BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

**Mémoire sur les couples actifs des permutations**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 31 (1903), p. 105-140
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__105_0>

# MÉMOIRE SUR LES COUPLES ACTIFS DES PERMUTATIONS;

Par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

## INTRODUCTION.

1. Pour donner une idée de l'objet et des résultats du présent Mémoire, il est nécessaire de rappeler deux notions déjà anciennes, celle des *séquences* des permutations, celle des *deux espèces* de permutations; et de faire connaître une notion toute nouvelle, celle des *couples actifs* des permutations.

Les permutations, d'ailleurs, dont nous nous occupons, sont celles des $n$ premiers nombres : ces nombres en sont les éléments.

2. Une permutation quelconque des $n$ premiers nombres est formée évidemment de suites alternatives d'éléments croissants ou décroissants. Chacune de ces suites est une *séquence*. La permutation

$$8\ 7\ 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5\ 9$$

est ainsi formée des quatre séquences

$$871,\quad 16,\quad 642,\quad 2359;$$

et la permutation

$$7\ 8\ 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5\ 9,$$

des cinq séquences

$$78,\quad 81,\quad 16,\quad 642,\quad 2359.$$

3. Les permutations de $n$ éléments se partagent en *deux espèces :* celles qui contiennent un nombre pair de séquences composent la première; celles qui en contiennent un nombre impair composent la seconde. La première des permutations ci-dessus (2) contient quatre séquences : elle appartient à la première espèce; la deuxième en contient cinq : elle appartient à la seconde.

4. Lorsque, dans une permutation de $n$ éléments, on échange entre eux deux éléments quelconques, tantôt cette permutation change d'espèce, tantôt elle n'en change pas. Si elle en change, les deux éléments considérés constituent un *couple actif;* sinon,

un *couple inactif*. Dans chacune (2) des permutations précédentes, 8 et 6 forment un couple actif; 4 et 3, un couple inactif.

C'est aux couples actifs, et à eux seulement, que sont consacrés les trois Chapitres composant ce Mémoire.

5. D'abord (Chap. I), je considère les éléments d'une permutation déterminée quelconque de $n$ éléments; je classe les couples de ces éléments; et je donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'un quelconque d'entre eux soit un couple actif. Je cherche le nombre total des couples actifs contenus dans cette permutation, et j'exprime ce nombre à l'aide d'une formule unique, très simple, où il n'entre, avec le nombre $n$ des éléments, que trois paramètres distincts. J'en déduis la probabilité pour que deux éléments, pris au hasard dans la permutation considérée, forment un couple actif; et je fais connaître la valeur maxima et la valeur minima que cette probabilité peut prendre dans les permutations de $n$ éléments.

6. Passant ensuite (Chap. II) de la considération d'une permutation déterminée, à celle de toutes les permutations de $n$ éléments, je partage ces permutations en *trois sortes;* je nomme, pour des raisons presque géométriques, les permutations entrant dans chacune d'elles : permutations à *segments séparés,* permutations à *segments imbriqués,* permutations à *segments superposés;* et je montre que, dans ces trois sortes, les permutations sont en même nombre. Dans ces trois sortes, d'ailleurs, je ne prends provisoirement que les permutations où les deux premiers éléments, les deux derniers et les $n - 4$ intermédiaires se suivent dans l'ordre des grandeurs croissantes : ce sont les *permutations ordonnées;* et je donne des formules indiquant les calculs à effectuer pour obtenir les nombres $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$ des couples actifs contenus respectivement dans les permutations ordonnées des trois sortes. Ces formules présentent chacune une superposition de quatre $\sum$; mais elles ne sont, toutes les trois, que des cas particuliers d'une formule unique; et, en effectuant sur cette dernière les calculs indiqués, j'obtiens, pour $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$ en fonction de $n$, des expressions très courtes, d'une remarquable simplicité.

7. Enfin (Chap. III), ne me bornant plus aux permutations

ordonnées, je considère toutes les permutations de $n$ éléments; je fais connaître, en fonction de $n$, le *nombre total* des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations à segments séparés, dans l'ensemble des permutations à segments imbriqués, dans l'ensemble des permutations à segments superposés; et j'en déduis, pour chacun de ces ensembles, le *nombre moyen* des couples actifs contenus dans une permutation. Faisant abstraction des trois sortes de permutations, je considère le système complet des permutations de $n$ éléments; je détermine, en fonction de $n$, le *nombre total* des couples actifs qu'il contient; le *nombre moyen* de ceux que contient une permutation quelconque; et le rapport de ce nombre moyen au nombre $n$ des éléments. Tous ces résultats me permettent alors de résoudre plusieurs questions de probabilités, dont voici la dernière : *Quelle est la probabilité d'obtenir un couple actif en prenant deux éléments quelconques dans une permutation quelconque de n éléments ?*

**8.** Le présent Mémoire est fondé tout entier, comme je l'ai déjà dit, sur la notion des séquences, qui est due à Bienaymé ([1]); sur celle des deux espèces de permutations que j'ai fait connaître en 1891 ([2]); sur celle, enfin, des couples actifs que je viens de définir ici même (4). Comme on devait s'y attendre, il existe certaines relations ou analogies entre la théorie des couples actifs et la théorie des séquences; la plus remarquable est sans doute celle-ci : *Dans le système complet des permutations de n éléments, lorsque n croît au delà de toute limite, le nombre moyen des couples actifs et le double du nombre moyen des séquences sont deux infiniment grands équivalents, c'est-à-dire deux infiniment grands dont le rapport tend vers l'unité.*

**9.** Ce résultat est nouveau, comme le sont, d'ailleurs, tous ceux qu'on va lire. J'ai exposé les principaux d'entre eux dans une courte Note, présentée à l'Académie des Sciences le 2 février 1903. Ce qui m'a permis de les obtenir tous, malgré la grande difficulté du sujet, c'est l'idée que j'ai eue de partager en trois sortes les permutations de $n$ éléments. Bien que cette classi-

---

([1]) *Académie des Sciences,* séance du 6 septembre 1875.
([2]) *Société philomathique de Paris,* séance du 27 juin 1891.

fication soit tout à fait conforme à la nature des choses, je n'y suis parvenu qu'après de longs tâtonnements et pour ainsi dire en dernier lieu. Mais, dans le présent Mémoire, j'ai tout ordonné de façon qu'elle y apparût dès le commencement et s'y présentât comme d'elle-même. J'espère que le Mémoire tout entier, grâce à ce mode d'exposition, sera rendu très lisible et très clair.

## CHAPITRE PREMIER.

### DES COUPLES ACTIFS D'UNE PERMUTATION DÉTERMINÉE.

#### I. — *Échange de deux éléments.*

**10.** Lorsque, dans une permutation des $n$ premiers nombres, on échange entre eux deux éléments ou nombres déterminés, quelconques d'ailleurs, tantôt cette permutation change d'espèce, tantôt elle n'en change pas. Nous allons chercher, dans tous les cas possibles, à quels couples d'éléments échangés correspondent ces différents résultats.

**11.** Pour répondre à cette question, nous supposerons $n$ égal et supérieur à 4; puis nous remarquerons :

D'abord, que, dans toute permutation, les séquences, prises dans l'ordre où elles se succèdent, sont alternativement *ascendantes* et *descendantes,* ou réciproquement;

Ensuite, que, si la première et la dernière séquences de la permutation sont l'une ascendante et l'autre descendante, ou réciproquement, cette permutation présente un nombre pair de séquences;

Enfin, qu'elle en présente un nombre impair lorsque ces séquences extrêmes sont toutes deux ascendantes ou toutes deux descendantes.

**12.** Il suit immédiatement de là que les cas où la permutation changera d'espèce seront ceux où l'une des séquences extrêmes changera de sens, l'autre n'en changeant pas; que les cas où la permutation ne changera pas d'espèce seront ceux où les séquences extrêmes changeront toutes les deux de sens, ou bien n'en changeront ni l'une ni l'autre.

**13.** Mais le sens de la première séquence est déterminé par les deux premiers éléments de la permutation, et le sens de la dernière séquence par les deux derniers éléments. Ce sont donc, dans la question qui nous occupe, ces deux couples d'éléments extrêmes qui jouent le rôle prépondérant.

14. Pour cette raison, nous partagerons les éléments de la permutation en trois groupes : les 2 éléments *initiaux,* les 2 éléments *terminaux*, les $n - 4$ éléments *intermédiaires.*

D'ailleurs, comme nous supposons le nombre total $n$ des éléments égal ou supérieur à 4, il est clair que les éléments initiaux et les éléments terminaux sont toujours absolument distincts.

15. Cela étant, prenons, pour les échanger entre eux, deux des $n$ éléments de la permutation. Nous pouvons le faire de quatre manières essentiellement différentes, car nous pouvons prendre :

1° Deux éléments intermédiaires;

2° Les deux éléments initiaux ou les deux éléments terminaux;

3° Un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal;

4° Enfin, un élément initial avec un élément terminal.

Il nous suffit évidemment, pour répondre à la question que nous nous sommes posée, de trouver, dans chacun de ces quatre cas, si la permutation change d'espèce ou si elle n'en change pas.

16. Supposons qu'on échange entre eux deux éléments intermédiaires.

Les éléments initiaux, non plus que les éléments terminaux, ne subissent aucune variation; la première et la dernière séquence ne changent ni l'une ni l'autre de sens; par suite, la permutation ne change pas d'espèce. Donc :

Théorème. — *Quand on échange entre eux deux éléments intermédiaires quelconques, la permutation ne change jamais d'espèce.*

17. Supposons qu'on échange entre eux les deux éléments initiaux.

La première séquence changeant de sens et la dernière n'en changeant pas, la permutation change d'espèce.

Il en est évidemment de même quand on échange entre eux les deux éléments terminaux. Donc :

THÉORÈME. — *Quand on échange entre eux les deux éléments initiaux ou les deux éléments terminaux, la permutation change toujours d'espèce.*

18. Supposons qu'on échange un élément intermédiaire avec l'un, par exemple, des deux éléments initiaux.

Il est clair que la dernière séquence garde son sens; et, par suite, que si les valeurs numériques des deux éléments échangés comprennent entre elles la valeur numérique de l'élément initial resté fixe, la première séquence changeant de sens, la permutation change d'espèce. Il est clair aussi que, si cette condition n'est point remplie, la première séquence ne changeant pas de sens, la permutation ne change pas non plus d'espèce.

On trouverait un résultat analogue si l'on échangeait un élément intermédiaire avec l'un des deux éléments terminaux.

Mais les éléments de nos permutations sont les $n$ premiers nombres. Pour abréger, au lieu de dire que les valeurs numériques de deux éléments comprennent ou ne comprennent pas entre elles la valeur numérique d'un autre, disons simplement que ces deux premiers éléments comprennent ou ne comprennent pas cet autre. Nous pouvons alors résumer de la manière suivante tout ce qui se rapporte à notre troisième cas :

THÉORÈME. — *Lorsqu'on échange un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal, la permutation change ou ne change pas d'espèce suivant que les deux éléments échangés comprennent ou ne comprennent pas entre eux l'élément initial ou terminal resté fixe.*

19. Supposons enfin qu'on échange un élément initial avec un élément terminal.

Suivant que les deux éléments échangés comprennent ou ne comprennent pas entre eux l'élément initial resté fixe, la première séquence change ou ne change pas de sens.

De même, suivant que les deux éléments échangés comprennent ou ne comprennent pas entre eux l'élément terminal resté fixe, la dernière séquence change ou ne change pas de sens.

Si donc nous appelons *extrêmes fixes* l'élément initial et l'élément terminal non déplacés, nous pouvons résumer ainsi tout ce qui se rapporte à notre quatrième et dernier cas :

Théorème. — *Quand on échange un élément initial avec un élément terminal, la permutation change d'espèce si les éléments échangés comprennent entre eux un seul des extrêmes fixes; elle ne change pas d'espèce si les éléments échangés comprennent entre eux les deux extrêmes fixes, ou ne les comprennent ni l'un ni l'autre.*

20. Il est bien évident que les théorèmes qui précèdent, pris ensemble, constituent une solution complète de la question que nous nous étions posée, pour tous les cas où $n$ est égal ou supérieur à 4.

Dans les cas simples où $n$ est égal soit à 2, soit à 3, l'examen direct des permutations conduit à ces deux propositions :

1° *Une permutation de deux éléments ne change jamais d'espèce quand on échange ses deux éléments entre eux;*

2° *Une permutation de trois éléments ne change d'espèce, par l'échange de deux de ses éléments, que quand les deux éléments échangés remplissent cette double condition : d'être juxtaposés dans la permutation et de ne pas contenir entre eux l'élément resté fixe.*

### II. — *Nombre des couples actifs d'une permutation.*

21. D'après ce qui précède, étant donnés une permutation des $n$ premiers nombres et, dans cette permutation, deux éléments quelconques que l'on échange entre eux, nous savons reconnaître si, par l'échange de ces deux éléments, cette permutation change ou ne change pas d'espèce; en d'autres termes, et pour employer les locutions définies plus haut (4), nous savons reconnaître si c'est un couple actif ou un couple inactif que constituent ces deux éléments.

Nous prenons à présent une permutation quelconque des $n$ premiers nombres; nous considérons tous les couples que l'on peut former avec les $n$ éléments de cette permutation; nous cherchons enfin, parmi tous ces couples, combien il y en a d'actifs, combien il y en a d'inactifs.

**22.** Mais, avant tout, nous ferons remarquer que le nombre total des couples d'éléments qu'on peut prendre dans cette permutation est égal au nombre des combinaisons simples de $n$ objets 2 à 2, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Si donc nous désignons par $\gamma$ le nombre des couples actifs, par $\delta$ le nombre des couples inactifs, nous avons

$$\gamma+\delta=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que, pour répondre à la question que nous nous sommes posée, il suffit de déterminer l'un seulement des nombres $\gamma$ et $\delta$.

Nous allons chercher le nombre $\gamma$ des couples actifs.

**23.** Pour calculer ce nombre $\gamma$, nous supposerons le nombre $n$ des éléments de la permutation égal ou supérieur à 4; nous partagerons encore ces $n$ éléments en trois groupes : les 2 éléments initiaux, les 2 éléments terminaux, les $n-4$ éléments intermédiaires; nous déterminerons ensuite combien on rencontre de couples actifs quand on échange entre eux, de toutes les manières possibles :

1° Deux éléments intermédiaires;

2° Les deux éléments initiaux ou les deux éléments terminaux;

3° Un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal;

4° Un élément initial avec un élément terminal.

**24.** Quand on échange entre eux deux éléments intermédiaires, la permutation ne change jamais d'espèce (**16**). Dans ce genre d'échanges, on ne rencontre donc aucun couple actif.

**25.** Quand on échange entre eux soit les deux éléments initiaux, soit les deux éléments terminaux, la permutation (**17**) change toujours d'espèce.

L'échange des deux éléments initiaux correspond donc à un couple actif; l'échange des deux éléments terminaux correspond aussi à un pareil couple. De là, deux couples actifs répondant à ce genre d'échanges.

26. Lorsqu'on échange un élément intermédiaire avec un élément initial, par exemple, la permutation ne change d'espèce (18) que quand les deux éléments échangés comprennent entre eux l'élément initial resté fixe. Il s'ensuit qu'un élément intermédiaire, échangé successivement avec le premier puis avec le second des éléments initiaux, ne donne de couple actif que s'il n'est pas compris entre ces deux éléments initiaux; et que, quand cette condition est remplie, il ne donne qu'un seul couple actif. Le nombre des couples actifs qu'on rencontre en échangeant, de toutes les manières possibles, un élément intermédiaire avec un élément initial est donc juste égal au nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments initiaux.

On verrait de même que le nombre des couples actifs qu'on rencontre en échangeant, de toutes les manières possibles, un élément intermédiaire avec un élément terminal est juste égal au nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments terminaux.

Cela posé, appelons $\alpha$ la différence, prise en valeur absolue, des deux éléments initiaux; $\beta$ la différence, prise en valeur absolue aussi, des deux éléments terminaux; $i$ le nombre des éléments initiaux non compris entre les deux éléments terminaux, et $j$ le nombre des éléments terminaux non compris entre les deux éléments initiaux.

Pour obtenir les éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments initiaux, il nous suffit évidemment d'écrire la suite des $n$ premiers nombres; d'y barrer les deux éléments initiaux, puis les $\alpha - 1$ éléments que ces éléments initiaux comprennent entre eux, et enfin les $j$ éléments terminaux qu'ils ne comprennent point. Le nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments initiaux est donc

$$n - 2 - (\alpha - 1) - j,$$

c'est-à-dire

$$(n-1) - \alpha - j.$$

Pour obtenir les éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments terminaux, il nous suffit de même d'écrire la suite des $n$ premiers nombres; d'y barrer les deux éléments terminaux; puis les $\beta - 1$ éléments que ces éléments terminaux comprennent entre eux; et enfin les $i$ éléments initiaux qu'ils ne comprennent point. Le nombre des éléments intermédiaires non compris entre les deux éléments terminaux est donc

$$n - 2 - (\beta - 1) - i,$$

c'est-à-dire

$$(n - 1) - \beta - i.$$

Il suit de tout cela que, en faisant tous les échanges possibles d'un élément intermédiaire avec un élément initial ou terminal, on rencontre un nombre de couples actifs égal à

$$2(n - 1) - (\alpha + \beta) - (j + i).$$

**27.** Lorsqu'on échange un élément initial avec un élément terminal, la permutation ne change d'espèce (**19**) que quand les deux éléments échangés comprennent entre eux un et un seul des deux extrêmes restés fixes. Par suite, le nombre des couples actifs qu'on rencontre en ce genre d'échanges dépend uniquement des valeurs de $i$ et de $j$.

Il y a évidemment trois cas à distinguer, et trois seulement : celui où $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 2; celui où ils sont l'un et l'autre égaux à 1; celui où ils sont égaux l'un à 0 et l'autre à 2. Un examen direct, d'une facilité extrême, donne pour ces trois cas les résultats suivants :

1° Lorsque $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 2, il y a deux couples actifs;

2° Lorsque $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 1, il n'y a aucun couple actif;

3° Enfin, lorsque $i$ et $j$ sont égaux l'un à 0, l'autre à 2, il y a encore deux couples actifs.

**28.** Connaissant le nombre des couples actifs qu'on rencontre dans chaque genre d'échanges de deux éléments, nous sommes en état d'écrire le nombre total des couples actifs que présente une permutation déterminée quelconque des $n$ premiers nombres. Nous n'avons évidemment, pour obtenir ce nombre total, qu'à ajouter les nombres de couples actifs qui correspondent à chaque genre d'échanges.

En effectuant cette addition, et simplifiant légèrement les résultats qu'elle donne, nous arrivons aux trois propositions suivantes :

1° *Si $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à* 2, *le nombre total des couples actifs est*

$$2(n-1)-(\alpha+\beta)+(4-i-j);$$

2° *Si $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à* 1, *le nombre total des couples actifs est*

$$2(n-1)-(\alpha+\beta)+(2-i-j);$$

3° *Enfin, si $i$ et $j$ sont égaux l'un à* 0, *l'autre à* 2, *le nombre total des couples actifs est*

$$2(n-1)-(\alpha+\beta)+(4-i-j).$$

**29.** Les trois résultats que nous venons d'obtenir consistent chacun en une somme algébrique de trois termes, dont les deux premiers sont toujours les mêmes, mais dont le troisième affecte deux formes différentes. Pour ramener ces trois résultats à une seule forme, il suffirait donc d'y ramener leur troisième terme. On y parvient par la considération de la différence, prise en valeur absolue, des deux nombres $i$ et $j$.

Soit, en effet, $\varepsilon$ cette différence, prise en valeur absolue.

1° Lorsque $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 2, la différence $\varepsilon$ est nulle, et l'on a

$$4-i-j=\varepsilon;$$

2° Lorsque $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 1, la différence $\varepsilon$ est encore nulle, et l'on a

$$2-i-j=\varepsilon;$$

3° Enfin, lorsque $i$ et $j$ sont égaux l'un à 0 et l'autre à 2, la différence $\varepsilon$ est égale à 2, et l'on a

$$4-i-j=\varepsilon.$$

Par conséquent, le troisième terme des sommes considérées est toujours égal à $\varepsilon$; par conséquent, en conservant aux lettres $\alpha$,

$\beta$, $\varepsilon$ les significations que nous leur avons attribuées, nous pouvons énoncer ce théorème unique :

THÉORÈME. — *Dans une permutation déterminée quelconque des $n$ premiers nombres, $n$ étant égal ou supérieur à 4, le nombre total $\gamma$ des couples actifs est donné par la formule*

$$\gamma = 2(n-1) - (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

30. Les trois lettres $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ qui entrent dans cette formule représentent les valeurs absolues de trois différences, c'est-à-dire de trois quantités affectées tantôt du signe $+$, tantôt du signe $-$. La formule ne subsiste que parce qu'on y fait abstraction de ces signes. C'est là, ce nous semble, un fait remarquable et contraire à ce qui arrive d'ordinaire en algèbre, où les formules ne sont le plus souvent générales que lorsque l'on y prend avec leurs signes respectifs toutes les quantités qui y figurent.

31. Notre formule (29) suppose, d'ailleurs, essentiellement que, dans la permutation considérée, les éléments initiaux et les éléments terminaux soient distincts, c'est-à-dire que le nombre $n$ des éléments soit égal ou supérieur à 4. Il est aisé de voir :

1° *Que, si $n$ est égal à 2, il n'y a aucun couple actif;*

2° *Que, si $n$ est égal à 3, le nombre des couples actifs est juste égal à la différence, prise en valeur absolue, du premier et du dernier élément de la permutation.*

32. D'après ce que nous avons vu (22) sur la somme $\gamma + \delta$, il est inutile que nous fassions une étude spéciale du nombre total $\delta$ des couples inactifs : nous avons, quelle que soit la valeur de $n$,

$$\delta = \frac{n(n-1)}{2} - \gamma;$$

et, par conséquent, toutes les fois que $n$ est au moins égal à 4,

$$\delta = \frac{(n-1)(n-4)}{3} + (\alpha + \beta) - \varepsilon.$$

III. — *Question de probabilité.*

33. Considérons une permutation déterminée quelconque des

$n$ premiers nombres, et cherchons la probabilité pour qu'elle change d'espèce lorsque l'on y échange entre eux deux éléments pris au hasard.

D'après la définition même de la probabilité d'un événement, il nous suffit, pour résoudre ce problème, de calculer le nombre des cas possibles et le nombre des cas favorables, puis de diviser ce dernier nombre par le précédent.

34. Grâce aux calculs, déjà effectués, du nombre $\gamma$ des couples actifs et du nombre $\delta$ des couples inactifs, la détermination de la probabilité cherchée $\pi$ ne présente aucune difficulté.

Évidemment, en effet, un cas est favorable lorsque les deux éléments échangés forment un couple actif; défavorable, lorsqu'ils forment un couple inactif. Il s'ensuit que le nombre des cas favorables est égal à $\gamma$; celui des cas défavorables, à $\delta$; celui des cas possibles, à $\gamma + \delta$; et, par conséquent, que la probabilité cherchée $\pi$ est donnée par la formule

$$\pi = \frac{\gamma}{\gamma + \delta}.$$

35. Or, nous avons établi, d'une part (22), pour toutes les valeurs de $n$, l'égalité

$$\gamma + \delta = \frac{n(n-1)}{2};$$

de l'autre (29), pour les valeurs de $n$ égales ou supérieures à 4, l'égalité

$$\gamma = 2(n-1) - (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

Donc, si l'on suppose $n$ égal ou supérieur à 4, en conservant aux trois lettres $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ les significations qu'on leur a données précédemment (26 et 29), on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La probabilité $\pi$ pour qu'une permutation déterminée des $n$ premiers nombres change d'espèce lorsque l'on y échange entre eux deux éléments pris au hasard est donnée par la formule*

$$\pi = \frac{4(n-1) - 2(\alpha + \beta) + 2\varepsilon}{n(n-1)}.$$

36. Appliquons ce théorème aux trois permutations des neuf premiers nombres

$$2\ 4\ 7\ 1\ 8\ 3\ 9\ 5\ 6,$$
$$1\ 3\ 5\ 6\ 9\ 7\ 8\ 2\ 4,$$
$$2\ 3\ 6\ 5\ 4\ 7\ 8\ 1\ 9.$$

Dans la première,

$$n = 9, \qquad \alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad \varepsilon = 0;$$

la probabilité est égale à $\frac{13}{36}$.

Dans la deuxième,

$$n = 9, \qquad \alpha = 2, \qquad \beta = 2, \qquad \varepsilon = 0;$$

la probabilité est $\frac{1}{3}$.

Dans la troisième,

$$n = 9, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 8, \qquad \varepsilon = 2;$$

la probabilité est $\frac{1}{4}$.

37. On voit sur ces exemples, comme sur la formule (35), qu'il correspond, aux diverses permutations des $n$ premiers nombres, des probabilités qui peuvent avoir des valeurs très différentes. On est conduit par là à se demander quelles sont, pour ces permutations des $n$ premiers nombres, la valeur maxima et la valeur minima que puisse prendre la probabilité cherchée.

Or, si l'on considère l'expression de cette probabilité, on constate que son dénominateur, ne dépendant que de $n$, est le même pour toutes les permutations considérées. Il suffit donc d'étudier le numérateur. Et comme ce numérateur à son tour peut s'écrire

$$4(n-1) - 2(\alpha + \beta - \varepsilon),$$

il est évidemment d'autant plus grand ou plus petit que le trinome $\alpha + \beta - \varepsilon$ est, au contraire, plus petit ou plus grand.

Ainsi, la recherche du maximum ou du minimum de la probabilité $\pi$ est ramenée à celle du minimum ou du maximum du trinome $\alpha + \beta - \varepsilon$.

Il suit immédiatement de l'examen direct des valeurs simultanément possibles de $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ : que ce trinome est toujours positif; que la plus petite valeur qu'il puisse prendre est 2; et que la plus grande est $2n - 4$. Il s'ensuit aussi que le maximum et le minimum de la probabilité $\pi$ sont donnés respectivement par les expressions

$$\frac{4(n-2)}{n(n-1)}, \qquad \frac{4}{n(n-1)},$$

dont la première vaut $n - 2$ fois la seconde.

38. Dans le cas particulier où $n$ est égal à 9, on trouve, pour le maximum et le minimum respectifs,

$$\frac{7}{18} \quad \text{et} \quad \frac{1}{18}.$$

Les probabilités qu'on a obtenues dans les exemples précédents tombent toutes les trois entre ces valeurs limites. On peut donner des exemples où la probabilité ait pour valeur soit le maximum soit le minimum qu'on vient de calculer.

Considérons, en effet, ces deux nouvelles permutations des neuf premiers nombres

$$3\ 4\ 5\ 1\ 6\ 2\ 7\ 9\ 8,$$
$$1\ 8\ 3\ 5\ 7\ 6\ 4\ 9\ 2.$$

Dans la première,

$$n = 9, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \varepsilon = 0;$$

la probabilité atteint $\frac{7}{18}$, c'est-à-dire la valeur maxima. Dans la seconde,

$$n = 9, \qquad \alpha = 7, \qquad \beta = 7, \qquad \varepsilon = 0;$$

la probabilité se réduit à $\frac{1}{18}$, c'est-à-dire à la valeur minima.

**39. Revenons à la formule (35) qui nous a donné la probabilité cherchée $\pi$ : elle ne suppose connus que les quatre nombres $n$, $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$. La probabilité que nous étudions est donc absolument déterminée dès que l'on connaît le nombre des éléments de la permutation considérée, ses deux éléments initiaux et ses deux éléments terminaux. C'est là un résultat qui nous semble remarquable. Peut-être pouvait-on le prévoir après ce que nous avions dit (13) sur le rôle prépondérant que jouent, dans les questions**

d'espèces, les deux éléments initiaux et les deux éléments terminaux.

40. Quoi qu'il en soit, le théorème qui précède (35) résout complètement la question de probabilité que nous nous étions posée (33), sauf dans le cas où $n$ est égal à 2, et dans celui où il est égal à 3.

Dans chacun de ces cas, nos raisonnements sont en défaut et nos notations perdent leur sens. Mais il suffit, soit de se rappeler ce que nous avons dit (31) sur les permutations de deux et sur celles de trois éléments, soit de procéder à un examen direct de ces permutations pour arriver très facilement aux deux résultats suivants :

1° *En toute permutation des 2 premiers nombres, la probabilité cherchée est nulle;*

2° *En toute permutation des 3 premiers nombres, cette probabilité est égale au tiers de la différence, prise en valeur absolue, du premier et du dernier élément de la permutation.*

## CHAPITRE II.

### DES COUPLES ACTIFS DANS L'ENSEMBLE DES PERMUTATIONS ORDONNÉES.

#### I. — *Les trois sortes de permutations.*

41. Pour simplifier l'étude des couples actifs dans les permutations des $n$ premiers nombres, $n$ étant au moins égal à 4, rappelons-nous que le nombre $\gamma$ des couples actifs d'une quelconque de ces permutations dépend seulement des valeurs qu'y présentent $\alpha$, $\beta$ et $\varepsilon$. *A fortiori*, ce nombre $\gamma$ est-il déterminé lorsque l'on connaît, dans cette permutation, les deux éléments initiaux et les deux éléments terminaux ?

Nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, par $a$ le plus petit des éléments initiaux et par A le plus grand; par $b$ le plus petit des éléments terminaux et par B le plus grand.

42. Les permutations, très nombreuses, où les éléments initiaux et les éléments terminaux ont les mêmes valeurs détermi-

nées $a$ et A, $b$ et B, contiennent chacune le même nombre de couples actifs. Mais combien existe-t-il de ces permutations ?

On les obtient évidemment toutes en écrivant, dans tous les ordres possibles, d'abord les deux éléments initiaux $a$ et A, ensuite les $n - 4$ éléments intermédiaires; enfin les deux éléments terminaux $b$ et B. Le nombre total de ces permutations est donc $2!(n-4)!2!$, c'est-à-dire $(n-4)!4$.

Pour savoir combien ces permutations, toutes ensemble, contiennent de couples actifs, il nous suffira donc de multiplier par $(n-4)!4$ le nombre des couples actifs contenus dans l'une quelconque de ces permutations.

**43.** Nous sommes ainsi ramenés à étudier, à la place des permutations considérées, les *quaternes* formés par leurs éléments extrêmes $a$, A, $b$, B. La première chose à faire, c'est de trouver le nombre de ces quaternes; la seconde, de les classer.

**44.** Un quaterne quelconque n'est autre chose qu'un système de quatre nombres pris parmi les $n$ premiers; mais, à un même système de quatre nombres, correspondent toujours six quaternes différents.

Supposons, en effet, ces quatre nombres mis, à la suite les uns des autres, dans l'ordre croissant; et, au-dessous de chacun d'eux, écrivons celle des lettres $a$, A, $b$, B qui répond au rôle qu'il joue dans la permutation. Après les avoir ainsi écrites, de toutes les manières possibles, ces quatre lettres nous présenteront six dispositions différentes, ni plus ni moins, qui sont les suivantes :

$$aAbB,\quad abAB,\quad abBA,$$
$$bBaA,\quad baBA,\quad baAB;$$

et, à ces six dispositions, correspondront six quaternes différents.

Le nombre total des quaternes est donc égal au sextuple du nombre des combinaisons simples de $n$ éléments 4 à 4, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

On peut vérifier en passant que le produit du nombre des quaternes par celui des permutations correspondant à l'un quelconque d'entre eux est bien égal à $n!$, c'est-à-dire au nombre total des permutations de $n$ éléments.

45. Pour classer les quaternes que nous venons d'énumérer (44), considérons les six quaternes qui correspondent à un même groupe de quatre nombres. Ils répondent, nous venons de le voir (44), à ces six dispositions

$$aAbB,\quad abAB,\quad abBA,$$
$$bBaA,\quad baBA,\quad baAB,$$

lesquelles, à la manière dont nous les avons écrites, se partagent évidemment en trois couples.

Dans chacun des quaternes $aAbB$, $bBaA$ du premier couple, $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 2 ; donc $\varepsilon$ est égal à zéro.

Dans chacun des quaternes $abAB$, $baBA$ du deuxième couple, $i$ et $j$ sont l'un et l'autre égaux à 1 ; donc $\varepsilon$ est encore égal à zéro.

Dans chacun des quaternes $abBA$, $baAB$ du troisième couple, $i$ et $j$ sont égaux l'un à 0, l'autre à 2 ; et, par conséquent, $\varepsilon$ est égal à 2.

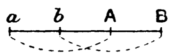
Ces trois couples correspondent donc aux trois cas que nous avons distingués déjà (29) ; les quaternes, pris tous ensemble, peuvent donc se partager en trois sortes, caractérisées chacune par le système correspondant des valeurs de $i$, $j$ et $\varepsilon$.

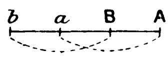
46. Ces trois sortes de quaternes peuvent être caractérisés d'une façon encore plus nette, et pour ainsi dire géométrique. Considérons, en effet, les quatre nombres $a$, A, $b$, B ; écrivons-les sur une même droite dans leur ordre de grandeurs croissantes ; puis, marquons par un trait le segment $aA$, et, par un autre, le segment $bB$.

Les deux quaternes $aAbB$, $bBaA$ du premier nous donnent ainsi les deux figures


où les segments $aA$, $bB$ sont *séparés*.

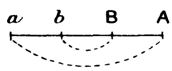
Les deux quaternes $abAB$, $baBA$ du deuxième couple nous donnent de même les deux figures

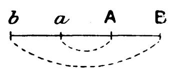



où les segments $aA$, $bB$ empiètent l'un sur l'autre, c'est-à-dire sont *imbriqués*.

Les deux quaternes $abBA$, $baAB$ du troisième couple nous donnent enfin les deux figures




où les segments $aA$, $bB$ sont placés l'un sur l'autre, c'est-à-dire *superposés*.

Nous pouvons donc dire que nos quaternes se partagent en trois sortes :

1° Les quaternes à *segments séparés;*
2° Les quaternes à *segments imbriqués;*
3° Les quaternes à *segments superposés.*

47. Étendant aux permutations des $n$ premiers nombres ce que nous venons de dire (46) relativement aux quaternes qui leur correspondent, nous dirons que ces permutations sont à segments séparés, imbriqués, superposés, suivant que leurs quaternes sont eux-mêmes à segments séparés, imbriqués, superposés. Nous partagerons donc ces permutations en trois sortes :

1° Les permutations à *segments séparés;*
2° Les permutations à *segments imbriqués;*
3° Les permutations à *segments superposés.*

48. Considérons un système quelconque de quatre nombres pris parmi les $n$ premiers nombres entiers. Ce système nous fournit, comme on l'a vu (46), deux quaternes à segments séparés, deux à segments imbriqués, deux à segments superposés. Or, le nombre des systèmes de quatre éléments, pris parmi les $n$ premiers nombres entiers, est le nombre $C_n^4$ des combinaisons simples de $n$ objets 4 à 4. Donc, il y a $2C_n^4$ quaternes à segments

séparés, $2C_n^4$ à segments imbriqués et $2C_n^4$ à segments superposés.

Pour obtenir le nombre des permutations de $n$ éléments à segments soit séparés, soit imbriqués, soit superposés, il nous suffit donc de multiplier dans chaque cas $(n-4)!4$ par $2C_n^4$. Le produit est donc toujours égal à $(n-4)!4.2C_n^4$, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}n!$. De là ce théorème :

THÉORÈME. — *Si l'on partage les permutations de n éléments en trois sortes : permutations à segments séparés, permutations à segments imbriqués, permutations à segments superposés; dans chacune de ces trois sortes, il y a le même nombre de permutations.*

49. Tout ce qui précède évidemment suppose $n$ égal ou supérieur à 4. Si $n$ était égal soit à 2, soit à 3, la permutation ne présenterait plus de quaterne : on n'aurait plus à considérer ni figure, ni segments.

### II. — *Premières expressions des nombres* $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$.

50. Toutes les permutations répondant à un même quaterne présentent, avons-nous dit (42), le même nombre de couples actifs. Dans les recherches relatives au nombre de ces couples, il nous suffira donc de considérer l'une quelconque de ces permutations.

Pour préciser et faciliter le langage, nous considérerons uniquement celle de ces permutations où se trouvent placés, dans l'ordre des grandeurs croissantes : 1° les deux éléments initiaux; 2° les $n-4$ éléments intermédiaires; 3° les deux éléments terminaux. Cette permutation unique sera pour nous une *permutation ordonnée*.

Évidemment, dans l'ensemble de toutes les permutations de $n$ éléments, les permutations ordonnées et les quaternes se correspondent chacune à chacun : ils sont en même nombre.

51. D'après ce que nous avons dit précédemment (42), pour savoir combien il y a de couples actifs dans l'ensemble des permutations répondant à un même quaterne, il nous suffit de multi-

plier par $(n-4)!4$ le nombre des couples actifs contenus dans la permutation ordonnée correspondant à ce quaterne. Et comme ce facteur $(n-4)!4$ est le même pour tous les quaternes (42), il nous suffit, pour trouver le nombre des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations de chaque sorte, de déterminer, pour chacune de ces sortes, le nombre des couples actifs contenus dans ses seules permutations ordonnées.

C'est ce que nous allons faire dans le présent paragraphe, en supposant le nombre des éléments égal à $n$, et en désignant par $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$ les nombres des couples actifs contenus respectivement d'abord dans les permutations ordonnées à segments séparés, ensuite dans les permutations ordonnées à segments imbriqués, enfin dans les permutations ordonnées à segments superposés.

52. En toute permutation ordonnée à segments séparés, le nombre $\varepsilon$ est nul (45); et, par conséquent, le nombre des couples actifs est égal, à

$$2(n-1)-\alpha-\beta,$$

c'est-à-dire, si l'on remplace $\alpha$ et $\beta$ par les différences (26) qu'ils représentent, à

$$2(n-1)-(A-a)-(B-b).$$

Pour obtenir le nombre $\varphi_n$ des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées de $n$ éléments à segments séparés, nous avons donc à faire la somme de toutes les valeurs numériques que prend cette expression, lorsque l'on y remplace les lettres dont elle se compose successivement par tous les systèmes de valeurs correspondant aux différents quaternes à segments séparés, c'est-à-dire aux différents quaternes de la forme $aAbB$ et aux différents quaternes de la forme $bBaA$.

Dans les systèmes de valeurs correspondant à la forme $aAbB$, on peut donner à $a$ toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-3$; ensuite à A toutes les valeurs $a+1, a+2, a+3, \ldots, n-2$; ensuite à $b$ toutes les valeurs $A+1, A+2, A+3, \ldots, n-1$; enfin à B toutes les valeurs $b+1, b+2, b+3, \ldots, n$. Le nombre des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées de $n$ éléments, à segments séparés, dont le quaterne a la forme $aAbB$, est donc

$$\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{A=a+1}^{A=n-2}\ \sum_{b=A+1}^{b=n-1}\ \sum_{B=b+1}^{B=n} [2(n-1)-(A-a)-(B-b)].$$

En raisonnant de même sur les permutations ordonnées de $n$ éléments, à segments séparés, dont le quaterne a la forme $bBaA$, on trouverait que le nombre des couples actifs qu'elles contiennent est égal à

$$\sum_{b=1}^{b=n-3}\ \sum_{B=b+1}^{B=n-2}\ \sum_{a=B+1}^{a=n-1}\ \sum_{A=a+1}^{A=n} [2(n-1)-(A-a)-(B-b)].$$

Mais cette expression et la précédente ne diffèrent l'une de l'autre que par l'échange des lettres $a$ et $b$, A et B. Donc, évidemment, si l'on effectuait les calculs indiqués, on arriverait à la même fonction de $n$; donc ces deux expressions sont équivalentes; donc le nombre $\varphi_n$ défini plus haut (51) est le double de l'une quelconque des deux, de la première, par exemple; et l'on peut écrire

$$\varphi_n = 2\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{A=a+1}^{A=n-2}\ \sum_{b=A+1}^{b=n-1}\ \sum_{B=b+1}^{B=n} [2(n-1)+a-A+b-B],$$

en plaçant, dans le crochet, les nombres $a$, A, $b$, B dans l'ordre des grandeurs croissantes.

53. En toute permutation ordonnée de $n$ éléments, à segments imbriqués, le nombre $\varepsilon$ est encore nul (45). Par conséquent, le nombre des couples actifs est égal à

$$2(n-1)-\alpha-\beta,$$

c'est-à-dire à

$$2(n-1)-(A-a)-(B-b).$$

Ces permutations correspondent aux différents quaternes à segments imbriqués, c'est-à-dire aux quaternes de la forme $abAB$ et à ceux de la forme $baBA$. Pour obtenir le nombre des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations ordonnées de $n$ éléments, à segments imbriqués, il nous faut donc faire la somme de toutes les valeurs numériques de l'expression précédente qui correspondent aux quaternes de ces deux formes. En suivant la méthode employée précédemment (52), on trouve que le nombre des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments imbriqués, dont le quaterne a la forme $ab$AB, est égal à

$$\sum_{a=1}^{a=n-3}\sum_{b=a+1}^{b=n-2}\sum_{A=b+1}^{A=n-1}\sum_{B=A+1}^{B=n}[2(n-1)-(A-a)-(B-b)];$$

et que, pour celles dont le quaterne a la forme $ba$BA, ce nombre des couples actifs est égal à

$$\sum_{b=1}^{b=n-3}\sum_{a=b+1}^{a=n-2}\sum_{B=a+1}^{B=n-1}\sum_{A=B+1}^{A=n}[2(n-1)-(A-a)-(B-b)].$$

Il suffit de comparer ces deux expressions pour reconnaître qu'elles sont équivalentes. Le nombre $\chi_n$ des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments imbriqués, de $n$ éléments est donc le double de l'une quelconque des deux. Nous pouvons donc écrire

$$\chi_n = 2\sum_{a=1}^{a=n-3}\sum_{b=a+1}^{b=n-2}\sum_{A=b+1}^{A=n-1}\sum_{B=A+1}^{B=n}[2(n-1)+a+b-A-B],$$

en plaçant, dans le crochet, les nombres $a$, $b$, A, B dans l'ordre des valeurs croissantes.

54. Considérons enfin les permutations de $n$ éléments, ordonnées et à segments superposés. Dans chacune d'elles, $\varepsilon$ est égal à 2; et le nombre des couples actifs est, par conséquent, égal à

$$2n-\alpha-\beta,$$

c'est-à-dire à

$$2n-(A-a)-(B-b).$$

Or, ces permutations ordonnées correspondent aux quaternes à éléments superposés, c'est-à-dire à tous les quaternes de l'une ou de l'autre des deux formes $ab$BA, $ba$AB.

Il nous faut donc, pour obtenir le nombre $\psi_n$ des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments superposés, calculer la somme de toutes les valeurs de l'expression précédente qui correspondent aux quaternes de ces deux formes.

En appliquant encore le même procédé que pour les permutations ordonnées à segments séparés (52), on trouve que le nombre des couples actifs contenus dans les permutations ordonnées, à segments superposés, dont le quaterne a la forme $ab$BA, est égal à

$$\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{b=a+1}^{b=n-2}\ \sum_{\mathrm{B}=b+1}^{\mathrm{B}=n-1}\ \sum_{\mathrm{A}=\mathrm{B}+1}^{\mathrm{A}=n} [2n-(\mathrm{A}-a)-(\mathrm{B}-b)];$$

et que le nombre des couples actifs contenus dans celles dont le quaterne a la forme $ba$AB est égal à

$$\sum_{b=1}^{b=n-3}\ \sum_{a=b+1}^{a=n-2}\ \sum_{\mathrm{A}=a+1}^{\mathrm{A}=n-1}\ \sum_{\mathrm{B}=\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}=n} [2n-(\mathrm{A}-a)-(\mathrm{B}-b)].$$

Ces deux expressions, évidemment, sont équivalentes. Le nombre $\psi_n$ des couples actifs contenus dans l'ensemble des permutations ordonnées, à segments superposés, de $n$ éléments, est donc le double de l'une quelconque des deux. Nous pouvons donc écrire

$$\psi_n = 2\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{b=a+1}^{b=n-2}\ \sum_{\mathrm{B}=b+1}^{\mathrm{B}=n-1}\ \sum_{\mathrm{A}=\mathrm{B}+1}^{\mathrm{A}=n} [2n+a+b-\mathrm{B}-\mathrm{A}],$$

en disposant toujours, dans le crochet, les nombres $a$, $b$, B, A dans l'ordre des grandeurs croissantes.

### III. — *Expressions finales des nombres* $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$.

55. Le calcul des expressions que nous venons de trouver pour $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$ ne laisse pas que d'être long et pénible. Pour arriver à l'abréger et à le faciliter, rapprochons ces trois expressions. Nous obtenons ce Tableau

$$\varphi_n = 2\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{\mathrm{A}=a+1}^{\mathrm{A}=n-2}\ \sum_{b=\mathrm{A}+1}^{b=n-1}\ \sum_{\mathrm{B}=b+1}^{\mathrm{B}=n} [2(n-1)+a-\mathrm{A}+b-\mathrm{B}],$$

$$\chi_n = 2\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{b=a+1}^{b=n-2}\ \sum_{\mathrm{A}=b+1}^{\mathrm{A}=n-1}\ \sum_{\mathrm{B}=\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}=n} [2(n-1)+a+b-\mathrm{A}-\mathrm{B}],$$

$$\psi_n = 2\sum_{a=1}^{a=n-3}\ \sum_{b=a+1}^{b=n-2}\ \sum_{\mathrm{B}=b+1}^{\mathrm{B}=n-1}\ \sum_{\mathrm{A}=\mathrm{B}+1}^{\mathrm{A}=n} [2n+a+b-\mathrm{B}-\mathrm{A}];$$

et nous voyons immédiatement que $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$ ne sont autres choses que des cas particuliers de la quantité $\omega_n$ définie par l'égalité

$$\omega_n = 2 \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} (d + ev + fx + gy + hz),$$

dans laquelle $v$, $x$, $y$, $z$ représentent des entiers variables, et $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ des coefficients constants.

Pour tirer, en effet, de cette dernière expression, chacune des trois expressions précédentes, il suffit, sans changer les noms des entiers variables, noms qui n'influent nullement sur les résultats du calcul, de donner des valeurs numériques convenables aux cinq coefficients constants.

56. Nous sommes donc ramenés à nous occuper de $\omega_n$ seulement. Or, cette expression, à son tour, est évidemment la somme des cinq expressions qui correspondent respectivement aux cinq termes de son polynome entre parenthèses. Nous avons donc

$$\omega_n = D_n + E_n + F_n + G_n + H_n,$$

si nous posons

$$D_n = 2d \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} 1,$$

$$E_n = 2e \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} v,$$

$$F_n = 2f \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} x,$$

$$G_n = 2g \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} y,$$

$$H_n = 2h \sum_{v=1}^{v=n-3} \sum_{x=v+1}^{x=n-2} \sum_{y=x+1}^{y=n-1} \sum_{z=y+1}^{z=n} z;$$

et nous n'avons plus qu'à déterminer, en fonction de $n$, les expressions des cinq nombres $D_n$, $E_n$, $F_n$, $G_n$, $H_n$.

57. Pour opérer ces déterminations, le procédé le plus simple

consiste à effectuer, dans chaque cas, les calculs indiqués, en s'aidant des propriétés des nombres figurés, c'est-à-dire des nombres composant le triangle de Pascal. On arrive, par ce moyen, à ces cinq résultats :

$$D_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 2d,$$

$$E_n = 1\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 2e,$$

$$F_n = 2\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} 2f,$$

$$G_n = 3\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} 2g,$$

$$H_n = 4\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} 2h.$$

Ces résultats présentent cette particularité remarquable : le premier contient en facteur le nombre des combinaisons simples de $n$ objets 4 à 4 ; et chacun des suivants, celui des combinaisons simples, 5 à 5, de $n+1$ objets.

58. Quoi qu'il en soit, il nous suffit de faire la somme de ces cinq résultats pour obtenir l'expression de $\varpi_n$ en fonction de $n$. En effectuant ce calcul, nous trouvons immédiatement

$$\omega_n = 2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left[d + \frac{n+1}{5}(e+2f+3g+4h)\right];$$

et cette égalité constitue la formule générale qui va nous donner, en fonction de $n$, les expressions des trois nombres $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$.

59. Pour en déduire $\varphi_n$, il faut, dans le crochet que nous présente $\omega_n$, donner aux coefficients

$$d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h,$$

les valeurs respectives

$$2(n-1), \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1.$$

Pour en déduire $\chi_n$, il y faut donner, aux mêmes coefficients, les valeurs respectives

$$2(n-1), \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1.$$

Enfin, pour en déduire $\psi_n$, il y faut donner, aux mêmes coefficients encore, les valeurs respectives

$$2n, \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1.$$

En effectuant ces diverses substitutions, on arrive, après quelques réductions simples, à ces trois résultats :

$$\varphi_n = \frac{4n-6}{30} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\chi_n = \frac{3n-7}{30} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\psi_n = \frac{3n-2}{30} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Ces trois résultats sont analogues, mais différents. Il n'existe même qu'un seul nombre, supérieur à 3, qui, mis à la place de $n$, rende deux d'entre eux numériquement égaux : c'est le nombre 4, qui rend $\varphi_n$ et $\psi_n$ égaux chacun à 8.

## CHAPITRE III.

### DES COUPLES ACTIFS DANS L'ENSEMBLE COMPLET DES PERMUTATIONS.

I. — *Nombre des couples actifs dans chaque sorte de permutations.*

**60.** Dans le Chapitre qui précède (Chap. II), nous avons considéré les permutations ordonnées de $n$ éléments; désigné par $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$ les nombres des couples actifs contenus respectivement dans celles de ces permutations ordonnées qui sont à segments séparés, à segments imbriqués, à segments superposés; déterminé enfin, en fonction de $n$, les expressions de ces trois nombres.

Partant de ces trois expressions, nous allons calculer maintenant les *nombres totaux* des couples actifs contenus, non plus dans les seules permutations ordonnées, mais dans toutes les permutations de chaque sorte. Nous calculerons ensuite, pour chacune de ces sortes, le *nombre moyen* des couples actifs contenus dans une permutation.

**61.** D'après ce que nous avons vu précédemment (51), quand on sait le nombre des couples actifs contenus dans toutes les permutations ordonnées d'une sorte quelconque, il suffit de multiplier ce nombre par $(n-4)!4$ pour obtenir le *nombre total* des couples actifs contenus dans toutes les permutations de cette sorte. Si donc nous désignons par $\Phi_n$, $X_n$, $\Psi_n$ les nombres totaux des couples actifs contenus respectivement dans les permutations de $n$ éléments à segments séparés, à segments imbriqués, à segments superposés, nous avons immédiatement

$$\Phi_n = (n-4)!4\varphi_n,$$
$$X_n = (n-4)!4\chi_n,$$
$$\Psi_n = (n-4)!4\psi_n.$$

En effectuant les calculs indiqués, nous arrivons à ces trois théorèmes :

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments à segments séparés, le nombre total $\Phi_n$ des couples actifs est donné par la formule*

$$\Phi_n = \frac{2}{15} n!(4n-6).$$

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments à segments imbriqués, le nombre total $X_n$ des couples actifs est donné par la formule*

$$X_n = \frac{2}{15} n!(3n-7).$$

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments à segments superposés, le nombre total $\Psi_n$ des couples actifs est donné par la formule*

$$\Psi_n = \frac{2}{15} n!(3n-2).$$

**62.** Tels sont, pour les trois sortes de permutations, les nombres totaux des couples actifs. De même que les nombres $\varphi_n$, $\chi_n$, $\psi_n$, ces nombres totaux $\Phi_n$, $X_n$, $\Psi_n$ ne diffèrent entre eux que par les binomes $4n-6$, $3n-7$, $3n-2$ qui en terminent les expressions : ils sont proportionnels à ces binomes.

D'ailleurs, d'après tout ce qui précède, les formules (61) qui les donnent ne sont valables, et même n'ont de sens, que quand $n$ est égal ou supérieur à 4. Lorsque $n$ est précisément égal à 4, les nombres totaux $\Phi_n$ et $\Psi_n$ sont égaux entre eux et supérieurs à $X_n$.

Lorsque $n$ est supérieur à 4, on a toujours cette double inégalité

$$\Phi_n > \Psi_n > X_n,$$

et l'on voit ainsi que, quand $n$ dépasse 4, c'est toujours dans les permutations à segments séparés qu'on rencontre le plus de couples actifs, dans les permutations à segments imbriqués qu'on en rencontre le moins.

63. Connaissant pour chaque sorte de permutations le nombre total des couples actifs, nous n'aurons, pour obtenir le *nombre moyen* correspondant, qu'à diviser ce nombre total des couples actifs par le nombre des permutations de cette sorte. Or, nous l'avons fait remarquer (48), ce nombre des permutations a la même valeur $\frac{1}{3}n!$ dans les trois sortes de permutations.

En divisant par $\frac{1}{3}n!$, nous arrivons à ces trois théorèmes :

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments à segments séparés, le nombre moyen $K_n$ des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$K_n = \frac{2}{5}(4n - 6).$$

Théorème. — *Dans les permutations à segments imbriqués, le nombre moyen $L_n$ des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$L_n = \frac{2}{5}(3n - 7).$$

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments à segments superposés, le nombre moyen $M_n$ des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$M_n = \frac{2}{5}(3n - 2).$$

64. Ces nombres moyens, on le voit, sont, comme les nombres totaux (61), proportionnels aux binomes considérés déjà, c'est-à-dire aux trois binomes

$$4n - 6, \quad 3n - 7, \quad 3n - 2.$$

Si l'on désigne par $k_n$, $l_n$, $m_n$ les rapports respectifs des nombres moyens $K_n$, $L_n$, $M_n$ au nombre $n$ des éléments de chaque permutation, on trouve les trois égalités

$$k_n = \frac{2}{5}\left(4 - \frac{6}{n}\right),$$

$$l_n = \frac{2}{5}\left(3 - \frac{7}{n}\right);$$

$$m_n = \frac{2}{5}\left(8 - \frac{2}{n}\right);$$

et l'on voit que ces rapports, lorsque $n$ croît indéfiniment, ont pour limites respectives

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{6}{5},$$

c'est-à-dire trois fractions plus grandes que 1, dont les deux dernières sont égales entre elles.

### II. — *Nombre des couples actifs dans l'ensemble complet des permutations.*

65. Nous allons considérer maintenant l'*ensemble complet des permutations* de $n$ éléments, sans plus avoir aucun égard aux trois sortes en lesquelles nous les avons partagées. Nous déterminerons le *nombre total* des couples actifs contenus dans cet ensemble; puis nous en déduirons, pour une permutation, le *nombre moyen* de ces couples.

66. Si nous désignons par $\Theta_n$ le *nombre total* des couples actifs contenus dans toutes ces permutations, nous avons évidemment

$$\Theta_n = \Phi_n + X_n + \Psi_n.$$

Or, dans cette égalité, les trois termes placés au second membre nous sont connus (61). Nous n'avons donc, pour obtenir $\Theta_n$ en fonction de $n$, qu'à remplacer ces trois termes par leurs expressions respectives, puis à effectuer l'addition indiquée. En opérant ainsi, nous arrivons à ce résultat :

Théorème. — *Dans l'ensemble complet des permutations de n éléments, le nombre total $\Theta_n$ des couples actifs est donné* *par la formule*

$$\Theta_n = \frac{2}{3}\, n!\,(2n - 3).$$

67. Cette formule, on le voit, est un peu plus simple que celles (61) qui nous ont donné $\Phi_n$, $X_n$, $\Psi_n$. Il est évident, d'après la façon même dont nous l'avons obtenue, qu'elle suppose encore $n$ égal ou supérieur à 4, et qu'elle ne subsiste ni pour la valeur 2, ni pour la valeur 3.

A l'aide d'un examen direct, on peut constater que, dans les permutations de deux éléments, il n'y a aucun couple actif; et que, dans les permutations de trois éléments, il y a huit de ces couples.

Quoi qu'il en soit, on voit sur son expression même (66) que ce nombre total $\Theta_n$ croît en même temps que l'entier $n$, d'une manière extrêmement rapide.

68. Pour obtenir le *nombre moyen* $T_n$ des couples actifs d'une permutation de $n$ éléments, nous n'avons qu'à diviser le nombre total $\Theta_n$ de ces couples par le nombre total $n!$ de ces permutations. Nous arrivons par là à ce théorème :

Théorème. — *Dans les permutations de n éléments, le nombre moyen* $T_n$ *des couples actifs d'une permutation est donné par la formule*

$$T_n = \frac{2}{3}(2n - 3).$$

Et cette formule suppose toujours que $n$ soit au moins égal à 4.

Au reste, d'après ce que nous avons vu plus haut (31), lorsque $n$ est égal à 2, ce nombre moyen est nul; lorsque $n$ est égal à 3, ce nombre moyen est égal à $\frac{4}{3}$.

69. Désignons par $t_n$ le rapport du nombre moyen $T_n$ des couples actifs d'une permutation au nombre $n$ des éléments de cette permutation. Nous avons immédiatement

$$t_n = \frac{2}{3}\left(2 - \frac{3}{n}\right);$$

et nous voyons que, quand $n$ croît indéfiniment, ce rapport tend vers la limite $\frac{4}{3}$.

Ce résultat nous en rappelle aussitôt un autre, fort analogue, relatif aux séquences. Nous voulons parler du célèbre théorème de Bienaymé ([1]) d'après lequel, lorsque $n$ croît indéfiniment, le rapport du nombre moyen des séquences d'une permutation de $n$ éléments au nombre $n$ des éléments de cette permutation tend vers la limite $\frac{2}{3}$.

Pour le rapport relatif aux couples actifs, la limite est donc juste le *double* de ce qu'elle est pour le rapport relatif aux séquences.

70. Ce n'est point là le seul rapprochement qu'on puisse faire entre la théorie des couples actifs et la théorie des séquences. L'un des plus intéressants est celui qui consiste à comparer le nombre moyen des séquences au nombre moyen des couples actifs.

Désignons comme précédemment (68) par $T_n$ le nombre moyen des couples actifs dans les permutations de $n$ éléments, et appelons $S_n$ le nombre moyen des séquences dans les mêmes permutations. D'après ce que nous venons de voir (68)

$$T_n = \frac{2}{3}(2n-3);$$

d'après ce que j'ai démontré autrefois ([2])

$$S_n = \frac{1}{3}(2n-1).$$

Cela étant, si nous retranchons le premier de ces nombres moyens du double du second, nous trouvons

$$2S_n - T_n = \frac{4}{3}.$$

Par conséquent :

---

([1]) *Académie des Sciences*, séance du 6 septembre 1875.

([2]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, avril 1884.

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments, l'excès du double du nombre moyen des séquences sur le nombre moyen des couples actifs est indépendant de $n$ et égal à* $\frac{4}{3}$.

De même, si nous divisons $T_n$ par $2 S_n$, nous trouvons

$$\frac{T_n}{2 S_n} = \frac{2n-3}{2n-1};$$

et comme, dans cette égalité, lorsque $n$ croît indéfiniment, le rapport qui figure au second membre tend vers l'unité, nous pouvons énoncer cette nouvelle proposition :

Théorème. — *Dans les permutations de $n$ éléments, lorsque $n$ croît au delà de toute limite, le double du nombre moyens des séquences et le nombre moyen même des couples actifs sont deux infiniment grands équivalents, c'est-à-dire deux infiniment grands dont le rapport tend vers l'unité.*

### III. — *Nouveaux problèmes de probabilité.*

71. Dans ce dernier paragraphe, nous allons nous poser différents problèmes de probabilité, relativement aux couples actifs des permutations de $n$ éléments. Nous résoudrons tous ces problèmes en nous aidant des résultats que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents. D'ailleurs, nous supposerons toujours que $n$ soit égal ou supérieur à 4.

72. Problème I. — *Dans le système des permutations de $n$ éléments, à segments séparés, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif?*

Le nombre des cas favorables est évidemment le nombre total $\Phi_n$ des couples actifs contenus dans le système des permutations de $n$ éléments, à segments séparés. Il est donc (61) égal à

$$\frac{2}{15} n!(4n-6).$$

Dans chacune des permutations considérées, le nombre des couples quelconques n'est autre chose que le nombre des combinaisons simples de $n$ objets 2 à 2, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}n(n-1)$. Le nombre des permutations de $n$ éléments, à segments séparés, n'est autre chose (48) que $\frac{1}{3}n!$. Donc le nombre des cas possibles est égal à

$$\frac{1}{6}n!\,n(n-1).$$

En divisant le nombre des cas favorables par celui des cas possibles, nous obtenons la probabilité cherchée. Si nous la désignons par $\xi_n$, nous trouvons, toutes réductions faites,

$$\xi_n = \frac{4}{5}\,\frac{4n-6}{n(n-1)}.$$

73. Problème II. — *Dans le système des permutations de n éléments, à segments imbriqués, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif?*

Le nombre des cas favorables est évidemment égal à $X_n$, c'est-à-dire (61) à

$$\frac{2}{15}n!(3n-7).$$

Le nombre des cas possibles est le même que dans le problème précédent (72); il est donc

$$\frac{1}{6}n!\,n(n-1).$$

La probabilité cherchée $\eta_n$, qui est le quotient du premier de ces nombres par le second, nous est donc donnée par la formule

$$\eta_n = \frac{4}{5}\,\frac{3n-7}{n(n-1)}.$$

74. Problème III. — *Dans le système des permutations de n éléments, à segments superposés, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif?*

Le nombre des cas favorables est évidemment égal à $\Psi_n$, c'est-à-dire (61) à

$$\frac{2}{15} n!(3n-2).$$

Le nombre des cas possibles est toujours

$$\frac{1}{6} n! n(n-1).$$

La probabilité cherchée $\zeta_n$ nous est donc donnée par la formule

$$\zeta_n = \frac{4}{5} \frac{3n-2}{n(n-1)}.$$

75. Sur les expressions que l'on vient de trouver pour $\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$, on voit immédiatement que, lorsque $n$ croît au delà de toute limite, ces probabilités tendent toutes les trois vers zéro.

On peut voir aussi très facilement qu'elles décroissent toutes lorsque l'entier $n$ va en augmentant à partir de 4. Pour cette première valeur de $n$, ces probabilités ont donc chacune leur valeur maxima. Le calcul nous donne

$$\begin{array}{lll} \xi_4 = \frac{2}{3}, & \eta_4 = \frac{1}{3}, & \zeta_4 = \frac{2}{3}, \\ \xi_5 = \frac{14}{25}, & \eta_5 = \frac{8}{25}, & \zeta_5 = \frac{13}{25}, \\ \dots\dots, & \dots\dots, & \dots\dots \end{array}$$

76. Problème IV. — *Dans l'ensemble complet des permutations de $n$ éléments, on prend, au hasard, deux éléments d'une permutation quelconque. Quelle est la probabilité pour que ces deux éléments forment un couple actif ?*

Le nombre des cas favorables est évidemment le nombre total $\Theta_n$ des couples actifs contenus dans l'ensemble complet des permutations de $n$ éléments. Or, nous l'avons vu (66), ce nombre $\Theta_n$ est égal à

$$\frac{2}{3} n!(2n-3).$$

Dans chacune de ces permutations, on peut prendre autant de couples d'éléments qu'il y a de combinaisons simples de $n$ objets 2 à 2, c'est-à-dire $\frac{1}{2}n(n-1)$. Le nombre total de ces permutations est $n!$. Donc le nombre des cas possibles est égal à

$$\frac{1}{2}n!\,n(n-1).$$

La probabilité cherchée $\tau_n$ nous est donc donnée par la formule

$$\tau_n = \frac{4}{3}\,\frac{2n-3}{n(n-1)}.$$

77. Cette expression de $\tau_n$ nous montre immédiatement que, si $n$ croît au delà de toute limite, $\tau_n$ tend vers zéro.

Elle nous permet aussi de démontrer aisément que, si $n$ croît constamment à partir de 4, cette probabilité $\tau_n$ va constamment en diminuant. Sa valeur maxima se présente donc lorsque $n$ est égal à 4; elle est elle-même égale à $\frac{5}{9}$.

Au reste, toutes ces propriétés de la probabilité $\tau_n$ se déduiraient facilement de celles des probabilités $\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$. Cette probabilité-là est, en effet, liée à celles-ci par l'identité

$$\tau_n = \frac{\xi_n + \eta_n + \zeta_n}{3},$$

laquelle se vérifie sans peine à l'aide du calcul, mais peut aussi s'établir *a priori* par un raisonnement très simple.