BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation

Bulletin de la S. M. F., tome 4 (1875-1876), p. 94-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875-1876__4__94_1>

Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation; par M. Halphen.

(Séance du 8 mars 1876.)

Les surfaces dont les rayons de courbure principaux en chaque point sont liés par une relation satisfont à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, indépendante de cette relation. Le théorème que je désire démontrer ici consiste en une interprétation géométrique très-simple de cette équation. On obtient ce théorème en substituant aux éléments du troisième ordre de la surface considérée leurs expressions en fonction des éléments du second ordre de la surface lieu des centres de courbure principaux de la première. Pour faire cette substitution, je me servirai de divers résultats que j'ai obtenus dans une note *Sur un point de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 25 janvier 1875).

Soit (M) une surface. Je considère un point M de cette surface et les deux rayons de courbure principaux Λ, L en ce point. Soient

$$d\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy, \quad d\left(\frac{1}{\mathrm{L}}\right) = \mathrm{C}\,dx + \mathrm{D}\,dy$$

les différentielles totales des inverses de ces rayons de courbure.

L'équation aux dérivées partielles, qui exprime que Λ et L sont liées par une relation, peut s'écrire

$$(1) \qquad \mathrm{AD} - \mathrm{BC} = 0.$$

Pour employer les mêmes notations que dans ma note précitée, je désigne par μ et m les deux centres de courbure principaux de (M) au point M. La surface des centres de courbure principaux étant appelée abréviativement la *développée*, μ et m sont les points *associés* de cette développée qui correspondent à M. Je désigne par ρ_1, ρ_2 et par r_1, r_2 les rayons de courbure principaux de la développée en μ et m, et enfin par τ et t les courbures des sections normales faites dans la développée en μ et m par les plans des sections principales de (M) dont les rayons de courbure sont respectivement Λ et L. Avec ces notations, et en prenant pour axes la normale et les tangentes principales de (M) en M, j'ai, suivant la note précitée, les formules suivantes :

$$(2)\quad \mathrm{A} = \frac{1}{t\Lambda^3}, \quad \mathrm{B} = -\frac{(\mathrm{L}-\Lambda)^2}{t r_1 r_2 \Lambda^2 \mathrm{L}}, \quad \mathrm{C} = -\frac{(\Lambda - \mathrm{L})^2}{\tau \rho_1 \rho_2 \mathrm{L}^2 \Lambda}, \quad \mathrm{D} = \frac{1}{\tau \mathrm{L}^3}.$$

Ces expressions portées dans (1) donnent

$$(3) \qquad r_1 r_2 \rho_1 \rho_2 = (\mathrm{L} - \Lambda)^4.$$

Ainsi :

THÉORÈME. — *Soit* (M) *une surface dont les rayons de courbure principaux en chaque point sont liés par une relation; soient* m, μ *les centres de courbure principaux relatifs à un même point de* (M). *Le produit des quatre rayons de courbure principaux de la surface lieu des points* m, μ *en deux points associés est constamment égal à la quatrième puissance de la distance de ces points.*

Telle est la proposition que j'avais en vue d'établir. Elle devient illusoire pour deux cas particuliers : les cas où (M) est une surface de révolution ou une surface développable. Voici maintenant une remarque. Dans la note déjà citée, j'ai indiqué, pour une surface du second degré, les relations

$$\rho_1 \rho_2 = -3(\mathrm{L} - \Lambda)^2 \frac{\Lambda}{\mathrm{L}}, \quad r_1 r_2 = -3(\Lambda - \mathrm{L})^2 \frac{\mathrm{L}}{\Lambda}.$$

On en conclut

$$(4) \qquad r_1 r_2 \rho_1 \rho_2 = 9(L - \Lambda)^4.$$

Les équations (3) et (4) sont incompatibles. On en conclut que, parmi les surfaces du second degré, les cylindres, les cônes et les surfaces de révolution sont les seules dont les rayons de courbure principaux en chaque point soient liés par une relation. On sait aussi qu'il existe, en général, sur une surface quelconque, des points en lesquels cette surface a un contact du troisième ordre avec chaque surface du second degré d'un certain faisceau. Par suite, si les rayons de courbure principaux en chaque point de la surface considérée sont liés par une relation, ce faisceau se compose de cylindres, de cônes ou de surfaces de révolution.

Toute équation aux dérivées partielles peut être considérée à deux points de vue : comme définissant une famille de surfaces ou comme définissant un lieu de points sur une surface. A ce second point de vue, l'équation (1) définit, sur une surface quelconque, un lieu de points dont on peut demander la propriété géométrique commune. Je vais l'indiquer succinctement.

En chaque point d'une surface, il existe une direction dans laquelle une des courbures principales est stationnaire, et une seconde direction dans laquelle l'autre courbure principale est également stationnaire. En tout point pour lequel la relation (1) est satisfaite, ces deux directions coïncident. J'ajoute qu'aux points correspondants sur la développée, la relation (3) a également lieu, et enfin que ce lieu de points n'existe pas sur les surfaces du second degré.