BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Mémoire sur les surfaces du troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 96-113

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__96_1>

MÉMOIRE SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE QUI ADMETTENT POUR LIGNE ASYMPTOTIQUE UNE CUBIQUE GAUCHE;

Par M. Ch. Bioche.

J'ai montré (¹) que, si l'on appelle *conjugués* par rapport à une cubique gauche, des points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'une corde de cette cubique, toute surface du troisième ordre qui admet comme ligne asymptotique une cubique gauche peut se définir comme le lieu des conjugués des points d'un plan par rapport à cette cubique, ou le lieu des pôles

(¹) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 217; 1898.

du plan par rapport aux quadriques passant par cette cubique ; j'appelle une pareille surface *conjuguée du plan.*

En général, le plan coupe la cubique en trois points distincts ; ces points sont alors des points doubles, et la surface contient les tangentes à la cubique en ces points ; réciproquement, toute surface du troisième ordre contenant une cubique gauche, possédant sur cette cubique trois points doubles et contenant les tangentes en ces points, admet la cubique comme asymptotique (1).

J'étudie dans ce Mémoire la surface dont je viens de parler, et je complète cette étude en considérant les surfaces correspondant : 1° au cas où le plan coupe la cubique en des points dont deux sont confondus ; 2° au cas où le plan est osculateur à la cubique.

I.

ÉQUATION ET PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE LA SURFACE GÉNÉRALE.

1. *Discussion des surfaces du troisième ordre à trois points doubles.* — J'ai rappelé une propriété caractéristique de celles de ces surfaces qui admettent une cubique gauche comme asymptotique ; on peut en trouver de plus simples. Pour les obtenir, je vais discuter l'équation générale ; celle-ci peut s'écrire, en supposant les points doubles réels,

$$XYZ + (AYZ + BZX + CXY)T + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)T^2 + \delta T^3 = 0,$$

les points doubles étant pris pour sommets du tétraèdre de référence. Si l'on effectue la transformation

$$X + AT = x, \qquad Y + BT = y, \qquad Z + CT = Z,$$

l'équation prend la forme

$$xyz + (ax + by + cz)t^2 + dt^3 = 0.$$

Une surface du troisième ordre, à trois points doubles, contient, en général, douze droites ; on voit immédiatement que ce sont les suivantes :

---

(1) *Voir* Mémoire cité, p. 221 et 227.

1° Trois droites, dans le plan $t = 0$, passant chacune par deux des points doubles;

2° Trois droites dans le plan

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

qui sont les intersections de ce plan par les faces du tétraèdre autres que celle qui contient les points doubles;

3° Six droites formant les couples donnés par les équations

$$\begin{aligned} yz + at^2 &= 0, & by + cz + dt &= 0, \\ zx + bt^2 &= 0, & cz + ax + dt &= 0, \\ xy + ct^2 &= 0, & ax + by + dt &= 0; \end{aligned}$$

ces dernières sont sur une quadrique Q, ayant pour équation

$$bcyz + cazx + abxy + d(ax + by + cz + dt)t + abct^2 = 0.$$

Si la surface du troisième ordre contient une cubique passant par les points doubles, et les tangentes à cette cubique en ces points, les tangentes en question appartiennent au dernier groupe de droites. Je vais donc chercher dans quel cas trois de ces droites peuvent être tangentes à une cubique gauche.

2. On voit immédiatement que, si l'un des coefficients a, b, c, est nul, la quadrique Q se décompose en deux plans; or, deux tangentes à une cubique ne peuvent être dans un même plan. On doit donc supposer $abc \neq 0$; or, dans ce cas, on peut par une transformation homographique conservant le tétraèdre de référence mis en évidence, ramener l'équation à la forme

$$xyz + At(x + y + z - ht) = 0;$$

l'équation de la quadrique Q devient alors

$$yz + zx + xy - ht(x + y + z - ht) + At^2 = 0.$$

On peut remarquer que, si la surface du troisième ordre est conjuguée du plan des points doubles par rapport à une cubique tangente à trois droites passant respectivement par ces points, cette surface doit contenir le pôle du plan par rapport à Q, pôle qui est l'intersection des plans des couples de droites passant par les points doubles.

En effet, s'il existe une cubique gauche réalisant les conditions énoncées elle doit avoir pour tangentes trois génératrices d'un même système de Q; elle doit donc toucher aux points doubles chacune des quadriques inscrites dans Q, le long de la section faite par le plan de ces points; parmi ces quadriques, il y en a une qui contient la cubique; le pôle du plan par rapport à cette quadrique, ou par rapport à Q, doit être sur la surface du troisième ordre. Or ce pôle est donné par

$$x = y = z = \tfrac{1}{2}ht.$$

On trouve alors l'équation de condition

$$h(h^2 + 4\mathrm{A}) = 0.$$

Si l'on suppose que le second facteur est nul, la quadrique Q a pour équation

$$yz + zx + xy - h(x + y + z) + \frac{3h^2}{4} = 0.$$

C'est un cône; les six droites de la surface du troisième ordre sont confondues deux à deux et concourantes. Elles ne peuvent donc être des tangentes à une cubique gauche. Leur point de concours est évidemment un point double de la surface; celle-ci est la surface du troisième ordre à quâtre points doubles.

Ce cas devant être écarté, on ne peut prendre que la solution $h = 0$, et l'équation de la surface devient (¹)

$$xyz + \mathrm{A}(z + y + z)t^2 = 0.$$

3. *Propriétés caractéristiques des surfaces conjuguées de plans à trois points doubles.* — Si le plan $t = 0$ est à l'infini, le point

$$x = y = z = 0$$

est centre de la surface, et il est clair que, si la surface contient une cubique asymptotique, elle en contient une seconde. Il est facile de constater qu'elle contient les cubiques

$$\Gamma \begin{cases} y = \mathrm{K} - \dfrac{4\mathrm{K}^2}{x + \mathrm{K}}, \\ z = -\mathrm{K} - \dfrac{4\mathrm{K}^2}{x - \mathrm{K}}, \end{cases} \qquad \Gamma' \begin{cases} y = -\mathrm{K} - \dfrac{4\mathrm{K}^2}{x - \mathrm{K}}, \\ z = \mathrm{K} - \dfrac{4\mathrm{K}^2}{x + \mathrm{K}}, \end{cases}$$

(¹) M. Poincaré a eu occasion de rencontrer cette surface à propos de recherches sur les fonctions abéliennes (*Journ. de Math.* de M. Jordan, 1895).

J'ai posé $A = K^2$. Il est clair qu'il ne peut y avoir d'autres cubiques asymptotiques, puisque ces cubiques sont les seules tangentes à trois droites passant par les points doubles.

Ces deux cubiques sont sur une même quadrique

$$yz + zx + xy + 9K^2 = 0.$$

On peut, d'après la discussion précédente, considérer une surface du troisième ordre, conjuguée d'un plan, comme caractérisée par les propriétés suivantes :

1° *La surface a trois points doubles, par chacun desquels passent deux droites non situées dans le plan des points doubles.*

2° *Les plans de ces couples de droites se coupent sur la surface.*

Ces propriétés permettraient de reconnaître, sur un modèle de surface du troisième ordre à trois points doubles, si celui-ci représente une conjuguée de plan. Mais on peut encore trouver un énoncé caractéristique plus simple.

4. Il résulte, en effet, de la discussion faite plus haut qu'une surface du troisième ordre à trois points doubles ne peut posséder que trois droites ne passant pas par les points doubles. Dans le cas où la surface est conjuguée d'un plan par rapport à une cubique que ce plan coupe en trois points distincts, ces trois droites existent effectivement et sont concourantes; cette dernière propriété est caractéristique des surfaces que j'étudie.

Donc *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface du troisième ordre à trois points doubles admette une cubique gauche comme asymptotique est que cette surface possède une section plane, composée de trois droites concourantes. ne passant pas par les points doubles.*

Le point de concours de ces droites est une sorte d'ombilic, toutes les sections normales ayant une courbure nulle. D'après une remarque que j'ai signalée autrefois (¹), il doit passer, par le point en question, trois lignes de courbure dont les directions alternent

(¹) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XVIII, p. 150; 1890.

avec celles des droites; si l'équation de la surface est

$$xyz + K^2(x + y + z) = 0,$$

en coordonnées rectangulaires, les lignes de courbure sont évidemment les sections par les plans

$$y = z, \qquad z = x, \qquad x = y,$$

qui sont des plans de symétrie.

5. On sait que l'équation d'une surface du troisième ordre peut s'écrire [1]

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 + D\delta^3 + E\varepsilon^3 = 0,$$

α, β, γ, δ, ε étant des fonctions du premier degré liées par la relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 0.$$

Eckardt, en étudiant les surfaces sur lesquelles trois droites se coupent en un point et sont dans un même plan, a trouvé que, si la surface avait trois points doubles, son équation pouvait s'écrire [2]

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 4(\delta^3 + \varepsilon^3) = 0,$$

les points doubles étant dans le plan

$$\delta - \varepsilon = 0,$$

et correspondant à des valeurs de α, β, γ, δ, ε, proportionnelles aux nombres de l'un des systèmes suivants

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & -2 & -2 & 1 & 1, \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 1, \\ -2 & -2 & 2 & 1 & 1. \end{array}$$

D'après ce que j'ai dit plus haut, la surface est une conjuguée de plan; son ombilic est le point

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

et les trois droites qui y passent sont dans le plan

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

---

(1) SYLVESTER, *Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. VI, p. 199; 1851

(2) ECKARDT, *Math. Annalen*, t. X; 1876.

à l'intersection de celui-ci avec chacun des plans

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0.$$

6. Une surface de la nature de celles dont je viens d'établir les propriétés est déterminée quand on connaît les points doubles et trois droites qui, passant respectivement par ces points, ne se rencontrent pas. Il est facile de voir qu'on obtient la construction suivante, pour le système complet des douze droites de la surface.

Soient α, β, γ les points doubles, A, B, C les droites correspondantes. Soit A′ la droite passant par α et rencontrant B et C; soient B′, C′ des droites définies d'une façon analogue; on forme un hexagone gauche.

Soient a, a' les points conjugués de α sur les côtés de l'hexagone qui passent par α; soient de même b, b' et c, c' les conjugués de β et γ; les droites aa', bb', cc' se coupent en un point ω.

Les douze droites

$$\begin{array}{lll} \beta\gamma, & \gamma\alpha, & \alpha\beta, \\ A, & B, & C, \\ A', & B', & C', \\ aa', & bb', & cc' \end{array}$$

sont situées sur une surface du troisième ordre ayant pour ombilic ω; cette surface a pour cubiques asymptotiques :

1° La cubique tangente, en α, β, γ, aux droites A, B, C;
2° La cubique tangente en α, β, γ, aux droites A′, B′, C′.

II.

REPRÉSENTATION SUR LE PLAN.

7. *Représentation de la surface à trois points doubles sur le plan dont elle est la conjuguée.* — La correspondance qui existe entre les points de la surface et ceux du plan donne immédiatement une représentation de la surface sur le plan. Si l'équation de la surface est

$$xyz + (x + y + z)t^2 = 0,$$

la cubique asymptotique Γ est l'intersection des trois cônes

$$\begin{aligned} yz - (y - z)t + 3t^2 &= 0, \\ zx - (z - x)t + 3t^2 &= 0, \\ xy - (x - y)t + 3t^2 &= 0. \end{aligned}$$

Les plans polaires d'un point (X, Y, Z, O) du plan se coupent en un point (x, y, z, t) tel que

$$\frac{x}{X^2(Y - Z)} = \frac{y}{Y^2(Z - X)} = \frac{z}{Z^2(X - Y)} = -\frac{t}{XYZ}.$$

L'image de la section par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$$

a pour équation

$$\alpha X^2(Y - Z) + \beta Y^2(Z - X) + \gamma Z^2(X - Y) - \delta XYZ = 0.$$

Dans la représentation générale que M. Cremona a donnée des surfaces du troisième ordre (¹), les images des sections planes sont des cubiques passant par six points fondamentaux. Dans la représentation que j'indique les points sont confondus deux à deux aux sommets A, B, C du triangle de référence, les cubiques étant tangentes à trois droites ωA, ωC, ωC. Le point ω est le point de concours des plans osculateurs à Γ, en A, B, C.

8. *Images des droites de la surface.* — 1° Les trois droites qui joignent les points doubles sont leurs propres images, chaque point ayant pour image son conjugué par rapport au segment déterminé par les points doubles;

2° Les droites qui passent par l'ombilic ont pour images les traces ωA, ωB, ωC des plans osculateurs à la cubique Γ;

3° Les tangentes à Γ ont pour images les points A, B, C;

4° Les tangentes à Γ' ont pour images des coniques circonscrites à ABC et ayant pour tangentes deux des droites ωA, ωB, ωC.

Images des coniques. — Par chaque point de la surface passent douze coniques dont les plans passent respectivement par les droites. On obtient facilement leurs images en énumérant les

(¹) *Mémoire de Géométrie pure* (*Journal de Crelle*, t. 68; 1868).

lignes du plan qui ont des conjuguées du deuxième degré ([1]), et en voyant comment ces lignes s'associent avec les images des droites de façon à constituer des images de sections planes.

Soit M un point du plan, on trouve :

1° Les trois coniques passant par A, B, C, M et tangentes à l'une des droites ωA, ωB ou ωC;

2° Les trois coniques passant par M et deux des points A, B, C, les tangentes en ces points passant par ω;

3° Les trois cubiques passant par A, B, C, M, tangentes en A, B, C, à ωA, ωB, ωC, et ayant en un des points A, B, C un point double;

4° Les trois droites MA, MB, MC.

9. *Cubiques tracées sur la surface. Second mode de représentation.* — On peut obtenir les divers systèmes de cubiques tracées sur la surface en cherchant quelles sont les courbes du plan qui ont pour conjuguées des cubiques, ou, plus simplement, les courbes dont les images n'ont que trois points d'intersection avec les images des sections planes, en dehors des points fondamentaux. Mais la représentation précédente a l'inconvénient de posséder des points fondamentaux confondus; on obtient une représentation à points fondamentaux distincts en remplaçant X, Y, Z par $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$. L'équation générale des images des sections planes est alors

$$\alpha YZ(Y-Z)+\beta ZX(Z-X)+\gamma XY(X-Y)+\delta XYZ=0.$$

Les points fondamentaux sont A, B, C et les points A′, B′, C′ où les droites ωA, ωB, ωC coupent les côtés du triangle de référence ABC.

Cette représentation peut se déduire d'une définition géométrique de la surface. En effet les équations qui liaient les coordonnées d'un point (X, Y, Z, O) du plan de la représentation à celles d'un point (x, y, z, t) de la surface pouvaient s'écrire

$$\begin{aligned} yZ+zY-(Y-Z)t&=0,\\ xZ+zX-(Z-X)t&=0,\\ xY+yX-(X-Y)t&=0. \end{aligned}$$

([1]) *Voir*, pour la question du degré de la conjuguée d'une ligne, mes *Recherches sur les surfaces algébriques*, etc. (*Bull. Soc. math. de France*, t. XXVI; 1898).

Si l'on remplace dans ces équations X, Y, Z par $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$, elles deviennent

$$\begin{aligned} & yY + zZ - (Z - Y)t = 0, \\ xX \quad & + zZ - (X - Z)t = 0, \\ xX + yY \quad & - (Y - X)t = 0. \end{aligned}$$

On voit alors que (X, Y, Z, O) représentent les coordonnées d'un point tel que ses plans polaires par rapport aux quadriques

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 + 2(y - z)t &= 0, \\ z^2 + x^2 + 2(z - x)t &= 0, \\ x^2 + y^2 + 2(x - y)t &= 0 \end{aligned}$$

se coupent au point (x, y, z, t). La surface du troisième ordre est donc le lieu des conjuguées des points du plan $T = 0$ par rapport au réseau défini par les trois quadriques précédentes.

Il est facile d'obtenir la représentation des droites et celle des coniques de la surface. Je n'y insiste pas. Pour obtenir les images des cubiques il suffit, comme je l'ai rappelé, de chercher des courbes du plan qui coupent une section plane quelconque en trois points autres que les points fondamentaux. Je ferai simplement l'énumération des systèmes d'images de cubiques ainsi obtenus, après avoir indiqué comment sont représentées les deux cubiques asymptotiques.

10. *Représentation des cubiques* Γ *et* Γ'. — Les points de Γ ont pour conjuguées dans le plan les traces des tangentes, autrement dit la section de la développable des tangentes. Cette courbe est du quatrième ordre, elle a trois rebroussements en A, B, C, les tangentes en ces points étant ωA, ωB, ωC. Son équation est

$$Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2 - 2XYZ(X + Y + Z) = 0;$$

cette courbe est l'image de Γ dans le premier mode de représentation; on en déduit immédiatement l'image de Γ dans le deuxième mode de représentation : c'est la conique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2ZX - 2XY = 0,$$

inscrite dans ABC et ayant pour points de contact A', B', C'.

L'image de Γ' dans le premier mode est l'intersection du plan avec la quadrique qui contient Γ et Γ', car cette quadrique contient les cordes de Γ menées par les points de Γ'. C'est donc la conique

$$YZ + ZX + XY = 0,$$

circonscrite à ABC et ayant pour tangentes les droites conjuguées de ωA, ωB, ωC par rapport aux couples de côtés du triangle.

L'image Γ' dans le deuxième mode de représentation est

$$X + Y + Z = 0,$$

c'est-à-dire la droite qui passe par les conjuguées de A', B' et C' par rapport aux segments BC, CA, AB.

III.

SYSTÈMES DE CUBIQUES GAUCHES.

11. *Énumération des systèmes de cubiques tracées sur la surface.* — Ces systèmes ont les images suivantes :

Premier mode de représentation.	Deuxième mode de représentation.
1° Coniques circonscrites à ABC;	1° Droites;
2° Quartiques à points doubles en A, B, C, ayant pour tangentes ωA, ωB, ωC;	2° Coniques circonscrites à $A'B'C'$;
3° Cubiques circonscrites à ABC tangentes en deux de ces points à des droites passant par ω, et ayant un point double en l'un d'eux;	3° Coniques passant par deux sommets de $A'B'C$ et l'un des sommets opposés de ABC, par exemple $A'B'A$;
4° Coniques passant par deux sommets de ABC et tangentes en l'un d'eux à une droite passant par ω.	4° Coniques passant par deux sommets de ABC et l'un des sommets opposés de $A'B'C'$, par exemple ABA';
5° Quartiques passant par A, B, C; y touchant ωA, ωB, ωC; ayant en un de ces points un point double ordinaire, en un autre un *binode*;	5° Cubiques passant par deux sommets de ABC et par les sommets de $A'B'C'$, ayant en l'un de ces derniers un point double;
6° Droites;	6° Coniques circonscrites à ABC;
7° Courbes du cinquième degré ayant en A, B, C des binodes dont les tangentes sont ωA, ωB, ωC.	7° Quartiques ayant des points doubles en A', B', C' et passant par A, B, C.

On peut vérifier l'énumération précédente en projetant d'un point double les points de la surface sur un plan. On a ainsi une troisième représentation ayant l'inconvénient de ne pas faire jouer le même rôle à tous les points doubles, mais ne donnant comme images que des coniques ou des cubiques unicursales.

12. *Propriétés des systèmes de cubiques.* — On peut reconnaître que l'une quelconque des lignes énumérées peut être assujettie à passer par deux points du plan. On obtient ainsi vingt-deux cubiques passant par deux points de la surface; savoir :

Une cubique de chacun des systèmes 1°, 2°, 6°, 7°, soit quatre cubiques;

Six cubiques de chacun des systèmes 3°, 4°, 5°, soit dix-huit cubiques.

Deux de ces cubiques, 1° et 2°, passent par les trois points doubles.

Six de ces cubiques, 3°, passent par deux points doubles.

Douze de ces cubiques, 4° et 5°, passent par un point double.

Deux de ces cubiques, 6° et 7°, ne passent par aucun point double.

La cubique Γ fait partie du système 2° et Γ' du système 1°; deux cubiques de ces systèmes sont sur une même quadrique, car ces cubiques se coupant en cinq points on peut faire passer une quadrique par ces cinq points et deux couples de deux points pris respectivement sur chaque cubique.

On voit de même que deux cubiques des systèmes 3° passant par les mêmes points doubles sont sur une même quadrique [1]; qu'il en est de même de deux cubiques des systèmes 4° et 5° passant par le même point double, et de deux cubiques des systèmes 6° et 7°.

13. *Projections d'une cubique gauche.* — Parmi les cubiques il y a lieu de signaler celles qui sont sur des cônes contenant Γ; elles ont pour images, dans le premier mode de représentation,

---

[1] Il s'agit de cubiques de systèmes différents, c'est-à-dire, dont les images ne possèdent pas les mêmes points fondamentaux; par exemple les cubiques représentées dans le deuxième mode par des coniques circonscrites à $A'B'A$ et $C'B'C$.

les traces des cônes; autrement dit, les projections de Γ sur le plan des points doubles. Ces projections sont des coniques circonscrites à ABC; on peut déduire de la représentation sur le plan des propriétés caractéristiques des systèmes de coniques, circonscrites à un triangle et susceptibles d'être les projections d'une cubique gauche.

Il suffit de remarquer que les cubiques de la surface du troisième ordre qui sont sur des cônes contenant Γ sont tangentes à Γ, chacune au sommet du cône correspondant; donc leurs images sont tangentes à l'image de Γ. Si l'image d'une de ces cubiques est, dans le premier mode de représentation,

$$\lambda YZ + \mu ZX + \nu XY = 0, \tag{1}$$

son image dans le deuxième mode de représentation est

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0, \tag{2}$$

et la condition pour que cette dernière droite soit tangente à la conique, image de Γ,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2ZX - 2XY = 0,$$

s'exprime par

$$\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = 0. \tag{3}$$

Il s'agit d'interpréter cette équation de condition. Or les tangentes en A, B, C à la conique (1) coupent les côtés opposés du triangle de référence en des points situés sur la droite

$$\frac{X}{\lambda} + \frac{Y}{\mu} + \frac{Z}{\nu} = 0,$$

qu'on peut appeler *droite de Pascal, correspondant à la conique*. L'équation de condition (3) exprime que la droite (2) passe par le point

$$X = Y = Z,$$

c'est-à-dire par le pôle ω du plan par rapport à la cubique.

Donc *la condition pour qu'un faisceau de coniques circonscrites à un triangle soit constitué par les projections d'une cubique gauche est que les droites de Pascal, correspondant aux coniques du faisceau, passent par un point fixe.*

14. On peut remarquer aussi que le pôle de la droite $z = 0$, par rapport à la conique (1), étant donné par

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu} = \frac{Z}{-\nu},$$

l'équation (3) exprime que ce point est sur la conique

$$YZ + ZX - XY = 0,$$

circonscrite à ABC, et ayant pour pôle de $z = 0$ le point ω. Donc on obtient cet autre énoncé : *la condition en question est que le pôle d'un des côtés du triangle, par rapport à chaque conique du faisceau, soit sur une conique circonscrite au triangle.*

Cet énoncé s'applique très simplement dans certains cas; ainsi, si l'on considère les cercles passant par un point A, la condition pour que ces cercles soient les projections d'une cubique gauche est que leurs centres soient sur un cercle passant par A. Le centre ω de ce cercle est le pôle du plan par rapport à la cubique.

15. On voit facilement que si l'on se donne un système (Σ) de coniques possédant les propriétés précédentes, il y a une infinité de cubiques admettant ces coniques comme projections. En effet, la connaissance du système (Σ) ne donne que trois points de la cubique et le pôle du plan des trois points; ou, mieux encore, on peut voir que par deux points de l'espace il passe deux cubiques, se projetant suivant les coniques (Σ).

Si l'on imagine une cubique (Γ), deux des coniques du système de projection se coupent aux points A, B, C, traces de la cubique, et en un quatrième point D, trace de la droite des sommets des cônes ayant ces coniques pour traces. Or il est facile de voir que les droites de Pascal correspondant au faisceau des coniques qui passent par A, B, C, D, enveloppent une conique S inscrite dans ABC, les points de contact étant sur AD, BD, CD. Si donc on se donne deux points, O_1, O_2, et si l'on prend, pour D, la trace de $O_1 O_2$ sur le plan des coniques (Σ), la conique S est déterminée. Les tangentes menées de ω à S sont les droites de Pascal de deux coniques Σ_1, Σ_2 du système (Σ). Celui-ci est constitué par les projections des deux cubiques, intersections soit des cônes $O_1 \Sigma_1$, $O_2 \Sigma_2$, soit des cônes $O_1 \Sigma_2$, $O_2 \Sigma_1$ [1].

---

[1] J'ai donné, dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales de Mathéma-*

16. Les cubiques, intersections de la surface du troisième ordre par les cônes contenant Γ, possèdent des propriétés intéressantes. Si l'on fait une transformation homographique, rejetant à l'infini le plan des points doubles, chacune de ces cubiques est le lieu du milieu des cordes menées par un point de Γ. La surface est alors engendrée par la translation de l'une d'elles.

On déduit alors, des propriétés générales des surfaces de translation [1], que ces cubiques forment deux systèmes conjugués sur la surface, et que chacune est la courbe de contact d'un cône ayant pour sommet le point où une tangente à Γ coupe le plan des points doubles.

La surface, ayant deux cubiques asymptotiques, est donc transformée homographique d'une surface qui peut être considérée, de deux façons différentes, comme surface de translation.

IV.

SURFACES PARTICULIÈRES.

17. *Surface conjuguée d'un plan tangent.* — Si un plan coupe une cubique en un point et la touche en un autre, la conjuguée du plan par rapport à la cubique a deux points doubles, dont l'un doit être considéré comme résultant de la coïncidence de deux points doubles. Je prends pour tétraèdre de référence celui qui se conserve dans une transformation homographique conservant la cubique et le plan. Si l'on représente la cubique par les équations

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{1} = \frac{T}{\lambda},$$

la surface conjuguée du plan $Y = 0$ a pour équation

$$XYZ + Y^2T - 2XT^2 = 0.$$

Cette surface se conserve par les transformations homographiques qui conservent le tétraèdre et la cubique ; on en dé-

tiques (p. 541, 1898), une étude élémentaire du système de coniques constitué par les projections d'une cubique gauche.

(1) Voir les Leçons sur la *Théorie des surfaces*, de M. Darboux, t. I, p. 103.

duit immédiatement qu'elle n'a pas d'autres droites que les suivantes :

1° $T = 0$, $Z = 0$, tangente à Γ, au point où celle-ci coupe le plan $Y = 0$, c'est-à-dire au point double ordinaire;

2° $T = 0$, $Y = 0$, droite joignant les deux points doubles; le plan $Y = 0$ est tangent à la surface tout le long de cette droite;

3° $T = 0$, $X = 0$, intersection des plans osculateurs à Γ, aux deux points doubles de la surface;

4° $X = 0$, $Y = 0$, tangente à Γ, au point où celle-ci touche le plan $Y = 0$, c'est-à-dire un point double qui résulte de la coïncidence de deux points doubles; en ce point le cône des tangentes se décompose en deux plans $X = 0$, $Y = 0$, tangents à la surface, chacun le long d'une droite.

Si une cubique autre que Γ était ligne asymptotique de la surface, elle se conserverait par les transformations conservant le tétraèdre de référence; le plan $Y = 0$ devrait être sécant au point double ordinaire $Y = Z = T = 0$, tangent à l'autre point double $X = Y \doteq T = 0$, de sorte que les équations de la cubique pouraient s'écrire

$$\frac{X}{A\mu^2} = \frac{Y}{B\mu^3} = \frac{Z}{1} = \frac{T}{\mu};$$

l'équation de la conjuguée du plan $Y = 0$, par rapport à cette cubique, serait

$$XYZ + AY^2T - 2BXT^2 = 0,$$

qui ne coïncide avec la première que si

$$A = B = 1.$$

Donc la surface n'admet qu'une cubique comme asymptotique.

18. *Cubiques gauches de la surface.* — On peut obtenir des représentations de la surface sur le plan, analogues à celles que j'ai données pour la surface générale; ces représentations ont l'une et l'autre l'inconvénient de correspondre à des systèmes de points fondamentaux qui ne sont pas tous distincts. Il y a alors avantage à projeter la surface sur le plan $Z = 0$ en prenant pour centre de projection le point double opposé; car on n'a plus, pour images des cubiques gauches de la surface, que des coniques ou des cubiques unicursales et, en outre, on a immédiatement l'équation des cubiques de la surface dans l'espace.

Si l'on suppose le plan $T = o$ à l'infini, la section par le plan

$$Z = AX + BY + C$$

a pour projection, sur le plan $Z = o$,

$$XY(AX + BY + C) + Y^2 - 2X = o.$$

Les courbes représentées par cette équation ont pour asymptote OX, une autre asymptote étant parallèle à OY, elles ont trois points communs en O, la tangente étant OV.

Les coniques qui représentent des cubiques gauches doivent avoir trois points fondamentaux communs avec les images des sections planes; en faisant l'énumération des combinaisons possibles *a priori*, entre les points pris trois à trois, et en écartant celles qui ne donneraient pas des coniques proprement dites, on ne trouve que les suivantes :

1° Les trois points sont à l'infini

$$y(x - \alpha) - \beta = o;$$

2° Deux points sont à l'infini et distincts, le troisième est en O

$$xy - \alpha x - \beta y = o;$$

les cubiques situées sur des quadriques passant par Γ sont données par cette équation;

3° Deux points sont en O, le troisième sur OX à l'infini

$$y(y - \alpha x) - \beta x = o;$$

4° Les trois points sont confondus en O

$$x(\alpha x + \beta y) + y^2 - 2x = o;$$

on peut voir que les seules cubiques à point double qui n'aient avec les images des sections planes que trois points communs, en dehors des points fondamentaux, correspondent aux sections planes passant par le point double à l'infini sur OX. Il n'y a donc pas de cubiques gauches ayant pour images des cubiques planes.

Il est assez remarquable que cette surface particulière admette seulement quatre cubiques gauches passant par deux points, la surface générale en ayant vingt-deux, et la surface plus particulière qui est conjuguée d'un plan osculateur en admettant une double infinité, comme on va le voir.

19. *Surface conjuguée d'un plan osculateur.* — Si la cubique a pour équation

$$\frac{X}{\lambda^3} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

la surface conjuguée du plan $T = 0$ a pour équation

$$XT^2 - 3YZT + 2Z^3 = 0;$$

c'est la surface réglée à directrices confondues, connue sous le nom de *surface de Cayley*. Toute surface de Cayley est susceptible de la définition précédente.

Si le plan $T = 0$ est à l'infini, les asymptotiques sont données par

$$y = z^2 + A, \qquad x = z^3 + 3Az,$$

et la surface est le lieu du milieu des cordes d'une quelconque de ses asymptotiques; elle peut donc s'engendrer d'une infinité de façons par la translation d'une cubique gauche.

On a immédiatement les lignes tracées sur la surface en projetant celle-ci sur le plan $X = 0$; ce qui donne les résultats suivants :

1° Les coniques de la surface ont pour équations

$$y = \tfrac{2}{3}z^2 + pz + q, \qquad x = 3z(pz + q);$$

2° Les cubiques gauches passant par le centre de projection, situé à l'infini sur OX, ont pour équations

$$y = az^2 + bz + c, \qquad x = 3z(az^2 + bz + c) - 2z^3;$$

3° Les autres cubiques sont données par

$$y = \frac{2}{3}z^2 + pz + q + \frac{a}{z-b}, \qquad x = 3z(pz + q) + \frac{3az}{z-b}.$$

Il résulte de là qu'on peut faire passer une cubique par *quatre* points de la surface. Ce fait se constate *a priori*, si l'on remarque qu'un cône du second ordre, passant par la directrice et une génératrice, coupe la surface suivant une cubique.