BULLETIN DE LA S. M. F.

G. COMBEBIAC

Sur les équations générales de l'élasticité

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 242-247
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__242_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ;

Par M. Combebiac.

Dans une Note publiée récemment dans le *Bulletin* j'ai indiqué les termes qu'il est nécessaire d'introduire dans les équations générales de l'élasticité pour tenir compte des couples extérieurs qui peuvent agir sur les particules d'un corps (couples magnétiques).

Ce cas diffère de celui où ces couples n'existent pas en ce que le déterminant des coefficients qui interviennent dans la détermination des efforts en un point n'est plus symétrique, de sorte que ces coefficients sont au nombre de neuf au lieu de six.

Dans le cas ordinaire, ces six coefficients s'expriment par des relations connues en fonction des six paramètres qui caractérisent la déformation au point considéré, du moins lorsque cette déformation est suffisamment petite, et il y a correspondance univoque entre ces deux systèmes de six quantités, que nous désignerons, pour simplifier le langage, par *la déformation* et *l'état de tension.*

Il y a lieu de se demander ce que devient cette relation dans le cas qui nous occupe.

Dans le cas ordinaire, cette relation peut être obtenue en partant de l'expression de l'énergie élastique ou, plus simplement, de celle du travail élastique dans un déplacement virtuel.

Cherchons donc cette expression dans le cas général (cas où il existe des couples élémentaires).

Chaque élément du corps est soumis, en raison de l'état de tension, à une force et à un couple, dont la grandeur est de l'ordre du volume de l'élément, et il faut observer que dans ce décompte sont compris les efforts qui s'exercent sur la surface extérieure du corps.

Pour avoir l'expression du travail élastique, il suffira de retrancher du travail des forces et des couples relatifs aux éléments de volume, celui des forces superficielles, dont la cause est évidemment extérieure au corps solide.

Soient ξ, η, ζ les composantes suivant les axes de coordonnées du déplacement virtuel d'un point quelconque du corps.

Soient N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, L, M, N, les neuf quantités déterminant, suivant la notation employée dans la Note mentionnée plus haut, l'état de tension au même point.

Soient X_e, Y_e, Z_e les composantes suivant les axes de coordonnées de l'effort par unité de surface exercé en un point de la surface extérieure.

Le travail élastique, pour le déplacement virtuel ξ, η, ζ, a pour expression

$$\delta\mathfrak{T} = \iiint (A\xi + B\eta + C\zeta)\,d\tau + \iiint (2Lp + 2Mq + 2Nr)\,d\tau$$
$$- \iint (X_e\xi + Y_e\eta + Z_e\zeta)\,d\sigma,$$

où $d\tau$ désigne un élément de volume, $d\sigma$ un élément de la surface du corps, et où l'on a posé

$$\begin{aligned}
A &= -\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right),\\
B &= -\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right),\\
C &= -\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right),\\
X_e &= -\ (N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma + M\gamma - N\beta),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),\\
q &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right),\\
r &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Le dernier terme de l'expression de $d\mathfrak{T}$, constitué par une intégrale de surface précédée du signe moins, peut, comme l'on sait, être transformée en une intégrale de volume, savoir :

$$\begin{aligned}
\iiint \Big[& N_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + (T_3 - N)\frac{\partial\xi}{\partial y} + (T_2 + M)\frac{\partial\xi}{\partial z}\\
& + (T_3 + N)\frac{\partial\eta}{\partial x} + N_2\frac{\partial\eta}{\partial y} + (T_1 - L)\frac{\partial\eta}{\partial z}\\
& + (T_2 - M)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + (T_1 + L)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + N_3\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big]\,d\tau\\
& - \iiint (A\xi + B\eta + C\zeta)\,d\tau.
\end{aligned}$$

L'expression de $\delta\mathfrak{T}$ devient

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{T} = \iiint \Big[& N_1\frac{\partial\xi}{\partial x} + N_2\frac{\partial\eta}{\partial y} + N_3\frac{\partial\zeta}{\partial z}\\
& + T_1\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + T_2\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + T_3\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\Big]\,d\tau.
\end{aligned}$$

Cette expression est indépendante de L, M, N, et est la même que dans le cas où L, M, N sont nuls.

Les quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 doivent donc être exprimées de la même manière que dans ce dernier cas en fonction des six paramètres qui caractérisent la déformation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x},\quad \frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \frac{\partial \zeta}{\partial z},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right).$$

La détermination analytique du problème est la même que dans le cas ordinaire.

Les équations du problème sont

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}=\rho(X-J_x)+\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z},\\
&\frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z}=\rho(Y-J_y)+\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x},\\
&\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}=\rho(Z-J_z)+\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y},\\
&N_1\alpha+T_3\beta+T_2\gamma=-X_e+N\beta-M\gamma,\\
&T_3\alpha+N_2\beta+T_1\gamma=-Y_e+L\gamma-N\alpha,\\
&T_2\alpha+T_1\beta+N_3\gamma=-Z_e+M\alpha-L\beta,
\end{aligned}$$

où les trois dernières sont relatives aux points de la surface extérieure.

N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 doivent être exprimées en fonction des six paramètres représentant la déformation ; L, M, N doivent être considérées comme des fonctions données de x, y, z aussi bien sur la surface qu'à l'intérieur du corps.

On peut se rendre compte, dans le cas d'un corps isotrope, que les quantités L, M, N doivent être indépendantes de la déformation ; cela tient à ce qu'il ne peut exister entre un ellipsoïde et *un* vecteur une relation indépendante des déplacements sans déformation, c'est-à-dire ici des rotations autour du centre de l'ellipsoïde.

On le voit par des considérations analogues à celles qui permettent de démontrer que deux quadriques concentriques (par exemple, l'ellipsoïde des dilatations et la quadrique indicatrice de la distribution des efforts en un point) ayant entre elles une relation *géométrique* déterminant l'une par l'autre doivent avoir les mêmes plans principaux et les mêmes plans de sections circulaires (1).

Dans le cas qui nous occupe d'un vecteur déterminé géométriquement par rapport à une quadrique, on démontre facilement que sa direction doit être donnée par un des points de l'infini déterminés comme points de rencontre des cordes communes à la section de la quadrique par le plan de l'infini et au cercle imaginaire de l'infini, c'est-à-dire que cette direction doit être celle de l'un des axes. Mais, comme dans ces conditions la relation ne serait pas invariante dans une permutation des axes de la quadrique, l'on voit qu'elle ne peut pas exister.

Je dois aux indications qui m'ont été obligeamment données par M. Appell depuis la publication de ma première Note, d'avoir pu prendre connaissance de deux écrits ayant trait au même sujet.

M. Love (2), dans son Traité, indique brièvement que, dans le cas où le milieu est soumis à des couples extérieurs élémentaires, il y a lieu de faire intervenir neuf coefficients au lieu de six pour déterminer la distribution des efforts en un point. Cet auteur renvoie d'ailleurs à un Mémoire de M. Larmor.

Ce dernier auteur (3) étudie la propagation des ondes dans un milieu dont chaque élément serait doué, en plus de l'inertie ordinaire, d'une *inertie dirigée,* comme le serait, par exemple, un corps renfermant dans une cavité un gyroscope. Dans ces conditions, un élément en mouvement présente un couple d'inertie, qui intervient dans les formules du mouvement. Ce couple s'exprime en fonction des vitesses et des accélérations.

Un tel milieu n'est autre que le milieu hypothétique de Maxwell, et M. Larmor applique ses propriétés à la théorie de la propagation de la lumière polarisée.

On voit que la question traitée par M. Larmor diffère sensiblement de celle sur laquelle nous nous sommes proposé d'attirer,

(1) *Cf.* APPELL, *Traité de Mécanique,* t. III, p. 508; Paris, Gauthier-Villars; 1901.

(2) LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity* (*Cambridge, University Press,* 1892).

(3) LARMOR, *On the propagation of a disturbance in a gyrostatically medium* (*Proc. Lond. Math. Soc.,* nov. 1891).

par la présente Note, l'attention des mathématiciens : la lumière étant loin d'être faite (le lecteur s'en sera sans doute aperçu) sur les difficultés d'allure paradoxale que présente la détermination de la déformation en chaque point d'un corps soumis à des couples élémentaires extérieurs.