E. LINDELÖF

Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 205-215
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__205_1>

SUR LA CROISSANCE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES DU PREMIER ORDRE;

Par M. Ernst Lindelöf.

Dans son grand Mémoire *Sur les séries divergentes* [1], couronné par l'Académie des Sciences, M. Borel démontre un intéressant théorème sur les limites de croissance des fonctions continues vérifiant une équation différentielle algébrique du premier ordre. Dans la présente Note, nous nous proposons de reprendre cette question, en donnant une nouvelle démonstration, qui nous permettra de généraliser et de compléter sur certains points les résultats obtenus par M. Borel.

1. Étant donnée une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$F(x, y, y') = \Sigma A x^{\alpha} y^{\beta} y'^{\gamma} = 0, \tag{1}$$

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1899, p. 27.

on se propose de chercher une fonction continue et croissante, $\omega(x)$, telle qu'en désignant par $y(x)$ une intégrale réelle quelconque de (1) qui reste continue pour les valeurs de x dépassant une certaine limite, on ait, à partir d'une certaine valeur de x,

$$|y(x)| < \omega(x).$$

Parmi les termes du polynôme F nous distinguerons le terme *principal*

$$T' = A' x^{\alpha'} y^{\beta'} y'^{\gamma'},$$

défini par cette propriété qu'on ait, pour tout autre terme

$$T = A x^{\alpha} y^{\beta} y'^{\gamma}$$

de ce polynôme, ou

$$\beta + \gamma < \beta' + \gamma';$$

ou

$$\beta + \gamma = \beta' + \gamma', \qquad \gamma < \gamma',$$

ou enfin

$$\gamma = \gamma', \qquad \beta = \beta', \qquad \alpha < \alpha'.$$

Soit maintenant $\tau(x)$ une fonction positive croissante telle qu'on ait, quelque grand que soit l'entier positif n,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\tau(x)}{x^n} = \infty. \tag{2}$$

Telles sont, par exemple, les fonctions e^x, $x^{\log x}$, $x^{\log(\log x)}$, ...

Nous allons démontrer d'abord le théorème suivant, qui s'applique à l'équation (1), quel que soit son degré en x, y, y' :

Si $y(x)$ désigne une intégrale réelle de l'équation (1) *qui reste continue pour $x > x_0$, on aura*

$$|y(x)| < \omega(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \tau(x) dx},$$

à partir d'une certaine valeur de x.

Pour $\tau(x) = e^x$, ce théorème se réduit à celui de M. Borel.

Sans nuire à la généralité, on peut évidemment supposer que $\tau'(x) < \tau(x)$, pour $x > x_0$, ce qui revient à admettre que la fonction $\tau(x)$ croît moins vite que e^x et qu'elle jouit d'une certaine régularité. On aura alors

$$\int_{x_0}^{x} \tau(x) dx > \int_{x_0}^{x} \tau'(x) dx = \tau(x) - \tau(x_0),$$

d'où il suit

$$\omega(x) > e^{\tau(x)-\tau(x_0)},$$

et, par suite,

(3) $$\lim_{x=\infty} \frac{\omega(x)}{[\tau(x)]^n} = \infty,$$

quel que soit l'entier n.

2. Cette remarque faite, passons à la démonstration du théorème énoncé. Si celui-ci n'était pas vrai, deux hypothèses seraient *a priori* possibles :

1° L'équation $|y(x)| = \omega(x)$ a des racines supérieures à tout nombre donné, quelque grand qu'il soit.

2° On a, à partir d'une certaine valeur de x, $y(x) > \omega(x)$, ou bien $y(x) < -\omega(x)$.

Plaçons-nous d'abord dans la première hypothèse et imaginons qu'on trace les courbes $y = y(x)$ et $y = \omega(x)$; nous supposons qu'elles se traversent en une infinité de points $P_1, P_2, \ldots$, dont les abscisses $x_1, x_2, \ldots$, tendent vers l'infini : la démonstration est la même si ce sont les courbes $y = y(x)$ et $y = -\omega(x)$ qui se coupent en une infinité de points. Supposons encore, pour fixer les idées, qu'aux points $P_1, P_3, P_5, \ldots$ la courbe $y(x)$ traverse la courbe $\omega(x)$ de bas en haut, tandis qu'elle la traverse de haut en bas aux points $P_2, P_4, P_6, \ldots$. En quelques-uns de ces points les deux courbes pourraient d'ailleurs être tangentes.

Cela posé, on aura, aux points $P_1, P_3, P_5, \ldots$,

$$y'(x) \geqq \omega'(x) = \tau(x)\,\omega(x) = \tau(x)\,y(x),$$

ou bien

$$y'(x) - \tau(x)\,y(x) \geqq 0.$$

Pour les points de la seconde série, $P_2, P_4, P_6, \ldots$, on aura au contraire

$$y'(x) - \tau(x)\,y(x) \leqq 0.$$

Dans chaque intervalle $x_n - x_{n+1}$, il y aura donc au moins une racine de l'équation

$$y'(x) - \tau(x)\,y(x) = 0,$$

et comme d'ailleurs, dans les intervalles $x_1 - x_2, x_3 - x_4, \ldots$, on a $y(x) \geqq \omega(x)$, on voit que les conditions

(4) $$y'(x) = \tau(x)\,y(x), \qquad y(x) \geqq \omega(x),$$

seront vérifiées simultanément pour une infinité de valeurs de x :

$$x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, \qquad \text{où} \qquad \lim_{n=\infty} \xi_n = \infty.$$

Mais ici va apparaître une contradiction. Considérons, en effet, le rapport du terme principal T′ à un autre terme T quelconque. Lorsque x est égal à une des valeurs ξ, on aura

$$\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \text{const.}\, x^{\alpha'-\alpha}[\tau(x)]^{\gamma'-\gamma}[y(x)]^{\beta'+\gamma'-(\beta+\gamma)}.$$

Soit d'abord $\beta + \gamma < \beta' + \gamma'$; on aura

$$\left|\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\right| = |\text{const.}\, x^a \tau^b y^c| \geqq |\text{const.}\, x^a \tau^b \omega^c|,$$

c étant positif; d'où l'on conclut, en se reportant aux égalités (2) et (3), que le rapport considéré augmente indéfiniment lorsque x tend vers l'infini en passant par les valeurs ξ.

On arrive à la même conclusion dans le cas où $\beta + \gamma = \beta' + \gamma'$, $\gamma < \gamma'$, en se servant de l'égalité (2).

Enfin, lorsque $\gamma = \gamma'$, $\beta = \beta'$, $\alpha < \alpha'$, le rapport dont il s'agit se réduit à une puissance positive de x.

Par suite, pour les valeurs ξ_n d'indice suffisamment élevé, le terme principal serait beaucoup plus grand que tous les autres termes, en sorte que l'égalité (1) ne saurait subsister. Donc, la première hypothèse est inadmissible.

3. Montrons maintenant qu'on ne saurait avoir $y(x) > \omega(x)$, pour toute valeur x supérieure à une limite finie x_0. Écrivons

$$(5) \qquad\qquad y'(x) - \tau(x)\, y(x) = \rho(x);$$

la fonction $\rho(x)$ sera continue pour $x > x_0$. Quant au signe de cette fonction, trois cas différents pourront se présenter :

1° $\rho(x)$ *s'annule pour des valeurs de* x *aussi grandes qu'on voudra.* — Pour ces valeurs, les deux conditions (4) seraient vérifiées, et, par suite, on rencontrerait la même contradiction que ci-dessus.

2° $\rho(x) < 0$, *à partir d'une certaine valeur de* x. — L'équation (5) nous donne

$$y(x) = e^{\int \tau(x)\,dx}\left[\text{const.} + \int e^{-\int \tau(x)\,dx}\rho(x)\,dx\right]$$
$$= \omega(x)\left[\text{const.} + \int \frac{\rho(x)}{\omega(x)}\,dx\right].$$

Or, d'après l'hypothèse, on a $y(x) > \omega(x)$, pour les valeurs suffisamment grandes de x. Le second terme entre crochets étant négatif, il faut donc qu'il reste fini et, par suite, on pourra trouver une suite de valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, tendant vers l'infini et telles qu'on ait, lorsque x parcourt ces valeurs,

$$\lim \frac{\rho(x)}{\omega(x)} = 0,$$

et, *a fortiori*,

$$\lim \frac{\rho(x)}{y(x)} = 0.$$

Dès lors, l'équation (5) pourra s'écrire

$$y'(x) = y(x)[\tau(x) - \varepsilon],$$

ε tendant vers zéro lorsque x augmente indéfiniment en passant par les valeurs ξ, et l'on se heurtera donc encore à la même contradiction que dans la première hypothèse.

3° $\rho(x) > 0$ *à partir d'une certaine valeur de* x. — On aura d'après (5),

$$y'(x) > \tau(x)y(x).$$

Mais, comme le montre M. Borel, il existe d'autre part, quelque petit que soit le nombre positif ε, une suite illimitée de valeurs de x, soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$, tendant vers l'infini et telles qu'on ait

$$y'(x) < y^{1+\varepsilon}.$$

En effet, si, à partir d'une certaine valeur x_0, on avait constamment $y'(x) \geqq y^{1+\varepsilon}$, on en tirerait en intégrant

$$\frac{1}{y_0^\varepsilon} - \frac{1}{y^\varepsilon} \geqq \varepsilon(x - x_0),$$

inégalité qui devient absurde dès que x dépasse une certaine limite. Donc, en écrivant

$$y'(x) = \sigma(x)y(x),$$

on aura, pour $x = \xi_1, \xi_2, \ldots,$

$$\tau(x) < \sigma(x) < y^{\varepsilon}.$$

Considérons donc encore le rapport

$$\frac{T'}{T} = \text{const.}\, x^{\alpha'-\alpha} \sigma^{\gamma'-\gamma} y^{\beta'+\gamma'-(\beta+\gamma)}. \tag{6}$$

Si $\beta + \gamma < \beta' + \gamma'$, on aura, en vertu de l'inégalité précédente,

$$\left|\frac{T'}{T}\right| > |\text{const.}\, x^{\alpha'-\alpha} y^{\beta'+\gamma'-(\beta+\gamma)-\varepsilon|\gamma'-\gamma|}|.$$

Donc, en prenant ε assez petit pour qu'on ait

$$\varepsilon|\gamma'-\gamma| < \beta'+\gamma'-(\beta+\gamma),$$

dans le cas où $\gamma > \gamma'$, on voit que le rapport considéré augmentera indéfiniment en valeur absolue lorsqu'on fait tendre x vers l'infini en passant par les valeurs ξ. Il en est de même si l'on a

$$\beta+\gamma = \beta'+\gamma' \qquad \gamma < \gamma',$$

ou encore si

$$\gamma = \gamma', \qquad \beta = \beta', \qquad \alpha < \alpha'.$$

Mais la relation (1) ne saurait alors subsister pour les valeurs ξ d'indice suffisamment élevé.

En somme, nous venons de voir que l'inégalité $y(x) > \omega(x)$ ne saurait avoir lieu pour toutes les valeurs de x supérieures à une certaine limite, et il en est évidemment de même de l'inégalité $y(x) < -\omega(x)$.

Le théorème énoncé au début est donc démontré.

4. Si l'on se donne une équation déterminée de la forme (1), on pourra évidemment resserrer considérablement les limites fournies pour ses intégrales par le théorème que nous venons de démontrer. En effet, en posant

$$\tau(x) = Cx^{\mu},$$

C désignant une constante positive et μ un nombre réel quel-

---

(1) On voit facilement que l'inégalité $\sigma(x) > (1-\varepsilon)Cx^{\mu}$ subsiste encore lorsque μ est compris entre 0 et -1, ce qui ne résulte pas immédiatement de la démonstration précédente.

conque > -1, les considérations qui précèdent nous font voir que, si l'on n'a pas, à partir d'une certaine valeur de x,

$$|y(x)| < e^{C\int x^\mu dx},$$

il existe nécessairement, quelque petit que soit le nombre positif ε, une suite illimitée de valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ tendant vers l'infini et telles qu'en posant

$$y'(x) = \sigma(x)y(x),$$

on ait, pour $x = \xi_i$,

$$(1-\varepsilon)Cx^\mu < \sigma(x) < |y|^\varepsilon, \qquad |y(x)| \geqq \omega(x) = e^{C\int x^\mu dx}\ (1).$$

Or, reportons-nous à l'expression (6) du quotient $\frac{T'}{T}\cdot$ Si

$$\beta + \gamma < \beta' + \gamma',$$

on aura, dès que $\mu > -1$,

$$\lim \left|\frac{T'}{T}\right| = \infty,$$

x tendant vers l'infini par les valeurs ξ. Il en est de même dans le cas où $\gamma = \gamma'$, $\beta = \beta'$, $\alpha < \alpha'$. Reste donc à considérer les termes

$$T'' = A'' x^{\alpha''} y^{\beta''} y'^{\gamma''},$$

dont les exposants vérifient les conditions

$$\beta'' + \gamma'' = \beta' + \gamma', \qquad \gamma'' < \gamma'.$$

Le rapport considéré s'écrira

$$\frac{T'}{T''} = \text{const.}\, x^{\alpha' - \alpha''} \sigma^{\gamma' - \gamma''}.$$

Divers cas pourront se présenter. Si $\alpha'' \leqq \alpha'$ pour tous les termes T'', l'égalité ayant lieu pour l'un au moins de ces termes, il suffit de donner à μ une valeur positive infiniment petite ε pour que l'expression précédente tende vers l'infini lorsque x parcourt les valeurs ξ_i, de sorte qu'on aura, pour les valeurs suffisamment grandes de x,

$$(7) \qquad |y(x)| < e^{Cx^{1+\varepsilon}},$$

C désignant une constante positive quelconque.

Si les différences $\alpha' - \alpha''$ sont toutes positives, posons

$$\mu = -\mu_0 + \varepsilon,$$

en désignant par μ_0 la plus petite des quantités $\frac{\alpha' - \alpha''}{\gamma' - \gamma''}$. On aura, pour $x = \xi_i$,

$$\left|\frac{T'}{T''}\right| > |\text{const.}\, x^\nu|,$$

où

$$\nu = \alpha' - \alpha'' - (\gamma' - \gamma'')(\mu_0 - \varepsilon) = (\gamma' - \gamma'')\left(\frac{\alpha' - \alpha''}{\gamma' - \gamma''} - \mu_0 + \varepsilon\right),$$

ce qui montre que le rapport considéré tendra vers l'infini dès que $\varepsilon > 0$. Dans le cas où $\mu_0 < 1$, on aura donc, à partir d'une certaine valeur de x,

$$(8) \qquad |y(x)| < e^{Cx^{1-\mu_0+\varepsilon}},$$

C désignant une constante positive quelconque. Lorsque $\mu_0 > 1$, cette inégalité doit être remplacée par la suivante

$$|y(x)| < e^{Cx^\varepsilon}.$$

Supposons maintenant que l'une au moins des différences $\alpha' - \alpha''$ soit négative. Soit μ_1 le plus grand des nombres $\frac{\alpha'' - \alpha'}{\gamma' - \gamma''}$. En posant $\mu = \mu_1 + \varepsilon$, on aura, pour $x = \xi_i$,

$$\left|\frac{T'}{T''}\right| > |\text{const.}\, x^\nu|,$$

où

$$\nu = \alpha' - \alpha'' + (\mu_1 + \varepsilon)(\gamma' - \gamma'') = \varepsilon(\gamma' - \gamma'') + (\gamma' - \gamma'')\left(\mu_1 - \frac{\alpha'' - \alpha'}{\gamma' - \gamma''}\right).$$

Donc, quelque petit que soit le nombre positif ε, le rapport précédent augmentera indéfiniment, en valeur absolue, lorsque x tendra vers l'infini en passant par les valeurs ξ. Dès lors on aura, à partir d'une certaine valeur de x,

$$(9) \qquad |y(x)| < e^{Cx^{1+\mu_1+\varepsilon}},$$

C désignant une constante positive quelconque.

Les inégalités (7), (8) et (9) subsisteront évidemment encore pour $\varepsilon = 0$, à condition qu'on donne à C une valeur suffisamment grande pour que les termes T″ ne détruisent pas le terme principal T′.

5. Les remarques qui précèdent vont nous permettre de préciser beaucoup le résultat fourni par le théorème général que nous avons démontré plus haut. Soit, en effet, m le degré de l'équation (1) par rapport à x; on aura, en conservant la notation du numéro précédent,

$$|\alpha'' - \alpha'| \leqq m, \qquad \gamma' - \gamma'' \geqq 1,$$

d'où

$$\mu_1 = \max\left(\frac{\alpha'' - \alpha'}{\gamma' - \gamma''}\right) \leqq m.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une équation différentielle algébrique du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

de degré m par rapport à la variable indépendante x; si cette équation admet une intégrale $y(x)$ qui reste continue pour les valeurs de x dépassant une certaine limite, on aura, à partir d'une certaine valeur de x,

$$|y(x)| < e^{Cx^{m+1}}, \tag{10}$$

C *désignant une constante positive suffisamment grande.*

Voici d'ailleurs comment on détermine la valeur C qu'il convient d'adopter. Dans l'équation (1) substituons $y = e^{Cx^{m+1}}$, et séparons les termes qui, après la substitution, contiendront en facteur la puissance la plus élevée de l'exponentielle; ce sont les termes désignés plus haut par T''. Parmi ces termes, choisissons ceux qui contiennent x au plus haut degré, et égalons à zéro leur somme ; nous aurons ainsi une équation en C :

$$\Sigma c_i C^i = 0,$$

et l'on pourra adopter pour la constante C, dans l'inégalité (10), une valeur positive quelconque supérieure à la racine réelle la plus grande de cette équation.

Le théorème que nous venons de démontrer s'applique évidemment au cas où $m = 0$, c'est-à-dire au cas où l'équation différentielle ne renferme pas la variable x. On aura alors, sous les mêmes conditions que ci-dessus,

$$|y(x)| < e^{Cr},$$

C désignant une constante positive suffisamment grande.

Pour terminer, remarquons que la limite fournie par le théorème précédent est bien précise, puisqu'elle peut être réellement atteinte et qu'elle l'est précisément pour l'équation différentielle qui admet comme intégrale le second membre de l'inégalité (10).

NOTE ADDITIONNELLE.

Après l'impression de la Note précédente, M. Borel, qui a bien voulu en revoir les épreuves, m'a fait observer que la méthode que j'ai suivie permet de préciser davantage la nature des intégrales $y(x)$ de l'équation (1) qui restent continues lorsque x tend vers l'infini. En effet, remarquons d'abord queles courbes $y=y(x)$ et $y = e^{x^r}$ $(r>0)$ ne sauraient, sans se confondre, se couper en une infinité de points dont les abscisses tendent vers l'infini. Dans le cas contraire, en effet, nous avons démontré l'existence d'une suite de valeurs indéfiniment croissantes, $x = \xi_1, \xi_2, \ldots$, telles que

$$y' = rx^{r-1}y, \qquad y \gtreqless e^{x^r}.$$

En substituant, dans l'équation (1), $y' = rx^{r-1}y$, on aurait donc un polynôme en y, x, x^{r-1}, qui devrait s'annuler pour $x = \xi_i$, $y = \eta_i > e^{\xi_i^r}$ $(i = 1, 2 \ldots)$. Or, ceci n'est pas possible, à moins que ce polynôme ne s'annule identiquement et que l'équation (1), par suite, n'admette comme solution générale $y =$ const. e^{x^r}. Nous pouvons donc affirmer que, si l'on a pour des valeurs x aussi grandes qu'on voudra, $|y(x)| > e^{x^r}$, r désignant un nombre positif quelconque, cette inégalité subsistera pour toutes les valeurs x dépassant une certaine limite. Mais nous avons, d'autre part, démontré qu'on a, pour les valeurs suffisamment grandes de x,

$$|y(x)| < e^{x^{m+1+\varepsilon}},$$

en désignant par m le degré en x du premier membre de (1). Par un raisonnement bien connu, nous en concluons l'existence d'un nombre positif ρ tel qu'on ait, quelque petit que soit ε, dès que x dépassera une certaine limite,

$$e^{x^{\rho-\varepsilon}} < |y(x)| < e^{x^{\rho+\varepsilon}}.$$

La fonction $y(x)$ est donc, dans ce cas, suivant la terminologie de M. Borel, du *type exponentiel* e^{x^ρ}. Nous faisons remarquer en passant, que les valeurs possibles du nombre ρ se déterminent par la construction du *polygone de Newton*.

Nous pouvons donc, en somme, énoncer le résultat suivant :

Les intégrales $y(x)$ de l'équation (1) *qui restent continues lorsque x tend vers l'infini, sont du type exponentiel, ou bien restent comprises,* *à partir d'une certaine valeur de x, dans l'intervalle*

$$-e^{x^\varepsilon} < y(x) < e^{x^\varepsilon},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

Observons encore que, pour les intégrales de la première catégorie, toutes les dérivées garderont, pour les valeurs x suffisamment grandes, un signe invariable, lequel doit nécessairement être le signe positif, sans quoi $y(x)$ croîtrait moins vite qu'une certaine puissance de x. Ceci résulte immédiatement du fait que le lieu des points où une dérivée quelconque de $y(x)$ s'annule, est une courbe algébrique. Les intégrales du type exponentiel, ainsi que toutes leurs dérivées, sont donc des fonctions croissantes. Les intégrales de la seconde catégorie pourront, au contraire, présenter différentes espèces d'oscillations, comme le montre la fonction

$$y(x) = x^\mu \sin x + x^\nu,$$

laquelle, pour des valeurs rationnelles de μ et ν, vérifie bien une équation différentielle algébrique du premier ordre.