Bulletin de la S. M. F.

A. Auric

Sur une propriété très générale des déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 177-179
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__177_1>

SUR UNE PROPRIÉTÉ TRÈS GÉNÉRALE DES DÉTERMINANTS;

Par M. A. Auric.

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues

$$(1)\quad a_i^0 = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^p x_p + \ldots + a_i^n x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Appelons D_n^n le déterminant formé par les coefficients et D_n^0 le déterminant obtenu en remplaçant les éléments de la dernière colonne

$$a_1^n \quad a_2^n \quad \ldots \quad a_n^n$$

respectivement par

$$a_1^0 \quad a_2^0 \quad \ldots \quad a_n^0.$$

Appelons de même D_q^q le déterminant obtenu en ne considérant que les q premières inconnues et les q premières équations, et D_q^i le déterminant formé en remplaçant, dans D_q^q,

$$a_1^q \quad a_2^q \quad \ldots \quad a_q^q$$

respectivement par

$$a_1^i \quad a_2^i \quad \ldots \quad a_q^i.$$

Soit $D_n^n(a_\lambda^\mu)$ le déterminant obtenu en supprimant dans D_n^n la ligne λ et la colonne μ.

Posons

$$\theta_n^i = \frac{D_n^i}{D_n^n}, \qquad \theta_q^i = \frac{D_q^i}{D_q^q},$$

ce qui suppose

$$D_n^n \neq 0, \qquad D_q^q \neq 0.$$

Dans notre Mémoire sur les équations linéaires, nous avons mis la solution du système (1) sous la forme générale

$$x_p = \sum_0^{n-p} \theta_{p+k}^0 T_p^{p+k},$$

en posant

$$T_p^{p+k} = \sum (-1)^\nu \theta_p^{p+\lambda_1} \quad \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \quad \ldots \quad \theta_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = k \qquad (\lambda_i \neq 0).$$

Il est facile de montrer, en donnant à a_i^0 des valeurs spéciales,

$$a_i^0 = 0 \quad \text{si} \quad i \neq p + k,$$
$$a_i^0 = 1 \quad \text{si} \quad i = p + k,$$

que l'on a

$$T_p^{p+k} = \frac{D_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^p)}{D_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p+k})}.$$

On a dès lors la relation très générale que nous voulions établir

$$\frac{D_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p})}{D_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p+k})} = \sum(-1)^{\nu} \frac{D_p^{p+\lambda_1} D_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots D_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k}}{D_p^p D_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1} \dots D_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k-\lambda_\nu}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = k \qquad (\lambda_i \neq 0).$$

Les symboles T_p^{p+k} et θ_p^{p+k} sont tout à fait réciproques; on a en effet les relations suivantes :

$$\theta_p^{p+k} = \sum(-1)^{\nu} T_p^{p+\lambda_1} T_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots T_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = k \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

$$\sum_{k=0}^{k=j} \theta_p^{p+k} T_{p+k}^{p+j} = \sum_{k=0}^{k=j} T_p^{p+k} \theta_{p+k}^{p+j} = 0.$$

On a de même

$$x_p = \sum_0^{n-p} \theta_{p+k}^0 T_p^{p+k},$$

$$\theta_p^0 = \sum_0^{n-p} x_p \theta_p^{p+k}.$$

Comme application prenons le cas simple de $k = 2$; on aura immédiatement

$$\frac{D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p})}{D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+2})} = \frac{D_p^{p+1} D_{p+1}^{p+2}}{D_p^p D_{p+1}^{p+1}} - \frac{D_p^{p+2}}{D_p^p}$$

et en écrivant les déterminants du second membre, comme les mineurs de D_{p+2}^{p+2}, il vient

$$\begin{aligned} D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p}) D_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p+1}\, a_{p+2}^{p+2}) = {} & D_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p}\, a_{p+2}^{p+2}) D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+1}) \\ & - D_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p}\, a_{p+2}^{p+1}) D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+2}) \end{aligned}$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p}) D_{p+2}^{p+2}(a_{p+1}^{p+1}\, a_{p+2}^{p+2}) = \begin{vmatrix} D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p}\, a_{p+1}^{p+2}) & D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p}\, a_{p+1}^{p+1}) \\ D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+2}) & D_{p+2}^{p+2}(a_{p+2}^{p+1}) \end{vmatrix}.$$

On reconnaît alors une propriété bien connue des déterminants (*voir* p. 11 du Mémoire précité).