BULLETIN DE LA S. M. F.

S. BERNSTEIN

Sur l'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 33-36

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__33_1>

SUR L'INTERPOLATION;

Par M. S. Bernstein.

M. Borel a soulevé récemment au Congrès de Heidelberg la question de la convergence des séries de polynomes qu'on obtient par l'interpolation. Cette question a déjà été traitée d'une façon détaillée par M. Runge (¹). Le résultat de cette étude peut se résumer ainsi : les polynomes approchés d'une fonction continue donnés par la formule de Newton ne convergent, en général, vers aucune limite. Cette étude met une fois de plus en évidence le fait qu'en général la possibilité du développement d'une fonction en une série de polynomes sur un segment dépend essentiellement de la régularité de la fonction (supposée analytique) dans une région déterminée entourant ce segment.

Le praticien (qui ne trouverait pas le calcul de la formule de Newton trop embarrassant) pourrait évidemment objecter que l'expérience immédiate ne lui défend pas d'identifier sa fonction à

(¹) *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1901.

un polynome et de lui attribuer ainsi toute la régularité désirable dans le domaine complexe.

Mais justement à la circonstance théorique signalée plus haut correspond ce fait pratiquement important qu'une *variation inappréciable des données expérimentales conduit à une variation considérable des valeurs des polynomes approchés en certains points intermédiaires*. En réalité, les praticiens préfèrent se servir comme courbes représentatives approchées de leur fonction des lignes polygonales qui passent par des points déterminés expérimentalement. Il est clair que ce dernier mode d'interpolation permet de représenter la fonction avec toute la précision que comportent les mesures directes. Il m'a paru intéressant de ramener le calcul de ces lignes brisées à un algorithme analytique. La chose est aisée; nous verrons qu'il suffit d'introduire la fonction $|x|$ qui signifie comme toujours *valeur absolue de x*.

Soit $y = F(x)$ une fonction uniforme et continue lorsque x varie de 0 à 1. Considérons la ligne brisée ayant pour sommets les points

$$P_0[0, F(0)]; \quad P_1\left[\frac{1}{n}, F\left(\frac{1}{n}\right)\right]; \quad P_2\left[\frac{2}{n}, F\left(\frac{2}{n}\right)\right]; \quad \ldots; \quad P_n[1, F(1)].$$

Si l'équation de cette ligne brisée est

$$y_n = F_n(x),$$

il est évident que la série

$$y = y_{\alpha_1} + (y_{\alpha_2} - y_{\alpha_1}) + \ldots + (y_{\alpha_k} - y_{\alpha_{k-1}}) + \ldots$$

converge uniformément sur le segment 01, pourvu que α_k croisse indéfiniment avec k. Cherchons donc l'expression de $F_n(x)$. Il est clair que

$$F_n(x) = A_0|x| + A_1\left|x - \frac{1}{n}\right| + \ldots + A_n|x - 1|, \tag{1}$$

avec

$$A_x = \frac{n}{2}\left\{F\left(\frac{x+1}{n}\right) + F\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2F\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2}\left\{F(1) + nF\left(\frac{1}{n}\right) - (n-1)F(0)\right\}, \\ A_n &= \frac{1}{2}\left\{F(0) + nF\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)F(1)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la propriété de la fonction $|x|$ que ses différences secondes sont nulles partout sauf pour $x = 0$. On voit que l'usage et la démonstration de ces formules n'exigent que des connaissances tout à fait élémentaires. Si l'on veut sortir du domaine des mathématiques élémentaires il est aisé de rattacher nos formules au calcul intégral. Supposons que $F(x)$ admette des dérivées des deux premiers ordres. On a évidemment pour $n = \infty$

$$A_x = \frac{1}{2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}, \tag{2 bis}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) + F'(0) \}, \\ A_n &= \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) - F'(1) \}. \end{aligned} \right. \tag{3 bis}$$

De sorte que

$$\left\{ \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 F''(z) \, |x - z| \, dz + \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) + F'(0) \} \, |x| \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) - F'(1) \} \, |1 - x| \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 F''(z) \, |x - z| \, dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ F(1) + F(0) - F'(1) \} + \frac{x}{2} \{ F'(0) + F'(1) \}. \end{aligned} \right. \tag{1 bis}$$

L'égalité (1 *bis*) est facile à vérifier directement. L'interpolation des fonctions continues de plusieurs variables se fait d'une façon toute semblable en introduisant à la place de la fonction élémentaire $|x|$ les fonctions $|x, y|$ ou $|x, y, z|$ etc. Le calcul des coefficients ainsi que les diverses opérations ne présentent pas de difficulté. Les lignes au moyen desquelles nous avons cherché à approcher notre fonction continue admettent des tangentes discontinues; c'étaient celles qui se présentent géométriquement le plus naturellement. Mais, si l'on voulait interpoler au moyen de fonctions discontinues, on obtiendrait des formules encore plus simples.

Supposons, en effet, qu'on nous donne les valeurs $F(0)$, $F\left(\frac{1}{n}\right)$, ..., $F(1)$ et construisons la fonction discontinue $F_n(x)$ qui de o à $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n}\text{ exclu}\right)$ égale $F(o)$, de $\frac{1}{n}$ à $\frac{2}{n}$ $\left(\frac{2}{n}\text{ exclu}\right)$ égale $F\left(\frac{1}{n}\right)$ et ainsi de suite, enfin $F_n(1)=F(1)$. Si nous introduisons la fonction $\lambda(x)$ telle que $\lambda(x)=o$ pour $-\infty<x<o$ et $\lambda(x)=1$ pour $o\leqq x<\infty$, on a évidemment :

$$F_n(x)=A_0 h(x)+A_1\lambda\left(x-\frac{1}{n}\right)+\ldots+A_n\lambda(x-1),$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= F(o), \\ A_1 &= F\left(\frac{1}{n}\right)-F(o), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n &= F(1)-F\left(\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Tous les calculs, avec ces séries, se font avec le plus haut degré de simplicité. La généralisation pour le cas de plusieurs variables est immédiate. Il est aisé encore de reconnaître que ce procédé d'interpolation se rattache à la formule

$$F(x)=\int_0^1 F'(z)\lambda(x-z)\,dz+F(o).$$