BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LEAU

Représentation des fonctions par des séries de polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 194-200
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__194_1>

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS PAR DES SÉRIES DE POLYNOMES;

Par M. L. Leau.

1. M. Appell et M. Painlevé ont montré les premiers qu'une fonction holomorphe dans une aire limitée par un contour convexe peut être développée dans cette aire suivant une série de polynômes. C'est un fait intéressant que l'on puisse, par la substitution, à une série de puissances ascendantes de la variable, d'une série de polynômes de degrés croissants, obtenir un mode de représentation de la fonction, valable dans une aire souvent plus étendue que celle du cercle de convergence.

2. J'ai appris que M. Mittag-Leffler a donné, en 1898, dans un périodique publié en langue suédoise, la propriété suivante : Si, de la région qui comprend l'origine et où la fonction donnée est holomorphe, on supprime les prolongements des rayons issus de l'origine et aboutissant aux points singuliers, la fonction est développable en série de polynômes dans la région étoilée ainsi obtenue. Ayant, depuis quelque temps, établi d'une manière indépendante une propriété un peu plus générale ([1]), je crois utile d'en donner ici la démonstration.

([1]) Depuis l'envoi de la présente Communication, M. Mittag-Leffler a donné

3. Figurons une courbe C issue de l'origine O et allant à un point quelconque A. Si l'on multiplie l'affixe de chaque point de C par une constante K, on a une nouvelle courbe. Toutes les lignes ainsi formées constituent une famille telle qu'il existe une courbe et une seule, C_P, de cette famille ayant son extrémité en un point donné P du plan. Cela posé, soit une fonction $F(z)$, holomorphe dans une région $\mathcal{R}$: on pourra former (et d'une infinité de manières) une série de polynômes dont les coefficients sont les produits de ceux de F par des nombres *qui ne dépendent que de la famille de courbes considérée;* et cela de manière que la série représente $F(z)$ *en tout point* P *du plan tel que la courbe* C_P *soit à une distance de tout point singulier, ayant un minimum différent de zéro.*

4. *Calcul préliminaire.* — Soient une fonction $F(z)$ holomorphe dans une certaine aire, et, dans cette aire, deux cercles de même rayon ρ, de centres ω et I, ce dernier centre à l'intérieur du premier cercle. Les développements de F relatifs aux points ω et I sont respectivement

$$f(z) = \sum a_p z^p, \tag{1}$$

$$g(z) = \sum b_p z_p = \sum \frac{f^{(p)}(x)}{p!} z^p, \tag{2}$$

si x désigne l'affixe du point I par rapport à ω.

Mais on suppose qu'on ne connaît des coefficients de $f(z)$ que des valeurs approchées des premiers : $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$; et que l'on substitue à $f(z)$ le polynôme $\varphi(z) = \sum_0^n a'_p z^p$. On en déduit, au lieu de la série $g(z)$, le polynôme

$$\chi(z) = \sum_0^s b'_p z^p = \sum_0^s \frac{\varphi^{(p)}(x)}{p!} z^p,$$

qu'on limitera à un degré s inférieur à n, degré qu'on se réserve de déterminer.

---

une Note (le 15 mai) aux *Comptes rendus,* et publié dans les *Acta mathematica* une démonstration de son théorème, dans laquelle il indique qu'on peut remplacer les droites par d'autres lignes.

Alors on fait l'hypothèse que, pour $p \leqq n$, on ait

$$|a_p - a'_p| < \varepsilon_p,$$

et que ε_p est une somme de termes de la forme

$$\sum A \alpha^{h+p},$$

où A, α et h sont des constantes positives, cette dernière étant de plus un entier et les α inférieures à 1. On se propose de trouver une expression η_p de même forme que ε_p, et telle que l'on ait

$$|b_p - b'_p| < \eta_p \qquad \text{pour } p \leqq s.$$

5. $f(z)$ se compose de deux parties :

$$f_1(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$
$$f_2(z) = a_{n+1} z^{n+1} + \ldots.$$

Posons $|x| = \xi$. Considérons l'erreur qui provient de la différence $f_1(z) - \varphi(z)$. On a évidemment (ξ sera plus petit que 1)

$$\frac{1}{p!} |[f_1^{(p)}(z) - \varphi^{(p)}(z)]_{z=x}| < \sum A \frac{\alpha^{h+p}}{(1-\alpha\xi)^{p+1}}.$$

La seconde erreur résulte de la suppression de $f_2(z)$. Or, soit M une limite supérieure du module de F(z) dans la région considérée et spécialement sur un cercle de centre ω et de rayon R supérieur à ρ. Une fonction majorante de $f_2(z)$ est

$$\frac{M z^{n+1}}{R^{n+1}\left(1 - \frac{z}{R}\right)};$$

son module sur le cercle de rayon ρ est donc inférieur à

$$\frac{M \rho^{n+1}}{R^{n+1}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)};$$

et, par suite,

$$\left|\left(\frac{f_2^{(p)}(z)}{p!}\right)_{z=x}\right| < \frac{M\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)\rho^p\left(1 - \frac{\xi}{\rho}\right)^{p+1}}.$$

ρ sera supposé plus petit que 1; $\frac{\rho}{R}$ et $\frac{\xi}{\rho}$ resteront inférieurs à des nombres plus petits que 1. Il résulte de là que, $\mathfrak{M}$ désignant une nouvelle constante, si l'on choisit par exemple $n > 2s$ et que l'on pose $n = 2s + n'$, on pourra écrire, en désignant par u le plus grand des deux nombres $\frac{\rho}{R}$, $\frac{\rho}{R^2}$, et par l une limite supérieure de $\frac{1}{1-\frac{\xi}{\rho}}$ et des quantités $\frac{1}{1-\alpha\xi}$,

$$|b_p - b'_p| < \mathfrak{M}(ul)^p u^{n'+1} + \sum A\alpha^{h-1}(\alpha l)^{p+1},$$

$\frac{\rho}{R^2}$, de même que $\frac{\rho}{R}$, sera assujetti à rester inférieur à 1. Comme p ne varie dans l'inégalité précédente que de 0 à s, nous prendrons

$$(3) \qquad \eta_p = \mathfrak{M}\, l^s u^{p+n'+1} + \sum A\, l^{s+1} \alpha^{h+p}.$$

C'est bien là une expression de même forme que celle de ε_p.

6. Remarquons enfin que dans $\chi(z)$, ordonné par rapport aux a', le coefficient de a'_m est un polynôme homogène de degré m en x et z.

7. *Démonstration du théorème.* — Soit une courbe C_P de l'espèce considérée, x l'affixe du point P. Inscrivons dans C_P une ligne brisée de t côtés égaux (pour plus de simplicité) et dont les sommets ont pour affixes x_0 (l'origine), x_1, $x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_t$ (ou x). Posons $|x_i - x_{i-1}| = \xi$. La fonction $F(z)$ est supposée holomorphe dans une région $\mathcal{R}$ qui comprend C_P à son intérieur; M désigne le maximum de son module dans cette région. On prend dans les développements successifs approchés et qui sont relatifs aux différents sommets de la ligne brisée, les $n_0 + 1$, $n_1 + 1, \ldots, n_t + 1$ premiers termes ($n_0 \geqq 2n_1$, $n_1 \geqq 2n_2, \ldots$). Ces polynômes sont toujours déterminés, mais les raisonnements ne s'appliquent qu'à partir d'un moment où les cercles de rayon ρ (supérieur à ξ) et qui ont les sommets pour centres, sont tous à

l'intérieur de $\mathfrak{R}$, avec les conditions ρ, $\frac{\rho}{R}$, $\frac{\rho}{R^2}$ inférieures à 1 (les cercles de rayon R étant eux-mêmes à l'intérieur de $\mathfrak{R}$).

Soit

$$f_k(z) = a_{0k} + a_{1k}z + \ldots + a_{pk}z^p + \ldots$$

le développement exact relatif au point $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. On désigne par ε_{pk} une limite supérieure du module de l'erreur commise sur a_{pk} dans le calcul approché. On a, d'après le n° 5,

$$(4)\quad \begin{cases} \varepsilon_{p1} = \mathfrak{M}\, l^{n_1} u^{n_0-2n_1+p+1} & (\varepsilon_{p0} = 0) \quad (p \leqq n_1), \\ \varepsilon_{p2} = \mathfrak{M}\, l^{n_2} u^{n_1-2n_2+p+1} + \varepsilon_{p1} l^{n_2+1} & (p \leqq n_2), \\ \varepsilon_{p3} = \mathfrak{M}\, l^{n_3} u^{n_2-2n_3+p+1} + \varepsilon_{p2} l^{n_3+1} & (p \leqq n_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon_{pt} = \mathfrak{M}\, l^{n_t} u^{n_{t-1}-2n_t+p+1} + \varepsilon_{pt-1} l^{n_t+1} & (p \leqq n_t). \end{cases}$$

On en déduit

$$(5)\quad \begin{cases} \varepsilon_{pt} = \mathfrak{M}\, u^{p+1} (l^{n_t} u^{n_{t-1}-2n_t} + l^{n_{t-1}+n_t+1} u^{n_{t-2}-2n_{t-1}} + \ldots \\ \qquad + l^{n_1+n_2+\ldots+n_t+t-1} u^{n_0-2n_1}). \end{cases}$$

Posons, par exemple,

$$(6)\quad \begin{cases} n_t = 0, \\ n_{t-1} - 2n_t = n_t, \\ n_{t-2} - 2n_{t-1} = n_{t-1} + n_t + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ n_0 - 2n_1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_t + t - 1. \end{cases}$$

Ces égalités détermineront successivement n_t, n_{t-1}, n_{t-2}, … et n_0, et l'on aura

$$(7)\qquad \varepsilon_{0t} < \frac{\mathfrak{M}\, u}{1 - lu},$$

en supposant $lu < 1$.

8. Il résulte de là que, si l'on fait croître t indéfiniment, et si l'on fait tendre ρ vers zéro $\left(\frac{\xi}{\rho}\right.$ restant inférieur à un nombre plus petit que $\left.1\right)$, l'inégalité (7) sera certainement applicable à partir d'un certain moment, et, de plus, ε_{0t} tendra vers zéro.

Or, d'après le n° 6, le coefficient d'une lettre a, a_m par exemple, figurant dans une valeur approchée de $F(x)$, valeur approchée linéaire par rapport aux a, est un polynôme homogène de degré m en x_1, x_2, ... x_t (si les sommets de la ligne brisée correspondante sont o, x_1, x_1+x_2, ..., $x_1+x_2+\ldots+x_t$). En posant

$$x_1=\lambda_1 x, \qquad x_2=\lambda_2 x, \qquad \ldots, \qquad x_t=\lambda_t x.$$

le coefficient de a_m est maintenant le produit de x^m par une expression homogène par rapport aux λ. Soit $P_q(x)$ le polynôme en x ainsi obtenu à la $q^{\text{ième}}$ opération. On aura

$$P_q(x)=\sum a_m \mathcal{A}_{m,q}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t)x^m.$$

9. Supposons qu'on veuille atteindre un autre point P' d'affixe x'. Soit $x'=kx$. La courbe $C_{P'}$ donne lieu aux mêmes expressions approchées. Les points

$$\begin{aligned} x'_1 &= \lambda_1 kx, \qquad x'_1+x'_2=\lambda_1 kx+\lambda_2 kx, \qquad \ldots,\\ x'_1+x'_2+\ldots+x'_t &= \lambda_1 kx+\lambda_3 kx+\ldots+\lambda_t kx \end{aligned}$$

sont les sommets d'une ligne brisée inscrite dans $C_{P'}$, et pour laquelle les mêmes raisonnements sont applicables que pour C_P, dès que $C_{P'}$ est dans la région $\mathcal{R}$. D'ailleurs, le polynôme correspondant est manifestement

$$\sum a_m \mathcal{A}_{m,q}(\lambda_1 kx,\lambda_2 kx,\ldots,\lambda_t kx),$$

c'est-à-dire

$$\sum a_m \mathcal{A}_{m,q}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_t)\,x'^m.$$

Donc, à l'intérieur de toute la région $\mathcal{R}$, on a

$$F(x)=\lim_{q=\infty} P_q(x).$$

De plus, dans toute région $\mathcal{R}'$ finie intérieure à $\mathcal{R}$, le minimum de la distance des deux contours étant différent de zéro, on a constamment, si petit que soit ε,

$$|F(x)-P_q(x)|<\varepsilon,$$

à partir d'un certain moment, car il est visible que pour tous ces points x, le second membre de l'inégalité (7) tend simultanément vers zéro [1].

10. Le développement de $F(x)$ en série de polynômes se déduit immédiatement de ce qui précède.

On a

$$F(x) = P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_q(x) - P_{q-1}(x)] + \ldots,$$

et cette série est absolument et uniformément convergente dans $\mathfrak{R}'$.

11. En particulier, si l'on choisit pour C une droite, on obtient la région étoilée de M. Mittag-Leffler. Si l'on prend l'arc d'un segment de cercle capable d'un angle φ, il faut rejeter les demi-droites issues des points singuliers S et faisant avec OS (dans un sens convenable) l'angle φ.

---

(1) Ces résultats sont à rapprocher de ceux que j'ai indiqués à la fin d'une Note insérée aux *Comptes rendus* le 24 octobre 1898.