la lettre α désignant un entier quelconque, égal ou supérieur à zéro.

Lorsque a est de la forme $4\alpha+1$, les valeurs considérées sont respectivement

$$a+1, \quad 0, \quad 1+i, \quad 1-i.$$

Lorsque a est de la forme $4\alpha+2$, elles sont

$$a+1, \quad +1, \quad +i, \quad -i.$$

Lorsque a est de la forme $4\alpha+3$, elles sont

$$a+1, \quad 0, \quad 0, \quad 0.$$

Enfin, lorsque a est de la forme $4\alpha+4$, elles sont

$$a+1, \quad +1, \quad +1, \quad +1.$$

5. Nous appuyant : sur les résultats que nous venons d'obtenir, sur les formules qui nous donnent

$$4S_m^0, \quad 4S_m^1, \quad 4S_m^2, \quad 4S_m^3$$

en fonction des racines quatrièmes de l'unité, et sur les quatre identités suivantes

$$(1+i)^m + (1-i)^m = 2(\sqrt{2})^m \cos m\frac{\pi}{4},$$

$$-i(1+i)^m + i(1-i)^m = 2(\sqrt{2})^m \sin m\frac{\pi}{4},$$

$$(\quad + i)^m + (\quad - i)^m = 2\cos m\frac{\pi}{4},$$

$$-i(\quad + i)^m + i(\quad - i)^m = 2\sin m\frac{\pi}{4},$$

nous obtenons facilement, pour toutes les formes du nombre a, les valeurs de

$$4\,S_m^0,\quad 4\,S_m^1,\quad 4\,S_m^2,\quad 4\,S_m^3.$$

Si a est de la forme $4\alpha + 1$,

$$4\,S_m^0 = (a+1)^m + 2(\sqrt{2})^m \cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4\,S_m^1 = (a+1)^m + 2(\sqrt{2})^m \sin m\frac{\pi}{4},$$

$$4\,S_m^2 = (a+1)^m - 2(\sqrt{2})^m \cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4\,S_m^3 = (a+1)^m - 2(\sqrt{2})^m \sin m\frac{\pi}{4}.$$

Si a est de la forme $4\alpha + 2$,

$$4\,S_m^0 = (a+1)^m + 1 + 2\cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4\,S_m^1 = (a+1)^m - 1 + 2\sin m\frac{\pi}{4},$$

$$4\,S_m^2 = (a+1)^m + 1 - 2\cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4\,S_m^3 = (a+1)^m - 1 - 2\sin m\frac{\pi}{4}.$$

Si a est de la forme $4\alpha + 3$,

$$4\,S_m^0 = 4\,S_m^1 = 4\,S_m^2 = 4\,S_m^3 = (a+1)^m.$$

Si a enfin est de la forme $4\alpha + 4$,

$$4\,S_m^0 = (a+1)^m + 3,$$
$$4\,S_m^1 = 4\,S_m^2 = 4\,S_m^3 = (a+1)^m - 1.$$

6. Afin de permettre quelques vérifications numériques de ces formules, et de donner une idée des rectangles que nous étudions, je vais transcrire ici les commencements des rectangles d'ordres 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire des rectangles les plus simples parmi ceux dont les ordres sont respectivement compris dans les formes $4\alpha+1$, $4\alpha+2$, $4\alpha+3$, $4\alpha+4$ du nombre a.

Voici le commencement du rectangle d'ordre 1 :

1	1	0	0
1	2	1	0
1	3	3	1
2	4	6	4
6	6	10	10
16	12	16	20
36	28	28	36
72	64	56	64
//	//	//	//

Voici celui du rectangle d'ordre 2 :

1	1	1	0
2	2	3	2
7	6	7	7
21	20	20	20
61	61	61	60
182	182	183	182
547	546	547	547
1641	1640	1640	1640
//	//	//	//

Voici celui du rectangle d'ordre 3 :

1	1	1	1
4	4	4	4
16	16	16	16
64	64	64	64
256	256	256	256
//	//	//	//

Voici enfin celui du rectangle d'ordre 4 :

2	1	1	1
7	6	6	6
32	31	31	31
157	156	156	156
782	781	781	781
″	″	″	″

7. Si nous examinons attentivement, soit sur nos formules, soit sur nos rectangles numériques, les quatre valeurs de

$$S_m^0,\quad S_m^1,\quad S_m^2,\quad S_m^3,$$

c'est-à-dire les quatre nombres formant la $m^{\text{ième}}$ ligne de notre rectangle, nous constatons les résultats suivants :

Lorsque a est de la forme $4\alpha+1$, *ces quatre valeurs sont égales deux à deux si m est impair; au contraire, si m est pair, il y en a deux d'égales et deux d'inégales;*

Lorsque a est de la forme $4\alpha+2$, *trois des quatre sommes sont toujours égales entre elles, la quatrième étant égale à leur valeur commune, plus* 1 *si m est pair, moins* 1 *si m est impair;*

Lorsque a est de la forme $4\alpha+3$, *les quatre valeurs* S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3 *sont, quel que soit m, toujours égales entre elles;*

Enfin, lorsque a est de la forme $4\alpha+4$, *les trois dernières sommes sont toujours égales entre elles, la première étant toujours égale à leur valeur commune augmentée de l'unité.*

Le plus remarquable de ces résultats nous paraît être celui qui se présente lorsque a est de la forme $4\alpha+3$, puisque, dans ce cas, nos quatre sommes sont égales. Ce résultat se rapproche beaucoup d'un théorème que nous avons publié autrefois ([1]) en l'énonçant ainsi :

Les termes, pris de $a+1$ *en* $a+1$ *dans la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre* a, *ont une somme cons-*

([1]) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications,* déjà cité, p. 167.

tante, quel que soit celui des $a+1$ premiers termes par lequel on commence.

Quoi qu'il en soit, tous les résultats qui précèdent se démontrent en toute rigueur à l'aide de nos formules (5). Mais il est à remarquer que plusieurs d'entre eux n'appartiennent point exclusivement à nos développements; ils se retrouvent pour les sommes des termes, pris de quatre en quatre, dans toutes les suites de nombres où les termes équidistants des extrêmes sont constamment égaux entre eux.

Comme on peut le voir, en effet, d'une manière très simple, si l'on appelle t le nombre des termes d'une quelconque de ces suites :

Lorsque t est impair, deux des quatre sommes sont toujours égales entre elles, les deux autres étant, en général, différentes;

Lorsque t est pair, les quatre sommes sont égales deux à deux.

8. Partant des expressions trouvées précédemment (5), dans le rectangle d'ordre a, pour les quatre sommes

$$4\,S_m^0,\quad 4\,S_m^1,\quad 4\,S_m^2,\quad 4\,S_m^3,$$

nous en déduisons sans peine les expressions de

$$4\,S_{m+4}^0,\quad 4\,S_{m+4}^1,\quad 4\,S_{m+4}^2,\quad 4\,S_{m+4}^3.$$

Comparant ces nouvelles expressions chacune à chacune avec les précédentes, nous arrivons aux résultats suivants :

Lorsque a est de la forme $4\alpha+1$,

$$4(S_{m+4}^j + 4\,S_m^j) = (a+1)^m[(a+1)^4+4],$$

quelle que soit la valeur de m, et quel que soit aussi celui des nombres 0, 1, 2, 3 *que représente l'indice supérieur j*;

Lorsque a est de l'une quelconque des trois formes $4\alpha+2$, $4\alpha+3$, $4\alpha+4$,

$$4(S_{m+4}^j - S_m^j) = (a+1)^m[(a+1)^4-1],$$

égalité qui subsiste, comme la précédente, pour toutes les valeurs possibles des indices m et j.

Ces deux égalités établissent, on le voit, des relations simples entre les nombres figurant dans les lignes, prises de quatre en quatre, de notre rectangle d'ordre a. Nous allons les étudier l'une après l'autre en commençant par la plus simple, c'est-à-dire par la seconde.

9. Considérons la relation générale

$$4(S^j_{m+4} - S^j_m) = (a+1)^m[(a+1)^4 - 1],$$

où a est de l'une des trois formes $4\alpha + 2$, $4\alpha + 3$, $4\alpha + 4$.

D'abord, quel que soit m, son second membre est divisible par 5. Il en est évidemment ainsi, en effet, lorsque $a + 1$ est divisible par 5; et, lorsqu'il ne l'est pas, comme il est alors premier avec 5, le crochet est divisible par 5, d'après le théorème de Fermat.

Supposons a de la forme $4\alpha + 2$ ou $4\alpha + 4$. Dans chacun de ces cas, $a + 1$ est impair; le crochet qui figure au second membre est le produit des trois facteurs pairs

$$(a+1)^2 + 1, \quad a + 2, \quad a;$$

donc ce second membre, quel que soit m, est divisible par 8.

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, le binome $a + 1$ peut s'écrire $4\alpha + 4$ ou $4(\alpha + 1)$, et il y a deux cas à distinguer suivant que $\alpha + 1$ est pair ou impair. Si $\alpha + 1$ est pair, $(a + 1)^m$ est, pour toute valeur de m, divisible par 8; si $\alpha + 1$ est impair, $(a + 1)^m$ n'est divisible par 8 que quand m dépasse l'unité.

Il suit de tout cela que, dans les divers cas considérés, le premier membre de notre seconde relation est toujours divisible par 40; et, par conséquent, que la différence

$$S^j_{m+4} - S^j_m$$

est toujours, dans ces mêmes cas, divisible par 10.

10. Revenons à notre première égalité

$$4(S^j_{m+4} + 4S^j_m) = (a+1)^m[(a+1)^4 + 4].$$

Elle suppose, nous l'avons vu, que a est de la forme $4\alpha + 1$, et, par conséquent, que $a + 1$ est toujours pair.

Il s'ensuit immédiatement que son second membre est toujours, quel que soit m, divisible par 8. En effet, le premier facteur $(a+1)^m$ est toujours divisible par 2, et le second, qui n'est autre que le crochet, est toujours divisible par 4.

Ce même second membre est toujours aussi divisible par 5. Il l'est, en effet, évidemment, si $a+1$ est un multiple de 5; et, quand $a+1$ n'est pas un multiple de 5, le crochet en est un, car il peut s'écrire

$$(a+1)^4 - 1 + 5,$$

et, dans ce trinome, l'ensemble des deux premiers termes est divisible par 5, d'après le théorème de Fermat.

Ainsi, quel que soit m, le second membre de notre égalité est divisible par 40; et par conséquent l'expression

$$S^j_{m+4} + 4\,S^j_m$$

est toujours un multiple de 10.

On en conclut immédiatement, quel que soit m, que S^j_{m+4} est toujours pair; ou bien, ce qui revient au même, que S^j_m est pair pour toutes les valeurs de m supérieures à 4. Mais, comme on peut le voir par le calcul, sur les expressions (5) de S^0_m, S^1_m, S^2_m, S^3_m qui correspondent à la forme $4a+1$ de a, il se trouve que S^j_4 est toujours pair. Nous pouvons donc dire que S^j_m est pair pour toutes les valeurs de m supérieures à 3.

Cela posé, remarquons que notre égalité

$$S^j_{m+4} + 4\,S^j_m = \text{mult. de } 10$$

peut s'écrire

$$S^j_{m+4} - S^j_m = \text{mult. de } 10 - 5\,S^j_m.$$

Pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, la somme S^j_m est paire. Donc le nouveau second membre est divisible par 10. Donc, pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, la différence

$$S^j_{m+4} - S^j_m$$

est un multiple de 10.

11. Conservant toujours aux lettres a, m, j les significations que nous leur avons respectivement attribuées, nous pouvons résumer, de la manière suivante, tous les résultats que nous venons d'obtenir :

1° *Si a est de l'une des formes* $4\alpha+2$ *ou* $4\alpha+4$, *la différence*

$$S^j_{m+4}-S^j_m$$

est un multiple de 10, *pour toutes les valeurs de* m;

2° *Si a est de la forme* $4\alpha+3$ *et que* $\alpha+1$ *soit pair, la même différence est un multiple de* 10, *pour toutes les valeurs de* m;

3° *Si a est encore de la forme* $4\alpha+3$, *mais que* $\alpha+1$ *soit impair, cette même différence est un multiple de* 10, *pour toutes les valeurs de m supérieures à l'unité;*

4° *Enfin, si a est de la forme* $4\alpha+1$, *cette même différence est un multiple de* 10, *pour toutes les valeurs de m supérieures à* 3.

Négligeant les valeurs 1, 2, 3 du nombre m, nous pouvons donc énoncer ce théorème unique :

Théorème. — *Pour toutes les valeurs de m supérieures à* 3, *et quel que soit l'ordre a, la somme* S^j_{m+4} *est congrue à la somme* S^j_m, *selon le module* 10.

Comme ce module 10 est précisément la base de notre numération, ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Les valeurs numériques de S^j_{m+4} *et de* S^j_m *finissent toujours par le même chiffre.*

Et c'est ce qui explique que les congruences particulières de M. Estanave aient été découvertes par la simple observation.

12. Le théorème que nous venons d'énoncer est tout à fait général : il ne dépend ni de a, ni de j, et il suppose simplement que m soit supérieur à 3. Il comprend celui que nous avions donné autrefois pour les combinaisons simples. Il établit, pour les lignes de notre rectangle, prises de quatre en quatre, une sorte de périodicité, analogue à celle que nous présentent les suites illimitées de nombres entiers, soit en progression arithmétique, soit en progression géométrique.

Ce théorème général, d'ailleurs, pourrait lui-même être généralisé. Au lieu de considérer les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque, on pourrait considérer les sommes de ces mêmes nombres, pris de p en p. Au lieu de prendre, dans le rectangle formé de ces sommes, les lignes de quatre en quatre, on les pourrait prendre de q en q, sans supposer que q fût égal à p. En opérant alors comme nous venons de le faire, et par des moyens pour ainsi dire identiques, on obtiendrait des résultats analogues à ceux qui précèdent; on arriverait à des congruences nouvelles : par exemple, si p était égal à 3, et q à 6, à des congruences de module 7. Seulement, ces congruences nouvelles, qu'on trouverait par le calcul, n'auraient pas, en général, pour module la base 10 de notre numération. L'observation, non aidée du calcul, serait impuissante à les déceler.