BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur l'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, par des polyèdres de genre un

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 284-296

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__284_1>

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET A L'ESPACE, PAR DES POLYÈDRES DE GENRE *un*;

Par M. G. Fontené.

L'extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace peut être tentée avec des polygones gauches ou avec des polyèdres. M. Darboux a donné pour le premier point de vue le théorème des routes de lumière; je donne ici pour le second point de vue une prévision générale, dont je démontre l'exactitude dans un cas particulier, suffisant pour inspirer confiance.

Je tiens à dire que la première idée de l'emploi de polyèdres de genre *un* pour l'objet indiqué ici s'est présentée au cours d'une conversation avec M. R. Bricard.

I.

Ce premier paragraphe est, à peu de chose près, la reproduction d'une Note qui a paru dans les *Nouvelles Annales* en 1904.

1. Appelons polyèdre *homogène* un polyèdre dont toutes les

faces ont le même nombre x de côtés, dont tous les angles solides ont le même nombre y d'arêtes. Un polyèdre homogène *de genre un* donne lieu aux trois relations

$$F + S = A,$$
$$Fx = Sy = 2A,$$

homogènes par rapport à F, S, A. L'élimination de ces trois quantités donne

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1 \qquad \text{ou} \qquad (x-2)(y-2) = 4.$$

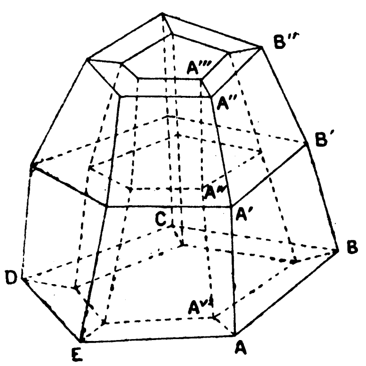
On peut donc avoir

$$\begin{array}{llll} x = 4, & y = 4 & \text{avec} & F = S, \\ x = 3, & y = 6 & \text{avec} & F = 2S, \\ y = 3, & x = 6 & \text{avec} & S = 2F, \end{array}$$

c'est-à-dire trois classes de polyèdres, que l'on peut appeler respectivement *tétragonaux*, *trigonaux*, *hexagonaux*.

Parmi les polyèdres tétragonaux sont des polyèdres à un trou ou polyèdres *toriques* (*fig.* 1), dont les faces sont des quadrilatères

Fig. 1.



assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet. Si p est le nombre des sommets sur un contour tel que ABCD... et si q se rapporte au contour A A' A'' A'''..., le nombre des sommets ou des faces est

pq, $p \gtreqless 3$, $q \gtreqless 3$. [M. Bricard a envisagé (*Nouvelles Annales*, 1904) un polyèdre tétragonal à 8 sommets.]

Möbius, qui paraît s'être occupé le premier de polyèdres de genre *un*, a indiqué une construction du polyèdre trigonal à 7 sommets ([1]). M. Bricard en a indiqué une autre, qui a été étendue par M. Deltour (*Nouvelles Annales*, 1904) au cas de S quelconque.

2. De combien de paramètres dépendent les polyèdres considérés ? Les sommets donneraient lieu à 3 S paramètres, si les faces étaient nécessairement des triangles ; mais il faut défalquer $x - 3$ paramètres pour chaque face lorsque les faces ont x côtés ; le nombre des paramètres restant est

$$3S - F(x-3),$$

ou

$$3(F + S) - 2A,$$

ou

$$F + S.$$

Si donc le polyèdre doit être *circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre,* ce qui forme F + S conditions, il est déterminé, au moins en apparence. Il y a lieu de se demander si la recherche d'un tel polyèdre n'est pas un problème généralement impossible, qui ne devient possible qu'en devenant indéterminé.

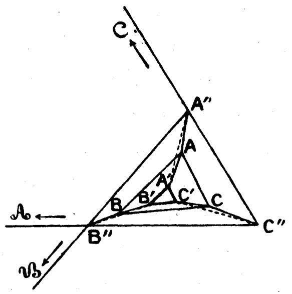
Les choses pourront d'ailleurs se passer un peu différemment, et l'on en aura un exemple dans le cas traité plus loin. Les $F(x-3)$ conditions indiquées ci-dessus peuvent n'être pas distinctes ; si k d'entre elles sont les conséquences des autres, le polyèdre dépend de paramètres en nombre $F + S + k$; quand on l'astreint à être circonscrit à une quadrique et inscrit à une autre, il paraît dépendre encore de k paramètres. Il est possible que les deux quadriques doivent satisfaire à une condition invariante, et que le polyèdre dépende alors de $k + 1$ paramètres.

([1]) *Voir* l'Ouvrage de M. MAX BRÜCKNER (*Vielecke und Vielflache*, Leipzig, 1900, p. 221).

II.

3. Considérons le polyèdre tétragonal torique qui correspond aux valeurs $p = 3$, $q = 3$ (*fig.* 2).

Fig. 2.



Il a 9 faces quadrangulaires

$B'C'C''B''$,	$C'A'A''C''$,	$A'B'B''A''$,	ou	a, b, c,
$B''C''CB$,	$C''A''AC$,	$A''B''BA$,	ou	a', b', c',
$BCC'B'$,	$CAA'C'$,	$ABB'A'$,	ou	a'', b'', c'',

assemblées 4 par 4 autour de 9 sommets

$$\begin{array}{ccc} A, & B, & C, \\ A', & B', & C', \\ A'', & B'', & C''; \end{array}$$

à chaque face correspond un sommet.

Nous appellerons D le point commun aux trois plans a, b, c, ou encore le point de concours des trois droites $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, et l'on aura de même les points D' et D''; les plans ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ seront désignés par d, d', d''.

L'arête (a', a'') ou BC correspond à l'arête $A'A''$, etc. Nous appellerons $\mathcal{A}$ le point commun aux trois plans a, a', a'', ou encore le point de concours des trois droites BC, $B'C'$, $B''C''$, et l'on aura de même $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$; les trois points $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont sur une même droite, intersection des plans d, d', d'', ou ABC,... On peut de même désigner par α le plan $AA'A''$, etc.; les trois plans α, β, γ passent par la droite $DD'D''$.

Le polyèdre en question semble dépendre de paramètres en nombre $3 \times 9 - 9$, ou 18, chaque face quadrangulaire donnant lieu à une condition; il dépend en réalité de 19 paramètres, l'une des 9 conditions étant une conséquence des 8 autres. En effet, si l'on se donne une droite, 3 points $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sur cette droite, 3 plans d, d', d'' passant par cette droite, et si l'on trace dans le plan d un triangle ABC dont les côtés passent respectivement en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, etc., on a les 9 sommets d'un polyèdre de l'espèce indiquée; or la figure ainsi construite dépend de 19 paramètres.

Je montrerai que la quadrique S inscrite à ce polyèdre et la quadrique S′ qui lui est circonscrite sont liées par une relation invariante. Dès lors, si l'on se donne deux quadriques, la recherche d'un polyèdre de l'espèce indiquée, circonscrit à l'une et inscrit à l'autre, est un problème indéterminé en apparence, impossible en réalité si les quadriques sont quelconques, et qui ne devient possible qu'en devenant doublement indéterminé.

4. Pour ne pas interrompre dans la suite le développement du calcul, je dirai immédiatement ceci :

La quadrique inscrite S se présentera par son équation tangentielle, et la quadrique circonscrite S′ par son équation ponctuelle :

$$(\Sigma) \qquad au^2 + \ldots + 2fvw + \ldots + 2lur + \ldots = 0,$$

$$(S') \qquad a'x^2 + \ldots + 2f'yz + \ldots + 2l'xt + \ldots = 0.$$

Soit pour un instant

$$(S) \qquad \bar{a}x^2 + \ldots + 2\bar{f}yz + \ldots + 2\bar{l}xt + \ldots = 0$$

l'équation ponctuelle de S; l'équation en λ pour la combinaison

$$\lambda S + S' = 0$$

est

$$\Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta' = 0;$$

Δ se rapporte à $\bar{a}$, $\bar{b}$, ..., et l'on a avec les notations habituelles

$$\Theta = a'\bar{A} + \ldots + 2f'\bar{F} + \ldots + 2l'\bar{L} + \ldots,$$

$$\Phi = (\bar{b}\bar{c} - \bar{f}^2)(a'd' - l'^2) + \ldots$$

sans qu'il soit utile pour le moment d'écrire tous les termes de Φ.

Pour introduire les coefficients de l'équation (Σ), rappelons que $\overline{a}, \overline{b}, \ldots$ sont les premiers mineurs A, B, ... du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & d \end{vmatrix},$$

mineurs affectés de signes convenables. On a donc d'abord

$$\Delta = \delta^3.$$

Ensuite, les premiers mineurs affectés de signes $\overline{A}, \overline{B}, \ldots$ sont simplement les produits de $a, b, \ldots$ par δ^2, et l'on a

$$\Theta = \delta^2(aa' + \ldots + 2ff' + \ldots + 2ll' + \ldots) = \delta^2\theta,$$

en désignant par θ la quantité placée dans la parenthèse. Enfin, l'on a

$$(\overline{b}\overline{c} - \overline{f}^2) = \delta(a\,d - l^2), \ldots$$

et, par suite,

$$\Phi = \delta[(a\,d - l^2)(a'\,d' - l'^2) + \ldots] = \delta\varphi,$$

en posant (Salmon, *Géométrie à trois dimensions*, p. 254),

$$\begin{aligned} \varphi = \quad & (a\,d - l^2\ )(a'\,d' - l'^2) + \ldots \\ + \ & (bc\ - f^2\ )(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots \\ + \ & 2(gm - hn\ )(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots \\ + \ & 2(lc\ - ng\ )(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots \\ + \ & 2(mh - lb\ )(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots \\ + \ & 2(gh\ - af\ )(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots \\ + \ & 2(fd\ - mn)(\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots . \end{aligned}$$

5. Par analogie avec ce qui a lieu dans le plan pour les triangles de Poncelet, on peut s'attendre (et cette précision se confirme) à ce que la relation invariante annoncée au n° 3 soit

$$\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} \pm \sqrt{\lambda'''} = 0,$$

ou, S_1 désignant la somme des $\lambda, \ldots,$

$$(S_1^2 - 4S_2)^2 - 64\lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = 0,$$

ou

$$\Theta^2 - 4\Delta\Phi = \pm 8\Delta\sqrt{\Delta\Delta'}.$$

En introduisant δ, θ, φ, et en mettant alors δ' au lieu de Δ', on a enfin

$$\frac{1}{4}\theta^2 - \varphi = \pm 2\sqrt{\delta\delta'}.$$

III.

6. Nous prendrons comme tétraèdre de référence le tétraèdre D″ABC, D″ étant, comme on l'a dit, le point de concours des droites AA′, BB′, CC′; les plans des faces sont d, a'', b'', c''; on passe donc du point de vue ponctuel au point de vue tangentiel en remplaçant, par exemple, A, A′, A″ par a'', a', a.

Les neuf sommets du polyèdre sont :

1° A, B, C, sommets de référence;
2° A′, B′, C′, sur les arêtes de référence DA, DB, DC;
3° A″, B″, C″.

Les neuf plans des faces du polyèdre sont :

1° a'', b'', c'', plans de référence;
2° a', b', c', passant par les arêtes de référence (d, a), ...;
3° a, b, c.

7. On a les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} (d') \text{ ou } (\mathrm{A'B'C'}), & ax + by + cz + dt & = 0, \\ (d'') \text{ ou } (\mathrm{A''B''C''}), & ax + by + cz + \delta t & = 0, \\ (\mathrm{D''}\mathcal{A}\mathrm{B''C''}), & ax + by + cz + \dfrac{d'\delta}{a'}x & = 0, \\ (\mathrm{D''}\mathcal{B}\mathrm{C''A''}), & ax + by + cz + \dfrac{d'\delta}{b'}y & = 0, \\ (\mathrm{D''}\mathcal{C}\mathrm{A''B''}), & ax + by + cz + \dfrac{d'\delta}{c'}z & = 0; \end{array}$$

outre les douze paramètres du tétraèdre de référence, on a les sept paramètres a, b, c, δ, a', b', c'.

On a, pour le point A″,

$$\frac{ax}{-bb' - cc' - d'\delta} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'},$$

comme on le vérifie aisément; *nous définirons une constante* δ'

par la relation

$$\text{(R)} \qquad aa' + bb' + cc' - dd' + (d'\delta + d\delta') = 0,$$

et nous aurons

$$\text{(A'')} \qquad \frac{ax}{aa' + d(\delta' - d')} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'};$$

ou encore, l'équation tangentielle de ce point est

$$\text{(A'')} \qquad a'u + b'v + c'w + d'r + \frac{d}{a}(\delta' - d')u = 0.$$

8. Après avoir considéré les sommets du polyèdre, considérons les plans de ses faces.

Les trois plans BCB''C'', ... ont pour équations

$$\frac{x}{a'} = \frac{t}{d'}, \qquad \frac{y}{b'} = \frac{t}{d'}, \qquad \frac{z}{c'} = \frac{t}{d'};$$

ces trois plans se coupent au point D' dont les coordonnées sont a', b', c', d', et l'équation tangentielle de ce point est

$$\text{(D')} \qquad a'u + b'v + c'w + d'r = 0.$$

Les trois plans B''C''B'C', ... ont pour équations

$$(a) \text{ ou } (\text{B''C''B'C'}) \quad ax + by + cz + dt + \frac{d'}{a'}(\delta - d)x = 0,$$

$$(b) \text{ ou } (\text{C''A''C'A'}) \quad ax + by + cz + dt + \frac{d'}{b'}(\delta - d)y = 0,$$

(c) ou (A''B''A'B') ....;

le second plan, par exemple, passe au point A' pour lequel on a $y = 0$, $z = 0$, $ax + dt = 0$, et il passe de même au point C'; il passe au point A'', car on a

$$(aa' + d\delta' - dd') + bb' + cc' + dd' + d'\delta - dd' = 0$$

en vertu de la relation qui définit la constante δ'.

Ces trois plans se coupent au point

$$\text{(D)} \qquad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} = \frac{t}{\delta'},$$

comme on le vérifie par cette même relation; l'équation tangentielle de ce point est

$$(D)\qquad a'u + b'v + c'w + \delta' r = 0.$$

On voit que l'on passe des sommets aux faces du polyèdre en échangeant x et u, ..., a et a', ..., δ et δ'.

9. Considérons la quadrique S′ circonscrite au polyèdre considéré. Comme elle passe aux points A, B, C, A′, B′, C′, son équation est de la forme

$$(ax + by + cz + dt)t + \mathrm{A}yz + \mathrm{B}zx + \mathrm{C}xy = 0.$$

La section de cette conique par le plan A″B″C″ est sur le cône

$$(d - \delta)\frac{(ax + by + cz)^2}{\delta^2} + \mathrm{A}yz + \mathrm{B}zx + \mathrm{C}xy = 0.$$

En écrivant que ce cône contient le point A″, on a

$$(d - \delta)d'^2 + \mathrm{A}b'c' + \mathrm{B}c'\left[a' + \frac{d}{a}(\delta' - d')\right] + \mathrm{C}b'\left[a' + \frac{d}{a}(\delta' - d')\right] = 0$$

ou

$$(d - \delta)d'^2 + \mathrm{A}b'c' + \mathrm{B}c'a' + \mathrm{C}a'b' + \frac{d}{a}(\delta' - d')(\mathrm{B}c' + \mathrm{C}b') = 0;$$

les points B″ et C″ donnent deux relations analogues, que l'on peut remplacer par celles-ci :

$$\frac{\mathrm{B}c' + \mathrm{C}b'}{a} = \frac{\mathrm{C}a' + \mathrm{A}c'}{b} = \frac{\mathrm{A}b' + \mathrm{B}a'}{c};$$

on conclut de là, en tenant compte de (R),

$$\frac{\mathrm{A}}{a'(bb' + cc' - aa')} = \frac{\mathrm{B}}{b'(cc' + aa' - bb')} = \frac{\mathrm{C}}{c'(aa' + bb' - cc')} = \frac{\lambda'}{a'b'c'},$$

$$\lambda' = \frac{d'^2(d - \delta)}{(dd' + d'\delta - d\delta')}.$$

Si l'on pose

$$p = bb' + cc' - aa',\qquad q = \ldots,\qquad r = \ldots,$$

l'équation de la quadrique S′ est donc, en doublant,

$$(\mathrm{S}')\qquad 2a'b'c'(ax + by + cz + dt)t + 2\lambda'(a'pyz + b'qzx + c'rxy) = 0,$$

λ' ayant la valeur ci-dessus.

La quadrique S inscrite au polyèdre a de même pour équation tangentielle

$$(\Sigma)\quad 2abc(a'u+b'v+c'w+d'r)r+2\lambda(apvw+bqwu+cruv)=0,$$

avec

$$\lambda=\frac{d^2(d'-\delta')}{dd'+d\delta'-d'\delta}.$$

10. Comme les constantes δ et δ', liées aux autres par la relation (R), n'entrent que dans λ et λ', cette relation (R) équivaut à une relation entre λ, λ' et les autres constantes $a, \ldots, d, a', \ldots, d'$. Les expressions de λ' et de λ donnent

$$\begin{aligned}(\lambda'+d').d'\delta-\qquad\quad \lambda'.d\delta'&=dd'(d'-\lambda'),\\ -\lambda.d'\delta+(\lambda+d).d\delta'&=dd'(d-\lambda),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$d'\delta=dd'\frac{-2\lambda\lambda'+d'\lambda+dd'}{d\lambda'+d'\lambda+dd'},$$

$$d\delta'=dd'\frac{-2\lambda\lambda'+d\lambda'+dd'}{d\lambda'+d'\lambda+dd'};$$

la relation (R) devient

$$(\mathrm{R}')\qquad 4dd'\lambda\lambda'-(d\lambda'+d'\lambda)\Sigma aa'=dd'(dd'+\Sigma aa'),$$

le signe Σ s'étendant à a, b, c, ou encore

$$(\mathrm{R}'')\qquad (4d\lambda'-\Sigma aa')(4d'\lambda-\Sigma aa')=(2dd'+\Sigma aa')^2.$$

IV.

11. Il s'agit de vérifier la relation

$$\frac{1}{4}\theta^2-\varphi=\pm 2\sqrt{\delta\delta'}.$$

On a d'abord

$$\delta'=\begin{vmatrix} 0 & \lambda'c'r & \lambda'b'q & a'b'c'a\\ \lambda'c'r & 0 & \lambda'a'p & a'b'c'b\\ \lambda'b'q & \lambda'a'p & 0 & a'b'c'c\\ a'b'c'a & a'b'c'b & a'b'c'c & 2a'b'c'd\end{vmatrix}.$$

Divisons les trois premières lignes par $\lambda'b'c'$, $\lambda'c'a'$, $\lambda'a'b'$, la dernière par $a'b'c'$, et multiplions les trois premières colonnes par a', b', c', la dernière par $2\lambda'$; il vient

$$\frac{\delta'}{a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & r & q & 2aa' \\ r & 0 & p & 2bb' \\ q & p & 0 & 2cc' \\ aa' & bb' & cc' & 4d\lambda' \end{vmatrix}.$$

A cause de $q + r = 2aa'$, retranchons de la dernière colonne la somme des trois premières; nous avons

$$\frac{\delta'}{a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} \times (4d\lambda' - \Sigma aa'),$$

le signe Σ s'étendant à a, b, c. Finalement :

$$\delta' = a'^2 b'^2 c'^2 \lambda'^2 \times pqr \times (4d\lambda' - \Sigma aa'),$$

On a pour δ une expression analogue. Par suite, en tenant compte de la relation (R″), le produit $\delta\delta'$ est un carré, comme cela est nécessaire :

$$\sqrt{\delta\delta'} = abc.a'b'c'.\lambda\lambda'.pqr \times (2dd' + \Sigma aa').$$

12. On a ensuite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\theta = {} & abc.a'b'c'(2dd' + \Sigma aa') \\ & + \lambda\lambda'(aa'p^2 + bb'q^2 + cc'r^2). \end{aligned}$$

13. Reste le polynome φ. L'équation (S′) manquant de terme en x^2, y^2, z^2, l'équation (Σ) manquant de termes en u^2, v^2, w^2, on a (fin du n° 4)

$$\begin{aligned} \varphi = {} & l^2 l'^2 + \ldots \\ & + f^2 f'^2 + \ldots \\ & + 2(gm - hn)(g'm' - h'n') + \ldots \\ & + 2ll'(gg' + hh') + \ldots \\ & + 2gh.g'h' + \ldots \\ & + 2(fd - mn)(f'd' - m'n') + \ldots ; \end{aligned}$$

la quatrième ligne contient les termes qui proviennent de la quatrième et de la cinquième ligne dans l'expression générale de φ.

On trouve, en développant,

$$\varphi = (ll' + mm' + nn' + ff' + gg' + hh')^2 + 2K,$$

avec

$$\begin{aligned} K = & -f'l'(gm + hn - fl) - \ldots - \ldots \\ & + dd'(ff' + gg' + hh') \\ & - mnf'd' - \ldots - \ldots \\ & - m'n'fd - \ldots - \ldots, \end{aligned}$$

d représentant ici le coefficient de r^2 *dans l'équation* (Σ), *c'est-à-dire* $2\,abcd'$, etc ; on en déduit

$$\varphi = [abc.a'b'c'\Sigma aa' + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \ldots)]^2 + 2K,$$

ou

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}\,\theta - 2abc.a'b'c'.dd'\right)^2 + 2K.$$

14. La relation à vérifier devient, *en prenant le signe* + *devant le radical,*

$$\begin{aligned} & 2abc.a'b'c'.dd'.\theta - 4\,a^2b^2c^2.a'^2b'^2c'^2.d^2d'^2 - 2K \\ & \quad = 2abc.a'b'c'.\lambda\lambda'.pqr \times (2dd' + \Sigma aa'), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{K}{abc.a'b'c'} & = dd'(\theta - 2abc.a'b'c'.dd') - \lambda\lambda' pqr(2dd' + \Sigma aa') \\ & = 2dd'[abc.a'b'c'(dd' + \Sigma aa') + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \ldots)] \\ & \quad - \lambda\lambda' pqr(2dd' + \Sigma aa'). \end{aligned}$$

Or on a, d'après l'expression de K donnée au n° 13,

$$\begin{aligned} K = & -\lambda\lambda'.abc.a'b'c'[aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) + \ldots + \ldots] \\ & + 4\lambda\lambda' abc.a'b'c'.dd'[aa'p^2 + \ldots + \ldots] \\ & - 2a^2b^2c^2.a'^2b'^2c'^2(d\lambda' + d'\lambda)(p + q + r), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $p + q + r$ par $\Sigma aa'$, et en tenant compte de (R'),

$$\begin{aligned} \frac{K}{abc.a'b'c'} = & -\lambda\lambda'[aa'p(bb'q + cc'r - aa'p) + \ldots + \ldots] \\ & + 4\lambda\lambda'.dd'(aa'p^2 + \ldots + \ldots) \\ & - 2abc.a'b'c'[4dd'.\lambda\lambda' - dd'(dd' + \Sigma aa')]; \end{aligned}$$

il faut donc vérifier que le second membre de cette égalité ne diffère pas de l'expression

$$2dd'[abc.a'b'c'(dd' + \Sigma aa') + \lambda\lambda'(aa'p^2 + \ldots)] - \lambda\lambda' pqr(2dd' + \Sigma aa').$$

Les termes indépendants du produit $\lambda\lambda'$ sont d'abord identiques. Il reste à vérifier :

$$\begin{aligned}&-aa'p(bb'q+cc'r-aa'p)-\ldots-\ldots\\&+2dd'(aa'p^2+\ldots+\ldots-4abc.a'b'c')=-pqr(2dd'+\Sigma aa').\end{aligned}$$

Pour les termes indépendants du produit dd', si l'on pose

$$aa'=\alpha,\qquad bb'=\beta,\qquad cc'=\gamma,$$

d'où

$$p=\beta+\gamma-\alpha,\qquad \ldots,\qquad \ldots,$$

on a, par exemple,

$$\begin{aligned}bb'q+cc'r-aa'p&=\beta(\gamma+\alpha-\beta)+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)-\alpha(\beta+\gamma-\alpha)\\&=\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma),\end{aligned}$$

et l'on doit vérifier

$$-\alpha(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)-\ldots-\ldots=-pqr\Sigma\alpha,$$

ce qui est une identité.

Pour les termes en dd', on doit vérifier

$$\alpha(\beta+\gamma-\alpha)^2+\beta(\gamma+\alpha-\beta)^2+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2-4\alpha\beta\gamma=-pqr;$$

or, le premier membre admet le facteur p, comme on le voit en y faisant $\alpha=\beta+\gamma$, etc. ; il est donc divisible par pqr, et les deux membres de l'égalité ne peuvent différer que par une constante; ils ne diffèrent pas, puisque les termes en α^3 par exemple sont les mêmes.