BULLETIN DE LA S. M. F.

G. COMBEBIAC

Sur un système numérique complexe représentant le groupe des transformations conformes de l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES.

SUR UN SYSTÈME NUMÉRIQUE COMPLEXE REPRÉSENTANT LE GROUPE DES TRANSFORMATIONS CONFORMES DE L'ESPACE;

Par M. Combebiac.

I.

TRANSFORMATIONS CONFORMES ET GÉOMÉTRIE DES SPHÈRES.

On sait que les transformations conformes de l'espace, c'est-à-dire les transformations ponctuelles par lesquelles une figure infinitésimale est transformée en une figure infinitésimale semblable, peuvent être caractérisées par la propriété de transformer les sphères de rayon nul en d'autres sphères de rayon nul, puisque les transformations conformes peuvent être définies *celles qui conservent le complexe des droites isotropes*.

Une transformation conforme transforme aussi toute sphère en une autre sphère, car la sphère est la seule surface qui présente deux séries de génératrices isotropes.

Les transformations conformes sont susceptibles d'être représentées d'une manière très simple, quand on prend pour élément de l'espace la sphère.

Considérons l'équation d'une sphère sous la forme

$$(1) \qquad \alpha_0(x^2+y^2+z^2)+2\alpha_1 x+2\alpha_2 y+2\alpha_3 z+\delta=0$$

et prenons les quantités α_0, α_1, α_2, α_3, δ pour coordonnées homogènes de la sphère.

Nous pouvons représenter une transformation conforme de l'espace par une transformation linéaire homogène en α_0, α_1, α_2, α_3, δ, laissant invariante l'expression quadratique

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_0 \delta. \tag{2}$$

C'est ce groupe de transformations dont nous allons établir la représentation au moyen d'un système numérique complexe.

Auparavant, nous ferons remarquer quelques propriétés de ce groupe.

Ce groupe conserve la variété constituée par les sphères de rayon nul et représentée par l'équation quadratique

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_0 \delta = 0. \tag{3}$$

Il conserve également l'orthogonalité des sphères, qui s'écrit

$$2(\alpha_1 \alpha'_1 + \alpha_2 \alpha'_2 + \alpha_3 \alpha'_3) - \alpha_0 \delta' - \alpha'_0 \delta = 0.$$

En particulier, les sphères de rayon nul ayant leurs centres sur une sphère S sont transformées en sphères de rayon nul ayant leurs centres sur la transformée S' de S.

Ce groupe constitue le groupe fondamental de la Géométrie des sphères, comme le groupe des déplacements sans déformation constitue le groupe fondamental de la Géométrie ponctuelle.

Remarquons enfin que les plans forment, dans le domaine des sphères, une variété qui est caractérisée par l'équation linéaire

$$\alpha_0 = 0$$

et qui est tangente à la quadrique (3), l'élément de contact étant le plan de l'infini.

Le plan de l'infini doit donc aussi être considéré comme une sphère de rayon nul.

II.

SYSTÈMES NUMÉRIQUES DE LIPCHITZ.

Lipchitz [1] a résolu le problème consistant dans la détermination d'un système numérique complexe susceptible de repré-

---

[1] LIPCHITZ, *Ueber die Summen von Quadraten*. Bonn, Cohen und Sohn, 1886.

senter un groupe de transformations linéaires homogènes à un nombre quelconque de variables laissant invariante la somme des carrés des variables.

Nous exposerons d'abord succinctement les résultats auxquels il est parvenu. Nous en ferons l'application au cas de cinq variables. Il ne nous restera plus ensuite qu'à transformer par un changement de variables l'expression quadratique (2) en une somme de cinq carrés.

Une transformation linéaire homogène à n variables

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

telle que l'on ait

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

peut s'écrire sous la forme générale

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda_0 x_1' + \lambda_{21} x_2' + \ldots + \lambda_{n1} x_n' = \lambda_0 x_1 + \lambda_{12} x_2 + \ldots + \lambda_{1n} x_n, \\ \lambda_{12} x_1' + \lambda_0 x_2' + \ldots + \lambda_{n2} x_n' = \lambda_{21} x_1 + \lambda_0 x_2 + \ldots + \lambda_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_{1n} x_1' + \lambda_{2n} x_2' + \ldots + \lambda_0 x_n' = \lambda_{n1} x_1 + \lambda_{n2} x_2 + \ldots + \lambda_0 x_n, \end{cases}$$

où l'on a

$$\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}.$$

Le nombre des paramètres est $1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Introduisons de nouvelles quantités liées à ces paramètres. Posons

$$(5)\qquad \lambda_{abcd} = \frac{\lambda_{ab}\,\lambda_{cd} + \lambda_{ac}\,\lambda_{db} + \lambda_{ad}\,\lambda_{bc}}{\lambda_0}$$

et, plus généralement, si $a, b, c, \ldots, f$ sont $2r$ nombres, désignons par $\lambda_{abcd\ldots f}$ l'expression qui a pour dénominateur λ_0^{r-1} et pour numérateur la somme des produits que l'on obtient en multipliant r coefficients de la transformation (4), obtenus en permutant, de toutes les manières possibles, les $2r$ nombres $a, b, \ldots, f$.

Considérons maintenant l'expression

$$\text{A} = \lambda_0 + i_{12}\,\lambda_{12} + \ldots + i_{1234}\,\lambda_{1234} + \ldots,$$

où $\lambda_0, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1234}, \ldots$ ont les significations ci-dessus définies et où $i_{12}, \ldots, i_{1234}, \ldots$ sont des unités complexes ou clefs soumises à des règles de multiplication que l'on peut représenter d'une manière simple en posant

$$i_{ab} = k_a k_b, \qquad i_{ba} = k_b k_a, \qquad i_{abcd} = k_a k_b k_c k_d, \qquad \ldots,$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont n unités primitives soumises aux règles de multiplication suivantes :

$$k_a k_b = -k_b k_a, \qquad k_a^2 = -1.$$

Les expressions Λ forment un système numérique complexe à 2^{n-1} unités indépendantes $s, i_{12}, \ldots, i_{1234}, \ldots.$

Ces expressions jouissent des propriétés suivantes :

Si les coefficients λ sont soumis aux relations (5), à chaque transformation (4) correspond une expression Λ.

Le produit de deux telles expressions est une expression dans laquelle les coefficients satisfont encore aux relations (5).

Ce produit représente précisément la transformation résultant de la succession des deux premières.

Enfin, si l'on pose

$$\begin{aligned} X &= k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n, \\ X' &= k_1 x'_1 + k_2 x'_2 + \ldots + k_n x'_n, \end{aligned}$$

la transformation (4) peut être représentée symboliquement par l'équation complexe

$$\Lambda X' = X \Lambda.$$

Tels sont les résultats dus à Lipchitz, que nous allons d'abord appliquer directement au cas de cinq variables.

La quantité complexe Λ est alors de la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Lambda = \lambda_0 &+ \lambda_{23} k_2 k_3 + \lambda_{31} k_3 k_1 + \lambda_{12} k_1 k_2 + \lambda_{14} k_1 k_4 + \lambda_{24} k_2 k_4 \\ &+ \lambda_{34} k_3 k_4 + \lambda_{15} k_1 k_5 + \lambda_{25} k_2 k_5 + \lambda_{35} k_3 k_5 + \lambda_{45} k_4 k_5 \\ &+ \lambda_{4523} k_4 k_5 k_2 k_3 + \lambda_{4531} k_4 k_5 k_3 k_1 + \lambda_{4512} k_4 k_5 k_1 k_2 \\ &+ \lambda_{1234} k_1 k_2 k_3 k_4 + \lambda_{1235} k_1 k_2 k_3 k_5. \end{aligned} \right.$$

Nous grouperons les seize unités du système de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll} 1, & i = k_2 k_3, & j = k_3 k_1, & k = k_1 k_2, \\ k_4 k_5, & k_4 k_5 i = k_4 k_5 k_2 k_3, & k_4 k_5 j = k_4 k_5 k_3 k_1, & k_4 k_5 k = k_4 k_5 k_1 k_2, \\ k_1 k_2 k_3 k_4, & (k_1 k_2 k_3 k_4) i = -k_1 k_4, & (k_1 k_2 k_3 k_4) j = -k_2 k_4, & (k_1 k_2 k_3 k_4) k = -k_3 k_4, \\ k_1 k_2 k_3 k_5, & (k_1 k_2 k_3 k_5) i = -k_1 k_5, & (k_1 k_2 k_3 k_5) j = -k_2 k_5, & (k_1 k_2 k_3 k_5) k = -k_3 k_5. \end{array}$$

On vérifie d'abord que i, j, k sont les unités quaternioniennes satisfaisant aux règles de multiplication

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j.$$

On voit donc que les seize unités du système numérique complexe considéré sont les produits des quatre unités quaternioniennes

$$1, \quad i, \quad j, \quad k$$

par les quatre unités

$$1, \quad k_4 k_5, \quad k_1 k_2 k_3 k_4, \quad k_1 k_2 k_3 k_5,$$

commutatives avec les premières.

On vérifie également que ces quatre dernières unités forment un système numérique complexe dont les règles de multiplication sont les suivantes :

$$(k_4 k_5)^2 = -1, \qquad (k_1 k_2 k_3 k_4)^2 = 1, \qquad (k_1 k_2 k_2 k_5)^2 = 1,$$
$$(k_4 k_5)(k_1 k_2 k_3 k_4) = -(k_1 k_2 k_3 k_4)(k_4 k_5) = -k_1 k_2 k_3 k_5,$$
$$(k_4 k_5)(k_1 k_2 k_3 k_5) = -(k_1 k_2 k_3 k_5)(k_4 k_5) = -k_1 k_2 k_3 k_4,$$
$$(k_1 k_2 k_3 k_4)(k_1 k_2 k_3 k_5) = -(k_1 k_2 k_3 k_5)(k_1 k_2 k_3 k_4) = -k_4 k_5.$$

Enfin l'expression A peut s'écrire

$$(6^{bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} A = {} & \lambda_0 + \lambda_{23} i + \lambda_{31} j + \lambda_{12} k \\ & + k_4 k_5 (\lambda_{45} + \lambda_{4523} i + \lambda_{4531} j + \lambda_{4512} k) \\ & + k_1 k_2 k_3 k_4 (\lambda_{1234} - \lambda_{14} i - \lambda_{24} j - \lambda_{34} k) \\ & + k_1 k_2 k_3 k_5 (\lambda_{1235} - \lambda_{15} i - \lambda_{25} j - \lambda_{35} k). \end{aligned} \right.$$

III.

SYSTÈME NUMÉRIQUE DES QUADRIQUATERNIONS.

Nous allons maintenant remplacer les coefficients λ et les unités du système numérique par d'autres coefficients et d'autres unités susceptibles d'une interprétation géométrique plus directe.

Dans le système d'équations (4) appliqué au cas de cinq variables, opérons le changement de variables

$$x_1 = \alpha_1, \qquad x_2 = \alpha_2, \qquad x_3 = \alpha_3,$$
$$2x_4 = (\alpha_0 + \delta)\sqrt{-1}, \qquad 2x_5 = (\alpha_0 - \delta)$$

ainsi que le changement correspondant sur variables accentuées. On a

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_0\delta,$$

et les équations (4) représenteront alors une transformation linéaire homogène en α_0, α_1, α_2, α_3, δ laissant invariante l'expression quadratique (2).

Le système d'équations ainsi obtenu prendra, après combinaison convenable des deux dernières, la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_0\alpha'_1+\lambda_{21}\alpha'_2+\lambda_{31}\alpha'_3+\frac{\lambda_{45}\sqrt{-1}+\lambda_{51}}{2}\alpha'_0+\frac{\lambda_{41}\sqrt{-1}-\lambda_{51}}{2}\delta'\\
&\quad=\lambda_0\alpha_1+\lambda_{12}\alpha_2+\lambda_{13}\alpha_3+\frac{\lambda_{14}\sqrt{-1}+\lambda_{15}}{2}\alpha_0+\frac{\lambda_{14}\sqrt{-1}-\lambda_{15}}{2}\delta,\\
&\lambda_{12}\alpha'_1+\lambda_0\alpha'_2+\lambda_{32}\alpha'_3+\frac{\lambda_{42}\sqrt{-1}+\lambda_{52}}{2}\alpha'_0+\frac{\lambda_{41}\sqrt{-1}-\lambda_{51}}{2}\delta'\\
&\quad=\lambda_{21}\alpha_1+\lambda_0\alpha_2+\lambda_{23}\alpha_3+\frac{\lambda_{24}\sqrt{-1}+\lambda_{25}}{2}\alpha_0+\frac{\lambda_{25}\sqrt{-1}-\lambda_{25}}{2}\delta,\\
&\lambda_{13}\alpha'_1+\lambda_{23}\alpha'_2+\lambda_0\alpha'_3+\frac{\lambda_{43}\sqrt{-1}+\lambda_{53}}{2}\alpha'_0+\frac{\lambda_{43}\sqrt{-1}-\lambda_{53}}{2}\delta'\\
&\quad=\lambda_{31}\alpha_1+\lambda_{32}\alpha_2+\lambda_0\alpha_3+\frac{\lambda_{34}\sqrt{-1}+\lambda_{35}}{2}\alpha_0+\frac{\lambda_{34}\sqrt{-1}-\lambda_{35}}{2}\delta,\\
&\frac{\lambda_{14}\sqrt{-1}+\lambda_{15}}{2}\alpha'_1+\frac{\lambda_{24}\sqrt{-1}+\lambda_{25}}{2}\alpha'_2+\frac{\lambda_{34}\sqrt{-1}+\lambda_{35}}{2}\alpha'_3-(\lambda_0+\lambda_{54}\sqrt{-1})\delta'\\
&\quad=\frac{\lambda_{41}\sqrt{-1}+\lambda_{51}}{2}\alpha_1+\frac{\lambda_{42}\sqrt{-1}+\lambda_{52}}{2}\alpha_2+\frac{\lambda_{43}\sqrt{-1}+\lambda_{53}}{2}\alpha_3-(\lambda_0+\lambda_{45}\sqrt{-1})\delta,\\
&\frac{\lambda_{14}\sqrt{-1}-\lambda_{15}}{2}\alpha'_1+\frac{\lambda_{24}\sqrt{-1}-\lambda_{25}}{2}\alpha'_2+\frac{\lambda_{24}\sqrt{-1}-\lambda_{35}}{2}\alpha'_3-(\lambda_0+\lambda_{45}\sqrt{-1})\alpha'_0\\
&\quad=\frac{\lambda_{41}\sqrt{-1}-\lambda_{51}}{2}\alpha_1+\frac{\lambda_{42}\sqrt{-1}-\lambda_{52}}{2}\alpha_2+\frac{\lambda_{43}\sqrt{-1}-\lambda_{53}}{2}\alpha_3-(\lambda_0+\lambda_{54}\sqrt{-1})\alpha_0.
\end{aligned}\right.$$

Pour mettre les nouveaux coefficients en évidence dans l'expression de A, il suffit de prendre, au lieu des unités k_4k_5, $k_1k_2k_3k_4$, $k_1k_2k_3k_5$, d'autres unités μ, ω, ω' définies par les relations

$$k_4k_5=\mu\sqrt{-1},\qquad k_1k_2k_3k_4=-\sqrt{-1}\,\frac{\omega+\omega'}{2},\qquad k_1k_2k_3k_5=\frac{\omega'-\omega}{2}.$$

L'expression de Λ devient alors

$$\begin{aligned}\Lambda = {} & \lambda_0 + \lambda_{23} i + \lambda_{31} j + \lambda_{12} k + \mu\left(\lambda_{45}\sqrt{-1} + \lambda_{4523}\sqrt{-1}\, i + \lambda_{4531}\sqrt{-1}\, j + \lambda_{4512}\sqrt{-1}\, k\right) \\ & + \omega\left(-\frac{\lambda_{1234}\sqrt{-1} + \lambda_{1235}}{2} + \frac{\lambda_{14}\sqrt{-1} + \lambda_{15}}{2} i + \frac{\lambda_{24}\sqrt{-1} + \lambda_{25}}{2} j + \frac{\lambda_{34}\sqrt{-1} + \lambda_{35}}{2} k\right) \\ & + \omega'\left(-\frac{\lambda_{1234}\sqrt{-1} - \lambda_{1235}}{2} + \frac{\lambda_{14}\sqrt{-1} - \lambda_{15}}{2} i + \frac{\lambda_{24}\sqrt{-1} - \lambda_{25}}{2} + j\frac{\lambda_{34}\sqrt{-1} - \lambda_{35}}{2} k\right),\end{aligned}$$

ou

$$\Lambda = q + \mu q_1 + \omega q_2 + \omega' q_3, \tag{6^{ter}}$$

en désignant par q, q_1, q_2 et q_3 des quaternions que nous écrirons dorénavant

$$\begin{aligned} q &= w + ix + jy + kz, \\ q_1 &= w_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1, \\ q_2 &= w_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2, \\ q_3 &= w_3 + ix_3 + jy_3 + kz_3, \end{aligned}$$

où x, x_1, x_2, x_3 n'ont aucun rapport de signification avec les variables du paragraphe II.

Les équations (7) de la transformation deviennent, par l'introduction des nouveaux coefficients,

$$\left\{\begin{aligned} w\alpha'_1 - x\alpha'_2 + y\alpha'_3 - x_2\alpha'_0 - x_3\delta' &= w\alpha_1 + x\alpha_2 - y\alpha_3 + x_2\alpha_0 + x_3\delta, \\ z\alpha'_1 + w\alpha'_2 - x\alpha'_3 - y_2\alpha'_0 - y_3\delta' &= -z\alpha_1 + w\alpha_2 + x\alpha_3 + y_2\alpha_0 + y_3\delta, \\ -y\alpha'_1 + x\alpha'_2 + w\alpha'_3 - z_2\alpha'_0 - z_3\delta' &= y\alpha_1 - x\alpha_2 + w\alpha_3 + z_2\alpha_0 + z_3\delta, \\ x_2\alpha'_1 + y_2\alpha'_2 + z_2\alpha'_3 - (w - w_1)\delta' &= -x_2\alpha_1 - y_2\alpha_2 - z_2\alpha_3 - (w + w_1)\delta, \\ x_3\alpha'_1 + y_3\alpha'_2 + z_3\alpha'_3 - (w + w_1)\alpha'_0 &= -x_3\alpha_1 - y_3\alpha_2 - z_3\alpha_3 - (w - w_1)\alpha_0. \end{aligned}\right. \tag{7^{bis}}$$

Ces équations ne contiennent que onze paramètres. Les cinq autres, x_1, y_1, z_1, w_2 et w_3, sont donnés par les relations (5), qui deviennent

$$\left\{\begin{aligned} wx_1 &= w_1 x + 2(y_2 z_3 - z_2 y_3), \\ wy_1 &= w_1 y + 2(z_2 x_3 - x_2 z_3), \\ wz_1 &= w_1 z + 2(x_2 y_3 - y_2 x_3), \\ & ww_2 + xx_2 + yy_2 + zz_2 = 0 \\ & ww_3 + xx_3 + yy_3 + zz_3 = 0. \end{aligned}\right. \tag{5^{bis}}$$

Enfin, les règles de multiplication du système se changent en les suivantes :

$$\mu^2 = 1, \qquad \omega^2 = 0, \qquad \omega'^2 = 0,$$
$$\omega\mu = -\mu\omega = \omega, \qquad \omega'\mu = -\mu\omega' = -\omega',$$
$$\omega\omega' = 2(\mu - 1), \qquad \omega'\omega = -2(\mu + 1).$$

Nous sommes donc en possession d'un système numérique complexe à seize unités, que nous appellerons *système des quadriquaternions,* comprenant des quantités [celles qui satisfont aux relations (5^{bis})] susceptibles de représenter les transformations conformes de l'espace.

IV.

CALCUL GÉOMÉTRIQUE.

Nous allons maintenant donner au calcul des quadriquaternions une forme qui le rende apte à des applications géométriques.

Remarquons d'abord que, si le quaternion q_3 est nul, Λ se réduit à un *triquaternion*

$$\Lambda = q + \mu q_1 + \omega q_2.$$

Nous avons montré que le *calcul des triquaternions* constitue une analyse géométrique [1].

Le calcul des quadriquaternions n'en est que le prolongement, comme nous allons le montrer.

Un triquaternion satisfaisant aux conditions (5^{bis}) (qui se simplifient pour un triquaternion) représente une transformation par similitude, et, en effet, si l'on fait dans les équations

$$x_3 = y_3 = z_3 = 0,$$

on voit que pour $\alpha = 0$ on a $\alpha'_0 = 0$, c'est-à-dire que les plans se transforment en plans, et par suite que la transformation conforme se réduit à une transformation par similitude (succession d'une homothétie et d'une rotation).

Un triquaternion peut s'écrire

$$w + l + p,$$

---

[1] COMBEBIAC, *Calcul des triquaternions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVII; 1899).

où w est une quantité vulgaire et où l représente ce que nous avons appelé, dans le Mémoire ci-dessus mentionné, un élément linéaire, et p un plan.

L'élément linéaire s'écrit

$$ix + jy + kz + \mu w_1 + \omega(ix_2 + jy_2 + kz_2)$$

et peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme de la somme d'un point et d'une droite, et d'une seule manière sous la forme de la somme d'un point et d'une droite passant par ce point.

Enfin un plan s'écrit

$$\mu(ix_1 + jy_1 + kz_1) + \omega w_2.$$

Dans cette interprétation, un point est représenté par la transformation par symétrie qu'il détermine, la droite par la rotation de 180° dont elle est l'axe, et le plan également par la transformation par symétrie qu'il détermine.

Nous allons étendre ce mode d'interprétation aux quadriquaternions. Il convient tout d'abord d'avoir une représentation de la sphère, que nous avons introduite comme élément de l'espace. Il est naturel de représenter une sphère par l'inversion (transformations par rayons vecteurs réciproques) dans laquelle elle reste invariante.

A la vérité, les équations (7^{bis}) sont inaptes à représenter une inversion, et, en particulier, une symétrie par rapport à un plan. Pour avoir les équations d'une inversion, il faut introduire à la place des coefficients w, x, y, z, w_1 les coefficients x_1, y_1, z_1, w_2, w_3 au moyen des relations (5^{bis}) et annuler ensuite x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3.

On verra ainsi facilement qu'une sphère est représentée par un quadriquaternion de la forme

$$\mu(ix_1 + jy_1 + kz_1) + \omega w_2 + \omega' w_3.$$

On parvient au même résultat en partant de l'expression par laquelle nous avons déjà représenté la sphère considérée comme l'élément sur lequel s'opèrent les transformations étudiées.

Cette expression s'écrit en effet

$$(8) \qquad s = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + k_4 \frac{\alpha_0 + \delta}{2} \sqrt{-1} + k_5 \frac{\alpha_0 - \delta}{2}.$$

D'autre part, on vérifie que l'on peut poser

$$k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 = -\sqrt{-1},$$

sans contredire en rien les relations fondamentales

$$k_a^2 = -1, \qquad k_a k_b = -k_b k_a,$$

d'où se déduisent toutes les règles de multiplication du système numérique.

On aura alors

$$k_1 k_2 k_3 k_4 = k_5\sqrt{-1}, \qquad k_1 k_2 k_3 k_5 = -k_4\sqrt{-1},$$
$$k_4 k_5 k_2 k_3 = k_1\sqrt{-1}, \qquad k_4 k_5 k_3 k_1 = k_2\sqrt{-1}, \qquad k_4 k_5 k_1 k_2 = k_3\sqrt{-1},$$

et l'expression (8) devient

$$\begin{aligned} s &= -k_4 k_5\sqrt{-1}(k_2 k_3 \alpha_1 + k_3 k_1 \alpha_2 + k_1 k_2 \alpha_3) \\ &\quad - \left(\frac{k_1 k_2 k_3 k_4\sqrt{-1} + k_1 k_2 k_3 k_5}{2}\right)\alpha_0 + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4\sqrt{-1} - k_1 k_2 k_3 k_5}{2}\delta \\ &= \mu(i\alpha_1 + j\alpha_2 + k\alpha_3) - \omega'\alpha_0 + \omega\delta. \end{aligned}$$

Le centre de la sphère a pour coordonnées

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_0},$$

et le carré du rayon a pour valeur

$$\frac{\delta}{\alpha_0} + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_0^2}.$$

On vérifiera qu'un quadriquaternion peut, d'une manière indépendante du système de coordonnées, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} r &= w + l + p, \\ &= \mathrm{G}r + \mathrm{L}r + \mathrm{P}r, \end{aligned}$$

où w (ou $\mathrm{G}r$) est une quantité scalaire, p (ou $\mathrm{P}r$) une sphère (pouvant devenir un plan), et l (ou $\mathrm{L}r$) une expression de la forme

$$ix + jy + kz + \mu w_1 + \omega(ix_2 + jy_2 + kz_2) + \omega(ix_3 + jy_3 + kz_3).$$

Une telle expression est caractéristique d'une transformation conforme infinitésimale, ou plutôt du groupe à un paramètre engendré par cette transformation.

En effet, une transformation infinitésimale peut s'écrire

$$1 + l dt,$$

dt étant une quantité scalaire infinitésimale; car tous les autres termes du quadriquaternion sont déterminés par les relations (5^{bis}) et sont des infiniment petits du second ordre.

Dans le cas où la transformation infinitésimale est une transformation par similitude, l se réduit à ce que nous avons appelé un *élément linéaire*.

Les règles de la multiplication sont les mêmes que dans le calcul des triquaternions, savoir :

$$\begin{array}{lll} G.ll' = G'.l'l, & L.ll' = -L.l'l, & P.ll' = P.l'l, \\ G.lp = 0, & L.lp = L.pl, & P.lp = P.pl, \\ G.pp' = G'.p'p, & L.pp' = -L.p'p, & P.pp' = 0. \end{array}$$

Le calcul des triquaternions, comme analyse géométrique, présente la grave défectuosité de ne pas donner directement l'expression d'une droite joignant deux points donnés et celle d'un plan passant par une droite et un point donné.

Le calcul des quadriquaternions ne présente pas cette lacune.

En effet, soient M et M' deux sphères de rayon nul, m et m' les centres de ces sphères; on a

$$LmM' = Lm'M = \text{droite } mm'.$$

De même, si d est une droite, PMd représente le plan déterminé par le point m et la droite d.

Il est à remarquer que PmM', qui représente la sphère décrite sur mm' comme diamètre, est ce que Grassmann a appelé le *produit intérieur de deux points*. C'est ainsi que Grassmann a été amené à introduire la sphère comme élément dans son calcul géométrique.

Il nous faudrait beaucoup trop allonger cette Note pour exposer méthodiquement l'emploi du calcul des quadriquaternions comme procédé d'analyse géométrique.

Il nous suffit d'avoir montré que ce système numérique constitue :

1° Une représentation du groupe géométrique des transformations conformes, le plus important après celui des transformations par similitude;

2° Une analyse géométrique comprenant celle que nous avons déjà exposée ici sous le nom de *calcul des triquaternions* et qui se complète ainsi d'une manière heureuse.