BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DE MONTESSUS

Sur les fractions continues algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 28-36

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__28_1>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

Par M. R. DE MONTESSUS.

Je rappelle, en modifiant un peu la forme, quelques notions dues à M. Padé.

Considérons un Tableau de fractions rationnelles

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{U_0^0}{V_0^0}, & \dfrac{U_0^1}{V_1^0}, & \dfrac{U_0^2}{V_2^0}, & \dfrac{U_0^3}{V_3^0}, & \ldots, & \dfrac{U_0^n}{V_n^0}, & \ldots, \\
\dfrac{U_1^0}{V_0^1}, & \dfrac{U_1^1}{V_1^1}, & \dfrac{U_1^2}{V_2^1}, & \dfrac{U_1^3}{V_3^1}, & \ldots, & \dfrac{U_1^n}{V_n^1}, & \ldots, \\
\dfrac{U_2^0}{V_0^2}, & \dfrac{U_2^1}{V_1^2}, & \dfrac{U_2^2}{V_2^2}, & \dfrac{U_2^3}{V_3^2}, & \ldots, & \dfrac{U_2^n}{V_n^2}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\dfrac{U_p^0}{V_0^p}, & \dfrac{U_p^1}{V_1^p}, & \dfrac{U_p^2}{V_2^p}, & \dfrac{U_p^3}{V_3^p}, & \ldots, & \dfrac{U_p^n}{V_n^p}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

où U_p^n, V_n^p sont des polynomes en x, respectivement de degré n et p, choisis de manière que le développement en série de la fraction $\dfrac{U_p^n}{V_n^p}$

$$(1) \qquad \frac{U_p^n}{V_n^p} = s_0 + s_1 x + \ldots + s_{n+p} x^{n+p} + \lambda x^{n+p+1} + \mu x^{n+p+2} + \ldots$$

ait pour termes de degrés inférieurs à $n+p+1$ les termes d'une série illimitée donnée y,

$$y = s_0 + s_1 x + \ldots + s_h x^h + \ldots, \qquad s_0 \neq 0.$$

Cela permet de supposer que le terme constant de U_p^n est s_0 et que le terme constant de V_n^p est l'unité.

Une fraction $\frac{U_p^n}{V_n^p}$ du Tableau est dite *normale,* s'il n'existe aucune autre fraction ayant pour numérateur un polynome de degré n et pour dénominateur un polynome de degré p dont le développement coïncide dans ses $n+p+1$ premiers termes avec la série y.

Nous supposons que la série y donne lieu à un Tableau de fractions normales. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que tous les déterminants Δ_{pq} ($p, q = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} s_{p+1} & s_p & \ldots & s_{p+1-q} \\ s_{p+2} & s_{p+1} & \ldots & s_{p+2-q} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ s_{p+1+q} & s_{p+q} & \ldots & s_{p+1} \end{vmatrix}$$

soient différents de zéro.

Une suite quelconque de fractions du Tableau,

$$(2) \qquad \frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \ldots, \quad \frac{U_i}{V_i}, \quad \ldots,$$

chacune étant plus avancée que les précédentes $\left(\frac{U_p^n}{V_n^p}\right.$ est plus avancée que $\left.\frac{U_q^m}{V_m^q} \text{ si } p+n > m+q\right)$, définit une fraction continue appartenant à l'une des deux catégories suivantes :

I. Si

$$\begin{cases} U_1 = a_1, \quad V_1 = 1, \quad U_2 = a_1 a_2 + \alpha_2, \quad V_2 = \alpha_2, \\ \alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i, \\ \alpha_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} = V_i \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots), \end{cases}$$

les fractions $\frac{U_i}{V_i}$ sont les réduites successives

$$a_1, \quad a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2}, \quad a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3}}, \quad \ldots$$

de la fraction continue

$$a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \cfrac{\alpha_4}{\ddots}}}$$

II. Si

$$\left\{\begin{array}{llll} U_1 = \alpha_1, & V_1 = a_1, & U_2 = \alpha_1 \alpha_2, & V_2 = a_1 a_2 + \alpha_2, \\ \alpha_i U_{i-2} + a_i U_{i-1} = U_i, & & & \\ \alpha_i V_{i-2} + a_i V_{i-1} = V_i, & & & \end{array}\right.$$

les fractions $\frac{U_i}{V_i}$ sont les réduites successives $\frac{\alpha_1}{a_1}$, $\cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2}}$, ...

de la fraction continue

$$\cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{\ddots}}},$$

de sorte que *l'étude d'une suite de réduites telles que* (2) *revient à l'étude d'une fraction continue.*

La réciproque est vraie : *l'étude d'une fraction continue revient à l'étude d'une suite de réduites.*

Toute suite illimitée de réduites, chacune plus avancée que les précédentes,

$$\frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \ldots, \quad \frac{U_i}{V_i}, \quad \ldots,$$

ou toute fraction continue, représente une fonction. Cette suite converge en même temps que la série

$$(s') \quad \left\{\begin{array}{l} (-1)\dfrac{A_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + (-1)^2 \dfrac{A_{p+2}}{V_{p+1} V_{p+2}} + \ldots + (-1)^q \dfrac{A_{p+q}}{V_{q-1} V_q} + \ldots \\ \qquad\qquad (A_i = U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}), \end{array}\right.$$

dont l'étude, assez compliquée, se simplifie si les numérateurs A_i sont des monomes entiers en x

$$A_i = c_i x^m \qquad (c_i \text{ const.}, \quad m \text{ entier et positif}).$$

Cette simplification a lieu si les réduites de la suite considérée sont toutes *consécutives,* c'est-à-dire si, en posant

$$\frac{U_i}{V_i} = \frac{U_p^n}{V_n^p}, \qquad \frac{U_{i+1}}{V_{i+1}} = \frac{U_q^m}{V_m^q},$$

on a, soit

$$p + n + 1 = q + m,$$

soit

$$p + n + 2 = q + m.$$

En effet, si, dans ce cas, (C) est le cercle de la convergence de la *série de puissances*

$$(s'') \qquad (-1)A_{p+1} + (-1)^2 A_{p+2} + \ldots + (-1)^q A_{p+q} + \ldots,$$

la suite des réduites converge dans le cercle (C), *sauf aux points qui seraient des zéros pour une* INFINITÉ *de polynomes* V_p. Nous disons *une infinité*, parce que dans l'étude de la valeur prise par la fonction définie par la suite de réduites en un point d'affixe α nous convenons de supprimer les réduites de rang fini $\frac{U_p}{V_p}$, où V_p a le point α pour zéro.

Si les polynomes V_p tendent vers un polynome limite V, la fonction représentée par la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \quad \frac{U_1}{V_1}, \quad \ldots, \quad \frac{U_p}{V_p}, \quad \ldots$$

doit être regardée comme ayant pour pôles les zéros de V se trouvant dans le cercle de convergence.

Ces considérations et ce fait bien connu qu'il est possible de déduire d'une série une fraction continue convergente parfois dans une aire où la série ne l'est pas, et réciproquement, conduisent à la question suivante : *Une suite de réduites consécutives d'un Tableau de fractions normales définit-elle une fonction identique à la fonction définie par la série qui a donné naissance au tableau et, dans l'affirmative, la fraction continue correspondant à la suite prolonge-t-elle la série en dehors de son cercle de convergence?* Je vais montrer que certains résultats, dus à M. Hadamard, permettent de résoudre cette question dans le cas d'une suite de réduites consécutives

$$\frac{U_p^0}{V_0^p}, \quad \frac{U_p^1}{V_1^p}, \quad \frac{U_p^2}{V_2^p}, \quad \ldots, \quad \frac{U_p^n}{V_n^p}, \quad \ldots,$$

faisant toutes partie d'une même ligne horizontale d'un Tableau de fractions normales.

1. Si l'on pose

$$V_m^p = 1 - B_{1,p}^m x + B_{2,p}^m x^2 - \ldots + (-1)^i B_{i,p}^m x^i + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^m x^p,$$

la condition imposée à la fraction $\frac{U_p^m}{V_m^p}$ d'avoir pour les $m+p$ premiers termes de son développement en série les $m+p$ premiers termes de la série

$$\sum_0^\infty s_n x^n,$$

nécessite que $B_{1,p}^m, \ldots, B_{p,p}^m$ vérifient le système d'équations

$$(2) \qquad \begin{cases} s_{m+1} - B_{1,p}^m s_m + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^m s_{m-p+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{m+p} - B_{1,p}^m s_{m+p-1} + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^m s_m = 0. \end{cases}$$

M. Hadamard, recherchant un polynome $P(x)$ tel que le produit d'une série donnée $f(x)$ par ce polynome soit une série convergente dans un cercle de rayon supérieur au cercle de convergence de $f(x)$, a montré que, si les modules des pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots$ de la fonction représentée par la série

$$\sum_0^\infty s_n x^n$$

vérifient les inégalités

$$(3) \qquad |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \ldots \leqq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \ldots,$$

les coefficients $B_{i,p}^m$ tendent, quand m croît indéfiniment vers des limites $B_{i,p}$ telles que

$$V^p = \lim_{m=\infty} V_m^p = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha_p}\right),$$

chaque pôle multiple devant être compté pour autant de pôles simples qu'il entre d'unités dans son degré de multiplicité.

Au contraire, si

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \ldots \leqq |\alpha_p| = |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \ldots,$$

il se peut que les quantités $B_{i,p}^m$ tendent vers des limites qui ne soient plus les fonctions symétriques des affixes des pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et même ne tendent vers aucune limite.

2. Si les inégalités (3) sont vérifiées, il est à prévoir que le cercle de convergence de la série (s'') a pour rayon $|\alpha_{p+1}|$. Et, en effet, posant

$$U_p^m = s_0 + C_{1,m}^p n + \ldots + C_{m-1,m}^p x^{m-1} + C_{m,m}^p x^m,$$

on a

$$\begin{aligned} A_p^n = U_p^{n-1} V_n^p - U_p^n V_{n-1}^p = (s_0 + C_{1,n-1}^p x + \ldots + C_{n-1,n-1}^p x^{n-1}) \\ \times [1 - B_{1,p}^n x + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^n x^p] \\ - (s_0 + C_{1,n}^p x + \ldots + C_{n,n}^p x^n) \\ \times [1 - B_{1,p}^{n-1} x + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^{n-1} x^p], \end{aligned}$$

et A_p^n se réduisant à un terme monome, puisque les réduites sont consécutives

$$A_p^n = (-1)^{p+1} C_{n,n}^p B_{p,p}^{n-1} x^{n+p},$$

car le terme de degré x^{n+p} est irréductible, comme unique de son espèce.

Or les coefficients $C_{i,n}^m$ ont pour expressions

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} C_{1,m}^p &= s_1 - B_{1,p}^m s_0, \\ C_{2,m}^p &= s_2 - B_{1,p}^m s_1 + B_{2,p}^m s_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{p,m}^p &= s_p - B_{1,p}^m s_{p-1} + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^m s_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{p+k,m}^p &= s_{p+k} - B_{1,p}^m s_{p+k-1} + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^m s_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_{m,m}^p &= s_m - B_{1,p}^m s_{m-1} + \ldots + (-1)^p B_{p,p}^m s_{m-p}, \end{aligned} \right.$$

de sorte que l'élimination de $B_{1,p}^m, \ldots, B_{p,p}^m$ entre les équations du système (2) et la dernière équation du système (3) nous donne

$$\begin{vmatrix} s_m - C_{m,m}^p & s_{m-1} & \ldots & s_{m-p} \\ s_{m+1} & s_m & \ldots & s_{m-p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m+p} & s_{m+p-1} & \ldots & s_m \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$C_{m,m}^p = \frac{\begin{vmatrix} s_m & s_{m-1} & \ldots & s_{m-p} \\ s_{m+1} & s_m & \ldots & s_{m-p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m+p} & s_{m+p-1} & \ldots & s_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_m & s_{m-1} & \ldots & s_{m-p+1} \\ s_{m+1} & s_m & \ldots & s_{m-p+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{m+p-1} & s_{m+p-2} & \ldots & s_m \end{vmatrix}}.$$

Quant à $B_{p,p}$, le système (2) nous donne, au signe près,

$$B^m_{p,p} = \pm \frac{\begin{vmatrix} s_{m+1} & s_m & \ldots & s_{m-p+2} \\ s_{m+2} & s_{m+1} & \ldots & s_{m-p+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m+p} & s_{m+p-1} & \ldots & s_{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_m & s_{m-1} & \ldots & s_{m-p+1} \\ s_{m+1} & s_m & \ldots & s_{m-p+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m+p-1} & s_{m+p-2} & \ldots & s_m \end{vmatrix}}.$$

On a donc

$$A^n_p = \pm \frac{\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & \ldots & s_{n-p} \\ s_{n+1} & s_n & \ldots & s_{n-p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n+1} & s_{n+p-1} & \ldots & s_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{n-q} & s_{n-2} & \ldots & s_{n-p} \\ s_n & s_{n-1} & \ldots & s_{n-p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n+p-2} & s_{n+p-3} & \ldots & s_{n-1} \end{vmatrix}}.$$

Si l'on pose $n - p = k$, il s'agit donc de déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{k+p} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \ldots & s_{k+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k+p} & s_{k+p+1} & \ldots & s_{k+2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{k+p-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \ldots & s_{k+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k+p-1} & s_{k+p-2} & \ldots & s_{k+2p-2} \end{vmatrix}} x^{2p+k},$$

où q est un nombre fini bien déterminé et invariable.

Dans la question du polynome $P(x)$, M. Hadamard a trouvé, lui aussi, ces rapports de déterminants. Écrivant avec lui

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{m+p} \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \ldots & s_{m+p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m+p} & s_{m+p+1} & \ldots & s_{m+2p} \end{vmatrix},$$

nous avons à chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \frac{D_{k,p}}{D_{k,p-1}} x^{2p+k}.$$

On sait que ce rayon a pour expression

$$\overline{\lim_{k=\infty}} \sqrt[k]{\frac{|D_{k,p}|}{|D_{k,p-1}|}} = \overline{\lim_{k=\infty}} \frac{\sqrt[k]{|D_{k,p}|}}{\sqrt[k]{|D_{k,p-1}|}}.$$

Mais, si les inégalités (3) sont vérifiées, on sait aussi que $\sqrt{D|_{k,p}|}$ a pour limite $\frac{1}{|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}|}$. Le rayon de convergence de la série s'' est donc bien $|\alpha_{p+1}|$.

3. *Si, pour une valeur déterminée x_0 de la variable x, les suites $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, $\frac{U_q^k}{V_k^q}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ tendent l'une et l'autre vers des limites déterminées, ces limites sont* IDENTIQUES.

Il suffit de démontrer que si $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, d'une part, et $\frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}}$, de l'autre, tendent vers des limites finies et déterminées, la différence de ces réduites tend vers zéro.

Remarquons, pour cela, que $|x_0| < |\alpha_{p+1}|$, car les réduites $\frac{U_p^k}{V_k^p}$, convergentes seulement dans le cercle de rayon $|\alpha_{p+1}|$, sont supposées convergentes au point d'affixe x_0, et que la différence

$$\frac{U_p^k}{V_k^p} - \frac{U_{p+1}^k}{V_k^{p+1}}$$

peut s'écrire, comme le montre un calcul simple,

$$\frac{1}{V_k^p V_k^{p+1}} \times \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1} \qquad (k - p + 1 = h).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1} \qquad (x = x_0)$$

tend vers zéro quand k, c'est-à-dire h, croît indéfiniment. Il en est bien ainsi, car la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1},$$

de rayon de convergence $|\alpha_{p+1}|$, est convergente au point x_0, puisque, nous l'avons fait observer,

$$|x_0| < |\alpha_{p+1}|.$$

4. Il ressort de ces considérations qu'*étant donnée une série de Taylor représentant une fonction $f(x)$ dont les p pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle* (C) *lui-même intérieur aux pôles suivants*, chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, *la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang p du Tableau de M. Padé*, ce Tableau étant composé de réduites normales, *représente la fonction $f(x)$ dans un cercle de rayon $|\alpha_{p+1}|$, où α_{p+1} est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle* (C).

Si tous les pôles ont des modules différents, les fractions continues correspondant aux lignes horizontales représentent toute la fonction; s'il existe simplement des discontinuités dans l'ensemble linéaire des modules des pôles, les fractions continues correspondant à des lignes horizontales convenablement choisies représentent encore la fonction.

Si tous les pôles sont simples, la représentation a lieu dans des cercles d'autant plus grands que la ligne horizontale choisie est plus éloignée dans le Tableau. S'il y a des pôles multiples, il y a stationnement, en ce sens que plusieurs lignes horizontales consécutives représentant la fonction ont le même rayon de convergence. *S'il y a enfin un point singulier essentiel, le stationnement se prolonge indéfiniment, aucune des fractions continues considérées ne représente la fonction en dehors du cercle sur la circonférence duquel se trouve le point singulier essentiel le plus rapproché de l'origine.*