E. GOURSAT

Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 1-34

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE A n VARIABLES, ANALOGUES A L'ÉQUATION DE MONGE-AMPÈRE (¹).

Par M. E. GOURSAT.

Une équation de Monge-Ampère

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + F = 0, \tag{1}$$

où A, B, C, D, F sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q,

(¹) Les équations dont il s'agit dans ce travail ont déjà été étudiées par M. Vivanti dans deux Mémoires :

Sulle equazioni a derivate parziali del secondo ordine a tre variabili indipendenti (*Mathematische Annalen*, t. XLVIII, p. 474-513).

Contribuio alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Sc. e Lett.*, serie II, vol. XXIX; 1896).

Mais le point de départ de l'auteur est tout à fait différent de celui que j'ai adopté, et qui repose sur la considération des caractéristiques. D'un autre côté, M. Vivanti ne s'est pas occupé du principal problème que j'avais en vue, c'est-à-dire de la formation des équations du second ordre admettant deux intégrales intermédiaires distinctes.

Voir aussi sur ce sujet :

FORSYTH, *Cambridge philosophical Transactions*, vol. XVI, Part III, p. 191-218.

JOSEF KURSCHAK, *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie*, t. XIV, Budapest; 1898.

Les principaux résultats de mon Mémoire ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVII, p. 603-606; 24 octobre 1898).

peut être considérée comme provenant de l'élimination du rapport $\frac{dy}{dx}$ entre deux équations linéaires et homogènes en dx, dy, dp, dq, et la considération des multiplicités d'éléments à une dimension satisfaisant à ces deux relations, joue un rôle fondamental daus l'étude de l'équation (1) (voir *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, t. I, Chap. II). Les résultats obtenus dans le cas de deux variables indépendantes s'étendent sans difficulté aux équations à un nombre quelconque de variables indépendantes, comme je l'indiquerai d'abord rapidement.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes, z une fonction de ces variables; nous emploierons la notation

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donnons-nous arbitrairement un système de n relations distinctes, linéaires et homogènes en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, dp_1, \ldots, dp_n$, les coefficients étant des fonctions quelconques de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Si l'on remplace dp_i par

$$p_{i1}dx_1 + p_{i2}dx_2 + \ldots + p_{in}dx_n,$$

l'élimination de $dx_1, \ldots, dx_n$ entre les n relations obtenues conduit à une équation du second ordre d'une forme particulière qui, au point de vue où nous nous plaçons, doit être considérée comme analogue à l'équation (1).

Pour étudier de plus près les équations ainsi obtenues, supposons d'abord que l'on parte de n relations résolues par rapport à $dp_1, \ldots, dp_n$

$$(2) \qquad \begin{cases} dp_1 + \alpha_{11}dx_1 + \ldots + \alpha_{1n}dx_n = 0, \\ dp_2 + \alpha_{21}dx_1 + \ldots + \alpha_{2n}dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dp_n + \alpha_{n1}dx_1 + \ldots + \alpha_{nn}dx_n = 0; \end{cases}$$

si l'on remplace dp_i par $p_{i1}dx_1 + \ldots + p_{in}dx_n$, puis qu'on élimine $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, on est conduit à l'équation du second ordre

$$(3) \qquad \Pi = \begin{vmatrix} p_{11}+\alpha_{11} & p_{12}+\alpha_{12} & \ldots & p_{1n}+\alpha_{1n} \\ p_{21}+\alpha_{21} & p_{22}+\alpha_{22} & \ldots & p_{2n}+\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ p_{n1}+\alpha_{n1} & p_{n2}+\alpha_{n2} & \ldots & p_{nn}+\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est évidemment d'une forme très particulière. Adjoignons aux relations (2) la relation

$$(4)\qquad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = 0,$$

et convenons, comme dans le cas de deux variables indépendantes, d'appeler *multiplicité caractéristique* toute suite simplement infinie d'éléments du premier ordre satisfaisant aux équations (2) et (4); ces multiplicités, étant définies par $(n+1)$ relations entre $(2n+1)$ variables, dépendent de $(n-1)$ fonctions arbitraires d'une variable. D'après la façon même dont on a obtenu l'équation (3), il est clair que toute intégrale de cette équation est un lieu de multiplicités caractéristiques, et le problème de l'intégration peut être posé de la façon suivante :

Trouver une multiplicité n fois étendue d'éléments unis du premier ordre telle que, par chacun de ces éléments, il passe une multiplicité caractéristique située tout entière sur cette multiplicité à n dimensions.

Le déterminant H ne changeant pas quand on permute α_{ik} et α_{ki}, il s'ensuit que l'équation (3) possède un second système de caractéristiques dont on obtient les équations différentielles en permutant α_{ki} et α_{ik} dans les équations (2). Ces deux systèmes de caractéristiques sont en général distincts; pour qu'ils soient identiques, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

2. L'équation (3) ne possède que ces deux familles de caractéristiques; en d'autres termes, une équation du second ordre ne peut être mise sous la forme d'un déterminant tel que H que de deux façons, si la chose est possible. Nous nous appuierons pour cela sur le lemme suivant, qui est à peu près évident :

Étant donné un discriminant bordé

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_n & 0 \end{vmatrix},$$

où $a_{ik} = a_{ki}$, ce discriminant ne peut être nul identiquement, *quels que soient les éléments a_{ik}, à moins que tous les éléments de la dernière ligne, ou tous ceux de la dernière colonne, ne soient nuls simultanément.*

En effet, pour que ce déterminant soit nul, quels que soient les coefficients a_{ik}, il faut évidemment que l'on ait, quels que soient les indices i et k,

$$u_i v_k + u_k v_i = 0;$$

si l'un des éléments de la dernière colonne, u_i par exemple, n'est pas nul, la relation précédente donne, en faisant $k = i$, $v_i = 0$; en faisant successivement $k = 1, 2, \ldots, n$, on en déduit successivement $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$. Le lemme est donc démontré.

Cela posé, étant donnée une équation de la forme (3), considérons un système de n relations linéaires en $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ de la forme suivante :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{12} + \ldots + \lambda_n p_{1n} + \mu_1 = 0, \\ \lambda_1 p_{21} + \lambda_2 p_{22} + \ldots + \lambda_n p_{2n} + \mu_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1 p_{n1} + \lambda_2 p_{n2} + \ldots + \lambda_n p_{nn} + \mu_n = 0, \end{array}\right.$$

à coefficients indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, et cherchons à quelles conditions doivent satisfaire ces coefficients pour que l'équation (3) soit une conséquence des relations (5). Pour reconnaître s'il en est ainsi, on peut imaginer que l'on procède comme il suit : supposant que λ_1 n'est pas nul, ce qui ne restreint pas la généralité, on peut tirer des équations (5) les dérivées p_{11}, $p_{12}, \ldots, p_{1n}$ exprimées au moyen des dérivées p_{ik}, où les indices i et k sont supérieurs à l'unité. Ces dérivées étant remplacées par leurs valeurs dans le premier membre de l'équation (3), il faudra exprimer que le résultat est identiquement nul, quelles que soient les valeurs des dérivées $p_{22}, p_{23}, \ldots, p_{nn}$.

Le calcul peut se faire comme il suit. Posons

$$\begin{gathered} A_i = \lambda_1 \alpha_{i1} + \lambda_2 \alpha_{i2} + \ldots + \lambda_n \alpha_{in} - \mu_i, \\ B_k = \lambda_1 \alpha_{1k} + \lambda_2 \alpha_{2k} + \ldots + \lambda_n \alpha_{nk} - \mu_k, \\ C = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n = \lambda_1 B_1 + \ldots + \lambda_n B_n \\ (i, k = 1, 2, \ldots, n); \end{gathered}$$

quelques combinaisons faciles de lignes et de colonnes permettent de remplacer l'équation (3) par la nouvelle équation

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} C & B_2 & \ldots & B_n \\ A_2 & p_{22}+\alpha_{22} & \ldots & p_{2n}+\alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ A_n & p_{n2}+\alpha_{n2} & \ldots & p_{nn}+\alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

en tenant compte, bien entendu, des relations (5). Cette nouvelle équation, ne renfermant plus que les dérivées p_{ik}, où les indices i et k sont au moins égaux à 2, doit se réduire à une identité. Il y a un seul terme en $p_{22} \ldots\ldots p_{nn}$ dont le coefficient est C; on doit donc avoir $C = 0$. D'une manière générale, si l'on ne tient compte que des termes du degré $(n-1)$ par rapport aux dérivées, on voit que le discriminant bordé

$$\begin{vmatrix} 0 & B_2 & \ldots & B_n \\ A_2 & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

doit être identiquement nul. D'après le lemme démontré tout à l'heure, ceci ne peut avoir lieu que si l'on a à la fois

$$A_2 = A_3 = \ldots = A_n = 0,$$

ou bien

$$B_2 = B_3 = \ldots = B_n = 0.$$

En résumé, *pour que tous les systèmes de valeurs des dérivées* p_{ik}, *qui vérifient les équations linéaires* (5), *vérifient aussi l'équation* (3), *il faut et il suffit que les coefficients* λ_i, μ_k *satisfassent à l'un des deux systèmes de conditions* (A) *ou* (B),

$$(A)\qquad \begin{cases} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \ldots + \lambda_n\alpha_{1n} - \mu_1 = 0, \\ \lambda_1\alpha_{21} + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_n\alpha_{2n} - \mu_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \lambda_1\alpha_{n1} + \lambda_2\alpha_{n2} + \ldots + \lambda_n\alpha_{nn} - \mu_n = 0; \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{21} + \ldots + \lambda_n\alpha_{n1} - \mu_1 = 0, \\ \lambda_1\alpha_{12} + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_n\alpha_{n2} - \mu_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \lambda_1\alpha_{1n} + \lambda_2\alpha_{2n} + \ldots + \lambda_n\alpha_{nn} - \mu_n = 0; \end{cases}$$

la réciproque est d'ailleurs évidente.

Revenons maintenant à la question proposée. Etant donnée une équation de la forme (3), si elle admet un système de caractéristiques défini par les équations différentielles

$$\begin{aligned} &dp_1 + \beta_{11}\,dx_1 + \ldots + \beta_{1n}\,dx_n = 0, \\ &dp_2 + \beta_{21}\,dx_1 + \ldots + \beta_{2n}\,dx_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &dp_n + \beta_{n1}\,dx_1 + \ldots + \beta_{nn}\,dx_n = 0, \end{aligned}$$

c'est que cette équation provient de l'élimination de n paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entre les n relations linéaires

$$(7) \quad \lambda_1 p_{i1} + \lambda_1 p_{i2} + \ldots + \lambda_n p_{in} + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_n \beta_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite, tous les systèmes de valeurs des dérivées p_{ik} qui satisfont aux relations (7) vérifient aussi l'équation (3), et cela, quels que soient les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Or, d'après le résultat qui vient d'être établi, cela ne peut avoir lieu que si ces n coefficients et les n quantités $\mu_i = \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_n \beta_{in}$ satisfont aux conditions (A) ou aux conditions (B). Dans le premier cas, on doit avoir

$$\lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_n \alpha_{in} = \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_n \beta_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et comme les λ_i sont arbitraires, il faut que l'on ait

$$\beta_{ik} = \alpha_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

on retrouve ainsi le premier système de caractéristiques. Les conditions (B) conduiraient de même au second système de caractéristiques.

3. On arrive encore au même résultat par la méthode suivante, qui offre l'avantage de se prêter au calcul pratique. Posons pour abréger

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{vmatrix};$$

l'équation (3) développée est une fonction linéaire de Δ et de ses dérivées partielles $\frac{\partial \Delta}{\partial p_{ik}}, \frac{\partial^2 \Delta}{\partial p_{ik}\,\partial p_{hl}}, \ldots$, dont les coefficients sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ seulement. Mais, inversement, toute expression linéaire en $\Delta, \dfrac{\partial\Delta}{\partial p_{11}}, \cdots$ ne peut pas être mise sous la forme (3), lorsque n est supérieur à 2.

Bornons-nous, pour simplifier les calculs, au cas de $n=3$; la méthode est d'ailleurs la même, quel que soit n. L'équation du second ordre développée est alors

$$\begin{aligned}
&\Delta + \alpha_{11}(p_{22}p_{33}-p_{23}^2)+\alpha_{22}(p_{11}p_{33}-p_{13}^2)+\alpha_{33}(p_{11}p_{22}-p_{12}^2)\\
&\quad+(\alpha_{12}+\alpha_{21})(p_{13}p_{23}-p_{12}p_{33})+(\alpha_{13}+\alpha_{31})(p_{12}p_{32}-p_{13}p_{22})\\
&\quad+(\alpha_{23}+\alpha_{32})(p_{21}p_{31}-p_{23}p_{11})\\
&\quad+(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})p_{11}+(\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})p_{22}\\
&\quad+(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})p_{33}+[\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{33}(\alpha_{12}+\alpha_{21})]p_{12}\\
&\quad+[\alpha_{32}\alpha_{21}+\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{22}(\alpha_{13}+\alpha_{31})]p_{13}\\
&\quad+[\alpha_{21}\alpha_{13}+\alpha_{31}\alpha_{12}-\alpha_{11}(\alpha_{23}+\alpha_{32})]p_{23}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=0.
\end{aligned}$$

En identifiant cette équation avec une équation de la forme

$$\begin{aligned}
&\Delta + A(p_{22}p_{33}-p_{23}^2)+B(p_{11}p_{33}-p_{13}^2)+C(p_{11}p_{22}-p_{12}^2)\\
&\quad+D(p_{13}p_{23}-p_{12}p_{33})+E(p_{13}p_{32}-p_{13}p_{22})\\
&\quad+F(p_{21}p_{31}-p_{23}p_{11})+Gp_{11}+Hp_{22}\\
&\qquad\qquad\qquad+Kp_{33}+Lp_{12}+Mp_{13}+Np_{23}+P=0,
\end{aligned}$$

où A, B, C, ..., P ne dépendent que de $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$, on a immédiatement

$$\alpha_{11}=A,\quad \alpha_{22}=B,\quad \alpha_{33}=C,\quad \alpha_{12}+\alpha_{21}=D,\quad \alpha_{13}+\alpha_{31}=E,\quad \alpha_{23}+\alpha_{32}=F,$$
$$\alpha_{23}\alpha_{32}=BC-G,\qquad \alpha_{13}\alpha_{31}=AC-H,\qquad \alpha_{12}\alpha_{21}=AB-K,$$
$$\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{32}=L+CD,\qquad \alpha_{21}\alpha_{32}+\alpha_{12}\alpha_{23}=M+BE,$$
$$\alpha_{21}\alpha_{13}+\alpha_{31}\alpha_{12}=N+AF,$$
$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{vmatrix}=P;$$

α_{12} et α_{21}, par exemple, sont racines de l'équation du second degré

$$\alpha^2-D\alpha+AB-K=0,$$

et l'on aura ensuite $\alpha_{13}, \alpha_{31}, \alpha_{23}, \alpha_{32}$ au moyen des équations linéaires

$$\alpha_{13}+\alpha_{31}=E,\qquad \alpha_{21}\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{31}=N+AF,$$
$$\alpha_{23}+\alpha_{32}=F,\qquad \alpha_{21}\alpha_{32}+\alpha_{12}\alpha_{23}=M+BE.$$

Il ne restera plus qu'à examiner si les valeurs ainsi obtenues pour les coefficients α_{ik} satisfont à toutes les conditions précédentes; la détermination de ces coefficients dépend, comme on devait s'y attendre, de la résolution d'une équation du second degré.

Dans le cas particulier où l'on aurait $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, la méthode précédente pour le calcul des autres coefficients devient illusoire. On commencera par déterminer les coefficients $(\alpha_{13}, \alpha_{31})$ ou $(\alpha_{23}, \alpha_{32})$; si l'on avait à la fois

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \qquad \alpha_{13} = \alpha_{31}, \qquad \alpha_{23} = \alpha_{32},$$

il n'y aurait qu'à vérifier si ces valeurs des coefficients α_{ik} satisfont à toutes les équations de condition. S'il en est ainsi, l'équation du second ordre a ses deux systèmes de caractéristiques confondus.

4. On peut rattacher les propriétés précédentes des équations (3) à une théorie plus générale. Soit

$$(8) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, p_{11}, \ldots, p_{nn}) = 0$$

une équation du second ordre de forme quelconque; posons, pour abréger,

$$P_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et considérons la forme auxiliaire

$$(9) \qquad I = \sum_i \sum_k P_{ik} \xi_i \xi_k,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignent n variables auxiliaires, que nous appellerons la *forme associée* à l'équation (8).

Pour que l'équation (8) admette une famille de caractéristiques *linéaires* [1], il faut et il suffit que la forme associée soit décomposable en un produit de deux facteurs linéaires en $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Soit $\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \ldots + \lambda_n \xi_n$ l'un de ces facteurs linéaires; si

---

[1] *Voir* une Note que j'ai publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXVI, p. 1332-1335; 9 mai 1898), et dont les résultats seront établis dans un Mémoire plus étendu.

l'on pose

$$\frac{dx_1}{\lambda_1} = \frac{dx_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\lambda_n},$$

on peut ajouter à l'équation $F = 0$ un certain nombre d'autres relations entre dp_{11}, dp_{12}, …, dp_{nn}, et l'on est ainsi conduit à considérer une famille de caractéristiques du *second ordre* pour l'équation proposée. Appliquons cette théorie à l'équation (3); la forme associée à cette équation a pour expression

$$I = A_{11}\xi_1^2 + \ldots + A_{nn}\xi_n^2 + \sum (A_{ik} + A_{ki})\xi_i\xi_k \qquad (i \neq k),$$

A_{ik} désignant le mineur de H correspondant à l'élément $p_{ik} + \alpha_{ik}$. On a identiquement

$$A_{11} I = (A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + \ldots + A_{1n}\xi_n)(A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + \ldots + A_{n1}\xi_n),$$

car la relation $H = 0$ entraîne les suivantes

$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} &= A_{12}A_{21}, & \ldots, \quad A_{11}A_{nn} &= A_{1n}A_{n1}, \\ A_{11}A_{ik} &= A_{1k}A_{i1}, & A_{11}A_{ki} &= A_{1i}A_{k1}; \end{aligned}$$

la forme I est donc le produit de deux formes linéaires. Pour avoir un des systèmes de caractéristiques, il faut, d'après la théorie générale, poser

$$(10) \qquad \frac{dx_1}{A_{11}} = \frac{dx_2}{A_{12}} = \ldots = \frac{dx_n}{A_{1n}};$$

mais ici il se présente une simplification qui ne se présente pas dans le cas général, car on peut se borner à considérer les dérivées du premier ordre. En effet, l'équation $H = 0$ peut s'écrire

$$A_{11}(p_{11} + \alpha_{11}) + A_{12}(p_{12} + \alpha_{12}) + \ldots + A_{1n}(p_{1n} + \alpha_{1n}) = 0;$$

remplaçons-y A_{11}, A_{12} …, A_{1n} par les quantités proportionnelles dx_1, dx_2, …, dx_n; il vient

$$dp_1 + \alpha_{11}\,dx_1 + \ldots + \alpha_{1n}\,dx_n = 0,$$

et l'on obtiendrait de même les autres équations différentielles des caractéristiques du premier ordre (2). Le second facteur linéaire de I fournira le second système de caractéristiques du premier ordre de l'équation (3).

5. Nous avons supposé jusqu'ici que l'on partait d'un système de n relations linéaires résolues par rapport à $dp_1, dp_2, \ldots, dp_n$. Si l'on part d'un système de n relations linéaires *quelconques* en $dx_1, \ldots, dx_n, dp_1, \ldots, dp_n$, telles que

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{c} a_{i1}dp_1 + \ldots + a_{in}dp_n + b_{i1}dx_1 + \ldots + b_{in}dx_n = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, n, \end{array} \right.$$

où les coefficients a_{ik} et b_{ik} sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$, l'élimination de $dx_1, \ldots, dx_n$ conduit à l'équation du second ordre

$$(12)\quad \begin{vmatrix} a_{11}p_{11} + a_{12}p_{12} + \ldots + a_{1n}p_{1n} + b_{11} & \ldots & a_{11}p_{1n} + \ldots + a_{1n}p_{nn} + b_{1n} \\ a_{21}p_{11} + \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}p_{11} + \ldots + a_{nn}p_{1n} + b_{n1} & \ldots & a_{n1}p_{1n} + \ldots + a_{nn}p_{nn} + b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

dont le développement est une fonction linéaire de Δ et de ses dérivées partielles. On pourrait raisonner sur cette équation comme on l'a fait sur l'équation (3), mais il nous suffit de remarquer qu'une transformation de contact permet toujours de ramener le cas général au cas particulier où les équations linéaires (11) sont résolues par rapport à $dp_1, dp_2, \ldots, dp_n$. Soit, en effet, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction ne satisfaisant pas à l'équation (12); si l'on remplace z par $z + f$, la nouvelle équation n'étant pas vérifiée pour $z = 0$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

doit être différent de zéro. On peut donc résoudre les équations linéaires (11) par rapport à $dx_1, \ldots, dx_n$, et, si l'on emploie maintenant la transformation de Legendre généralisée

$$x_1 = P_1, \quad \ldots, \quad x_n = P_n, \quad p_1 = -X_1, \quad \ldots, \quad p_n = -X_n,$$
$$z = Z - P_1X_1 - \ldots - P_nX_n,$$

on est ramené à un système d'équations linéaires résolues par rapport à $dP_1, \ldots, dP_n$.

Pour établir les propriétés de l'équation générale (12), qui se conservent par une transformation de contact, on peut donc se borner au cas où les équations différentielles des caractéristiques (11) sont résolues par rapport à $dp_1, dp_2, \ldots, dp_n$. Ainsi, *toute équation de la forme générale* (12) *possède deux familles de caractéristiques du premier ordre, qui sont, en général, distinctes; toute transformation de contact, appliquée à une équation de cette forme, la change en une équation de même forme, et transforme les caractéristiques en caractéristiques.*

Remarque (¹). — Lorsque les équations différentielles des caractéristiques sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} dx_2 - \mu_2 dx_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad dx_n - \mu_n dx_1 = 0, \\ \qquad a_1 dp_1 + \ldots + a_n dp_n + b\, dx_1 = 0, \end{array}\right.$$

l'équation du second ordre correspondante est *linéaire par rapport aux dérivées du second ordre,* et elle a pour forme associée

$$I = (a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n)(\xi_1 + \mu_2\xi_2 + \ldots + \mu_n\xi_n);$$

inversement, toute équation linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, dont la forme associée est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires, admet deux familles de caractéristiques du premier ordre. Les équations de cette espèce sont donc des cas particuliers des équations de la forme (12), comme l'équation linéaire en r, s, t, dans le cas de deux variables, est un cas particulier de l'équation de Monge-Ampère.

6. Revenons à l'équation (3) et à ses deux systèmes de caractéristiques du premier ordre

$$(A) \quad \left\{\begin{array}{ll} dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0, & \\ dp_i + \alpha_{i1} dx_1 + \ldots + \alpha_{in} dx_n = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array}\right.$$

$$(B) \quad \left\{\begin{array}{ll} dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0, & \\ dp_k + \alpha_{1k} dx_1 + \ldots + \alpha_{nk} dx_n = 0 & (k = 1, 2, \ldots, n); \end{array}\right.$$

l'étude de l'équation (3) est liée à la recherche des combinaisons

(¹) D'une manière générale, lorsque parmi les équations différentielles des caractéristiques, il y en a r indépendantes de $dp_1, \ldots, dp_n$, et r seulement, l'équation du second ordre correspondante est de degré $n - r$ par rapport aux dérivées du second ordre.

intégrables des équations différentielles de chacun de ces systèmes. V étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, p_n$, pour que $dV = 0$ soit une combinaison linéaire des équations (A), il faut et il suffit qu'en remplaçant dans dV les différentielles dz, $dp_1, \ldots, dp_n$ par leurs expressions (A), le résultat soit identiquement nul, quels que soient $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. En faisant cette substitution, on arrive aux n équations simultanées

$$(13)\quad \begin{cases} X_1(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial V}{\partial z} - \alpha_{11} \dfrac{\partial V}{\partial p_1} - \alpha_{21} \dfrac{\partial V}{\partial p_2} - \ldots - \alpha_{n1} \dfrac{\partial V}{\partial p_n} = 0, \\ X_2(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial V}{\partial z} - \alpha_{12} \dfrac{\partial V}{\partial p_1} - \alpha_{22} \dfrac{\partial V}{\partial p_2} - \ldots - \alpha_{n2} \dfrac{\partial V}{\partial p_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial V}{\partial z} - \alpha_{1n} \dfrac{\partial V}{\partial p_1} - \alpha_{2n} \dfrac{\partial V}{\partial p_2} - \ldots - \alpha_{nn} \dfrac{\partial V}{\partial p_n} = 0, \end{cases}$$

que l'on obtiendrait en remplaçant, dans les n dernières équations (B), dx_i par $\frac{\partial V}{\partial p_i}$ et dp_k par $-\left(\frac{\partial V}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial V}{\partial z}\right)$. Pour que $dU = 0$ soit une combinaison intégrable des équations (B), on obtiendra de même les conditions

$$(14)\quad \begin{cases} Y_1(U) = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial U}{\partial z} - \alpha_{11} \dfrac{\partial U}{\partial p_1} - \alpha_{12} \dfrac{\partial U}{\partial p_2} - \ldots - \alpha_{1n} \dfrac{\partial U}{\partial p_n} = 0, \\ Y_2(U) = \dfrac{\partial U}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial U}{\partial z} - \alpha_{21} \dfrac{\partial U}{\partial p_1} - \alpha_{22} \dfrac{\partial U}{\partial p_2} - \ldots - \alpha_{2n} \dfrac{\partial U}{\partial p_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n(U) = \dfrac{\partial U}{\partial x_n} + p_n \dfrac{\partial U}{\partial z} - \alpha_{n1} \dfrac{\partial U}{\partial p_1} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \alpha_{nn} \dfrac{\partial U}{\partial p_n} = 0. \end{cases}$$

On démontre immédiatement l'identité

$$[U,V] = \frac{\partial V}{\partial p_1} Y_1(U) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial p_n} Y_n(U) - \frac{\partial U}{\partial p_1} X_1(V) \ldots - \frac{\partial U}{\partial p_n} X_n(V),$$

$[U, V]$ étant le crochet de Jacobi

$$[U,V] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial p_i}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial p_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U}{\partial z}\right);$$

par conséquent, *si $dU = 0$, $dV = 0$ sont deux combinaisons intégrables appartenant à deux systèmes de caractéristiques différents, les fonctions U et V sont toujours en involution.*

Si, en particulier, $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, les deux systèmes (13) et (14) sont identiques et *deux intégrales quelconques de ce système sont toujours en involution*.

Chacun des systèmes (13) et (14) admet au plus $n+1$ intégrales distinctes. Pour que le système (13), par exemple, admette le nombre maximum d'intégrales, il faudra qu'il forme un système jacobien, c'est-à-dire que l'on ait identiquement, quels que soient les indices i et k,

$$X_i[X_k(V)] - X_k[X_i(V)] = 0;$$

or, le coefficient de $\frac{\partial V}{\partial z}$ dans cette combinaison est

$$\alpha_{ik} - \alpha_{ki}.$$

On doit donc avoir $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ et l'on en conclut qu'*un des systèmes de caractéristiques ne peut admettre $n+1$ intégrales distinctes que si les deux familles de caractéristiques sont confondues*. Cette condition nécessaire n'est d'ailleurs pas suffisante.

7. Plaçons-nous dans le cas où l'un des systèmes (13) ou (14), le système (13), par exemple, admet n intégrales distinctes $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Toute intégrale de l'équation du second ordre proposée peut être considérée comme un lieu de caractéristiques linéaires issues des divers éléments d'une multiplicité $(n-1)$ fois étendue M_{n-1} d'éléments du premier ordre; le long de M_{n-1}, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant des fonctions de $(n-1)$ variables seulement, sont liées par une relation

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \tag{15}$$

et, comme $u_1, u_2, \ldots, u_n$ restent constants tout le long d'une caractéristique, il s'ensuit que la relation (15) s'applique à tous les éléments de l'intégrale considérée.

Inversement, quelle que soit la fonction F, toutes les intégrales de l'équation (15), sauf peut-être les intégrales singulières, satisfont à l'équation du second ordre. D'une façon plus générale, si $dU = 0$ est une combinaison intégrable des équations différentielles (B), toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$U = C,$$

sauf les intégrales singulières, vérifient l'équation (3); ce que nous exprimerons en disant que $U = C$ est une *intégrale intermédiaire* de l'équation du second ordre. En effet, d'après la façon même dont on a obtenu le système (13), les caractéristiques de $U = C$ sont des multiplicités d'éléments à une dimension satisfaisant aux équations (A); les intégrales *non singulières* de $U = C$ sont donc aussi des intégrales de l'équation du second ordre (n° 1).

Remarque. — Toute équation du second ordre qui admet une intégrale intermédiaire de la forme

$$F(u_1, u_2 \ldots u_n) = 0,$$

où F désigne une fonction arbitraire, est nécessairement de la forme considérée ici. On peut le vérifier par un calcul direct; mais il est plus simple de remarquer que, si l'on élimine les rapports de $(n-1)$ des dérivées $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ à la $n^{\text{ième}}$ dans les équations différentielles des caractéristiques, on obtient n relations linéaires et homogènes en dx_i, dp_k, outre la relation évidente

$$dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n = 0.$$

Il nous reste à démontrer que la méthode précédente fournit bien toutes les intégrales intermédiaires de l'équation du second ordre, c'est-à-dire toutes les fonctions

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

telles que les intégrales de l'équation du premier ordre $U = C$, sauf les intégrales singulières, vérifient l'équation (3). De l'équation

$$U = C \tag{16}$$

on déduit, en effet, en différentiant,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial p_1} p_{11} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial p_n} p_{1n} + \frac{\partial U}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial p_1} p_{21} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial p_n} p_{2n} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial U}{\partial p_1} p_{n1} + \ldots + \frac{\partial U}{\partial p_n} p_{nn} + \frac{\partial U}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \end{array}\right. \tag{17}$$

si toutes les intégrales de l'équation du premier ordre $U = C$ vérifient l'équation du second ordre (3), cette équation doit être une conséquence des relations (17), car, pour une intégrale de l'équation $U = C$, il ne peut exister plus de n relations distinctes entre les dérivées du second ordre. Or, les relations précédentes (17) sont identiques aux relations (5) où l'on aurait posé

$$\lambda_i = \frac{\partial U}{\partial p_i}, \qquad \mu_k = \frac{\partial U}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial U}{\partial z}.$$

D'après le théorème établi au n° 2, on voit que U doit satisfaire à l'un des systèmes d'équations obtenues en remplaçant λ_i et μ_k par ces valeurs dans les conditions (A) ou (B). Les deux systèmes d'équations linéaires auxquels on parvient ainsi sont précisément identiques aux systèmes (13) et (14).

8. On a vu jusqu'ici se manifester une analogie complète entre les propriétés de l'équation de Monge-Ampère et les propriétés des équations étudiées dans ce travail. Pour poursuivre cette étude, il est naturel d'étudier d'abord les équations pour lesquelles l'un des systèmes de caractéristiques admet $(n+1)$ combinaisons intégrables distinctes; l'analogie avec l'équation de Monge-Ampère se poursuit encore. D'après les résultats du n° 6, les deux systèmes de caractéristiques doivent être confondus, et les $n+1$ intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ doivent être deux à deux en involution. Soit alors

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \tag{18}$$

une intégrale intermédiaire dépendant de la fonction arbitraire F; puisque l'on a

$$(u_i, u_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1),$$

il s'ensuit que les $n+1$ relations

$$F = 0, \qquad u_1 = a_1, \qquad \ldots, \qquad u_{n-1} = a_{n-1}, \qquad u_{n+1} = a_{n+1}, \tag{19}$$

où $a_1, \ldots a_{n-1}, a_{n+1}$ sont n constantes arbitraires, représentent une intégrale complète de l'équation $F = 0$. On peut donc en déduire, par des éliminations et des différentiations seulement, l'intégrale générale de l'équation $F = 0$ et, par suite, de l'équation du second ordre. Si, par exemple, l'élimination de $p_1, p_2, \ldots,$

p_n entre les $n+1$ équations

$$(20)\qquad u_1=a_1,\qquad u_2=a_2,\qquad \ldots,\qquad u_n=a_n,\qquad u_{n+1}=a_{n+1}$$

conduit à une seule équation, on a, pour obtenir l'intégrale générale de l'équation du second ordre, la règle suivante, que l'on établit comme dans le cas de deux variables indépendantes :

Soit

$$(21)\qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})=0$$

le résultat de l'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre les $n+1$ relations (20); *pour trouver l'intégrale générale de l'équation du second ordre, on établit entre les $n+1$ paramètres a_i un certain nombre $h+1$ de relations arbitraires* ($h \geqq 1$), *soit*

$$\begin{aligned} a_{n-h+1} &= f_1(a_1, \ldots, a_{n-h}),\\ a_{n-h+2} &= f_2(a_1, \ldots, a_{n-h}),\\ \ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{n+1} &= f_{h+1}(a_1, \ldots, a_{n-h}), \end{aligned}$$

et l'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_{n-h}$ entre les $n-h+1$ relations

$$\Phi=0,\qquad \frac{d\Phi}{da_1}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{d\Phi}{da_{n-h}}=0.$$

Lorsque l'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre les $(n+1)$ relations (20) conduit à r relations distinctes entre $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, l'intégrale intermédiaire du premier ordre est *semi-linéaire,* et l'intégrale générale peut encore se déduire de l'intégrale complète, comme l'a démontré M. Sophus Lie; il est à remarquer que l'équation du second ordre correspondante est de degré $n-r+1$ par rapport aux dérivées du second ordre. Le cas limite est celui où $r=n$; l'élimination de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre les équations (20) conduit à un système de n équations entre $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$:

$$(22)\qquad F_1(x_1, \ldots, x_n, z; a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}),\qquad \ldots,\qquad F_n=0.$$

Ces relations représentent, dans l'espace à $n+1$ dimensions, une famille de courbes dépendant de $n+1$ paramètres. L'équation correspondante est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, et l'intégrale générale s'obtient en prenant les hypersurfaces de l'espace à $(n+1)$ dimensions, engendrées par les courbes précédentes associées suivant une loi arbitraire ([1]).

Toutes les équations de la classe précédente peuvent être ramenées à une même forme canonique par une transformation de contact; les $(n+1)$ fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ étant deux à deux en involution, on peut, en effet, trouver une transformation de contact qui ramène ces fonctions à la forme suivante

$$u_1 = p_1, \quad u_2 = p_2, \quad \ldots, \quad u_n = p_n, \quad u_{n+1} = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n - z.$$

L'équation du second ordre correspondante est alors

$$\frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0, \tag{23}$$

c'est-à-dire $\Delta = 0$ (n° 3); elle caractérise les hypersurfaces développables dans l'espace à $n+1$ dimensions. On obtiendra les équations générales de ces surfaces, comme on l'a expliqué tout à l'heure, en posant

$$\Phi = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} - z = 0.$$

On obtient une forme canonique encore plus simple en ramenant $u_1, \ldots, u_{n+1}$ à la forme

$$u_1 = p_1, \quad u_2 = x_2, \quad \ldots, \quad u_n = x_n, \quad u_{n+1} = z - p_1 x_1;$$

l'équation du second ordre correspondante est alors

$$p_{11} = 0. \tag{24}$$

En revenant à un système de variables quelconques, on peut énoncer comme il suit les résultats obtenus :

Pour déterminer toutes les équations du second ordre qui admettent deux intégrales intermédiaires distinctes, appartenant à un même système de caractéristiques, et dépendant chacune d'une fonction arbitraire de $n-1$ *variables, on déterminera* $(2n+1)$ *fonctions* $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z, P_1, \ldots, P_n$

([1]) Ce cas particulier a été spécialement étudié par M. Josef Kürschák, qui l'a rattaché à un problème du calcul des variations : *Ueber eine Classe der partiellen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung* (*Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie*, t. XIV; Budapest, 1898).

des $2n+1$ variables z, x_i, p_k, satisfaisant à l'identité

$$dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n = \rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n);$$

l'équation du second ordre cherchée prendra l'une des formes équivalentes suivantes [1]

$$\frac{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0, \qquad \frac{D(Z, X_2, \ldots, X_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0.$$

Remarque. — Lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, et qu'il existe n intégrales distinctes pour les équations (13), ces n intégrales, étant deux à deux en involution, peuvent être, par une transformation de contact convenable, ramenées à la forme

$$u_1 = p_1, \qquad u_2 = p_2, \qquad \ldots, \qquad u_n = p_n,$$

et l'équation du second ordre devient, par cette transformation, $\Delta = 0$. On voit donc qu'en dehors du cas qui vient d'être examiné, lorsque les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, il y a au plus $(n-1)$ combinaisons intégrables distinctes pour les équations différentielles des caractéristiques. Par exemple, l'équation

$$(25) \qquad \Delta + \alpha_{nn}\frac{\partial\Delta}{\partial p_{nn}} = 0$$

a ses deux systèmes de caractéristiques confondus; les équations différentielles des caractéristiques admettent les combinaisons intégrables

$$dp_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad dp_{n-1} = 0,$$

mais n'en admettent pas d'autres, si la fonction α_{nn} est quelconque. La transformation de Legendre, appliquée à l'équation précédente, la ramène à la forme

$$p_{nn} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

9. Supposons maintenant que les deux systèmes de caractéristiques soient distincts, et que les deux systèmes d'équations

(1) *Voir* le Mémoire de M. Darboux, *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Mémoires des Savants étrangers*, tome 27, IIe série; p. 212).

linéaires (13) et (14) admettent respectivement n intégrales distinctes $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, de telle façon qu'il existe pour l'équation du second ordre deux intégrales intermédiaires distinctes

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$
$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0,$$

dépendant chacune d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ variables.

D'après le théorème établi plus haut (n° 6), le problème revient à déterminer deux groupes G, G', composés respectivement de n fonctions distinctes, tels que deux fonctions appartenant à deux groupes différents soient toujours en involution. Soit, en effet,

$$(26)\qquad \begin{cases} G & u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, \\ G' & v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, \end{cases}$$

les deux groupes de fonctions, tels que l'on ait, quels que soient les indices i et k, $[u_i, v_k = 0]$; formons l'équation du second ordre qui admet l'intégrale intermédiaire

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0.$$

Cette équation, qui peut s'écrire

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

admet les n combinaisons intégrables $du_1 = 0, \ldots, du_n = 0$, pour un de ses systèmes de caractéristiques. Le second système de caractéristiques est formé par les caractéristiques de l'équation du premier ordre, où F est une fonction arbitraire. Mais on a, quel que soit F, les relations

$$[F, v_1] = 0, \qquad \ldots, \qquad [F, v_n] = 0,$$

de sorte que $dv_1 = 0, \ldots, dv_n = 0$ sont n combinaisons intégrables des équations différentielles de ce système.

Chacun des groupes G, G' peut être mis sous une infinité de formes distinctes, sans changer l'équation du second ordre correspondante. Nous dirons, pour abréger, qu'une fonction appartient au groupe G, si elle peut s'exprimer au moyen des fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_n$ seulement; il est clair qu'on peut remplacer les n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ par n fonctions distinctes appartenant au groupe G, et de même pour le second groupe. On profitera de cette propriété, comme on le verra plus loin, pour ramener les deux groupes G et G′ à une forme simple.

Remarquons aussi que, si l'on a une solution du problème, on peut en déduire une infinité d'autres en appliquant aux variables z, x_i, p_k une transformation de contact quelconque; nous ne considérerons pas comme essentiellement distinctes toutes les solutions que l'on peut ramener l'une à l'autre par une transformation de cette nature.

Les n fonctions $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sont, par hypothèse, distinctes, ainsi que les n fonctions $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$; mais il peut arriver qu'il existe r fonctions appartenant à la fois aux deux groupes. Soient $w_1, w_2, \ldots, w_r$ ces r fonctions; les deux groupes peuvent alors s'écrire

$$\begin{array}{lllllllll} G & w_1, & w_2, & \ldots, & w_r, & u_{r+1}, & \ldots, & u_n, \\ G' & w_1, & w_2, & \ldots, & w_r, & v_{r+1}, & \ldots, & v_n. \end{array}$$

Le nombre r est, au plus, égal à $n - 2$; si, en effet, l'on avait $r = n - 1$, on aurait d'abord $[w_i, w_k] = 0$, puisque w_i et w_k appartiennent à la fois aux deux groupes, et ensuite

$$[w_1, u_n] = 0, \qquad \ldots, \qquad [w_{n-1}, u_n] = 0,$$

de sorte que le groupe G serait en involution, cas qui a déjà été traité (n° **8**).

Les fonctions $w_1, w_2, \ldots, w_r$ sont les fonctions *distinguées* des deux groupes complémentaires G et G′; elles sont en involution avec toutes les fonctions de chacun de ces groupes. Il est évident que *deux groupes, qui se déduisent l'un de l'autre par une transformation de contact, ont le même nombre de fonctions distinguées;* la réciproque sera démontrée plus loin.

10. Effectuons la transformation suivante

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 = y_1, & x_2 = y_2, & \ldots, & x_n = y_n, & z = y_{n+1}, \\ p_1 = -\dfrac{q_1}{q_{n+1}}, & & \ldots, & p_n = -\dfrac{q_n}{q_{n+1}}; & \end{array} \right.$$

toute fonction des $2n + 1$ variables x_i, p_k, z se change en une fonction des $2n+2$ variables y_i, q_i, homogène et de degré zéro par rapport aux q_i, et réciproquement. Soient

$$\begin{matrix} U_1, & U_2, & \ldots, & U_n, \\ V_1, & V_2, & \ldots, & V_n, \end{matrix}$$

les deux groupes de fonctions qui remplacent les deux groupes G et G′; on a, comme il est facile de le vérifier,

$$(28) \qquad (U_i, V_k) = -\frac{1}{q_{n+1}}[u_i, v_k] = 0,$$

en posant, d'une manière générale,

$$(U, V) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Les n équations linéaires

$$(V_1, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (V_n, f) = 0$$

admettent pour intégrales les n fonctions U_1, U_2, ..., U_n, et, par suite, toutes les parenthèses (U_i, U_k). L'une au moins de ces parenthèses n'est pas nulle, soit (U_1, U_2); c'est une fonction homogène et de degré -1 de q_1, q_2, ..., q_n, et, par conséquent, une fonction distincte de U_1, U_2, ..., U_n, que nous désignerons par U_{n+1}. Tout pareillement, les $(n+1)$ équations linéaires

$$(U_1, f) = 0, \qquad \ldots, \qquad (U_n, f) = 0, \qquad (U_{n+1}, f) = 0$$

admettent pour intégrales les n fonctions V_1, V_2, ..., V_n; comme l'une au moins des parenthèses (V_i, V_k) n'est pas nulle, on en déduira une nouvelle intégrale V_{n+1}, qui sera homogène et de degré -1 par rapport aux q_i.

La transformation qui précède fait donc correspondre aux deux groupes primitifs G, G′ deux nouveaux groupes H, H′, de $(n+1)$ fonctions à $2n+2$ variables conjuguées (y_1, q_1), ..., (y_{n+1}, q_{n+1}), homogènes par rapport aux q_i,

$$\begin{cases} H & U_1, \; U_2, \; \ldots, \; U_{n+1}, \\ H' & V_1, \; V_2, \; \ldots, \; V_{n+1}, \end{cases}$$

tels que l'on ait

$$(U_i, V_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Les deux groupes H, H′ constituent donc *deux groupes polaires homogènes* de $n+1$ fonctions à $2n+2$ variables conjuguées ([1]).

Inversement, soit H un groupe homogène d'ordre $n+1$, non en involution; le groupe polaire H′ est également d'ordre $n+1$ et non en involution. Chacun de ces deux groupes admet n fonctions distinctes qui sont homogènes et d'ordre zéro par rapport aux q_i. Soient $U_1, \ldots, U_n$ les n fonctions homogènes du groupe H et V_1, $V_2, \ldots, V_n$ les n fonctions homogènes de H′. En revenant aux variables primitives x_i, p_k, z, ces $2n$ fonctions donnent naissance à deux groupes de n fonctions

$$\begin{array}{lllll} G & u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, \\ G' & v_1, & v_2, & \ldots, & v_n; \end{array}$$

les relations $(U_i, V_k) = 0$ deviennent d'ailleurs $[u_i, u_k] = 0$, de sorte que les deux groupes G, G′ fournissent bien une solution du problème proposé. La question est donc ramenée à la détermination de tous les groupes homogènes, non en involution, de $n+1$ fonctions à $2n+2$ variables conjuguées

$$(y_1, q_1; \; y_2, q_2; \; \ldots, \; y_{n+1}, q_{n+1}).$$

Quand on effectue sur les variables y_i, q_i une transformation de contact homogène, c'est-à-dire telle que $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ soient des fonctions des variables nouvelles y'_i, q'_i, homogènes et de degré zéro par rapport aux q'_i, tandis que les variables $q_1, \ldots, q_{n+1}$ sont homogènes et du premier degré des variables q'_i, ces fonctions satisfaisant d'ailleurs à la relation

$$q_1 dy_1 + \ldots + q_{n+1} dy_{n+1} = q'_1 dy'_1 + \ldots + q'_{n+1} dy'_{n+1},$$

on sait qu'il y correspond pour les variables z, x_i, p_k une transformation de contact tout à fait générale, et réciproquement. D'autre part, le groupe homogène H se change en un nouveau groupe homogène H_1, et toute fonction homogène et de degré zéro

---

([1]) Sophus Lie, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen* (*Mathematische Annalen*, t. VIII, p. 215-303; id. t. XI, p. 464-555). — *Theorie der Transformationsgruppen*. Zweiter Abschnitt, p. 178-250.

J'ai donné un résumé de cette théorie dans le Chapitre XII de mes *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 238.

du groupe H s'exprimera au moyen des n fonctions homogènes et de degré zéro du groupe H_1. Le groupe G correspondant au groupe homogène H se change donc en un nouveau groupe qui se déduit de H_1 comme G se déduit de H. Il suit de là que, si l'on ne considère pas comme distincts tous les groupes G qui peuvent se déduire de l'un d'entre eux par des transformations de contact, il suffira, pour avoir toutes les formes essentiellement distinctes des groupes G, de considérer tous les groupes homogènes d'ordre $n+1$ essentiellement distincts.

11. Étant donné un groupe homogène, non en involution, M. Sophus Lie a démontré que l'on peut toujours le ramener à l'une des formes canoniques suivantes [1] :

$$\text{(I)} \qquad Y_1, \; Y_2, \; \ldots, \; Y_m, \; Q_1 \; \ldots, \; Q_m, \; Y_{m+1}, \; \ldots, \; Y_r,$$

$$\text{(II)} \qquad Y_1, \; Y_2, \; \ldots, \; Y_m, \; Q_1, \; \ldots, \; Q_m, \; Y_{m+1}, \; \ldots, \; Y_r, \; Q_{n+1},$$

suivant qu'il renferme des fonctions distinguées d'ordre nul ou non, les Y_i étant des fonctions homogènes d'ordre zéro par rapport aux q_i, et les Q_i des fonctions homogènes d'ordre 1, satisfaisant aux relations

$$(Y_i, Y_k) = 0, \quad (Q_i, Q_k) = 0, \quad (Y_i, Q_i) = 1, \quad (Y_i, Q_k) = 0.$$

On peut ensuite compléter le groupe (I) ou le groupe (II) par d'autres fonctions $Q_{m+1}, \ldots, Q_{n+1}, Y_{m+r+1}, \ldots, Y_{n+1}$ de façon à former un groupe canonique de $2n+2$ termes; et enfin, en effectuant une transformation de contact convenable, on voit que l'on peut prendre pour forme canonique d'un groupe homogène une des deux formes suivantes

$$\text{(I)} \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m, \; q_1, \; q_2, \; \ldots \; q_m, \; y_{m+1}, \; \ldots, \; y_r,$$

$$\text{(II)} \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m, \; q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_m, \; y_{m+1}, \; \ldots, \; y_r, \; q_{n+1}.$$

Considérons d'abord la forme (I); on doit avoir

$$m + r = n + 1,$$

et le nombre des fonctions distinguées d'ordre nul $r - m$ est

---

[1] La forme canonique (II) n'est pas absolument identique à la forme employée par M. Sophus Lie, mais il est facile de passer de l'une à l'autre.

toujours de même parité que $n+1$. Le nombre m peut varier depuis 1 jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$. Quant au groupe polaire H', il a pour forme canonique

$$y_{r+1}, \;\ldots,\; y_{n+1},\; q_{r+1},\; \ldots,\; q_{n+1},\; y_{m+1},\; \ldots,\; y_r.$$

Pour passer aux deux groupes G, G' correspondants, nous poserons

$$x_1 = y_1, \ldots, \quad x_{m-1} = y_{m-1}, \quad z = y_m, \quad x_{m+1} = y_{m+1}, \quad \ldots, \quad x_{m+r} = y_{m+r},$$
$$p_i = \frac{q_i}{q_m};$$

ce qui donne pour ces deux groupes, en modifiant un peu les notations,

$$(29)\quad \begin{cases} G & \boxed{x_1, x_2, \ldots, x_q, p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_r, z}, \\ G' & \boxed{x_{r+1}, \ldots, x_n, \dfrac{p_{r+1}}{p_n}, \ldots, \dfrac{p_{n-1}}{p_n}, x_{q+1}, \ldots, x_r}. \end{cases}$$

La somme $q+r$ est égale à $n-1$ et q peut varier depuis 1 jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{n-1}{2}$. Les fonctions qui sont communes aux deux groupes sont $x_{q+1}, \ldots, x_r$, et leur nombre est égal à $n-1-2q$; il peut prendre les valeurs $n-3$, $n-5$, ..., toutes de même parité.

Si le groupe homogène H a la forme (II), le groupe polaire H' se compose des $n+1$ fonctions

$$y_{r+1}, \;\ldots,\; y_n,\; q_{r+1},\; \ldots,\; q_n,\; y_{m+1},\; \ldots,\; y_r,\; q_{n+1},$$

et les groupes correspondants G, G' peuvent se mettre sous la forme

$$(30)\quad \begin{cases} G & \boxed{x_1, x_2, \ldots, x_q, p_1, \ldots, p_q, x_{q+1}, \ldots, x_r}, \\ G' & \boxed{x_{r+1}, \ldots, x_n, p_{r+1}, \ldots, p_n, x_{q+1}, \ldots, x_r}. \end{cases}$$

La somme $q+r=n$, et le nombre q peut varier de 1 jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$: le nombre des fonctions communes aux deux groupes est $n-2q$, et ce nombre peut prendre les valeurs $n-2$, $n-4$, $n-6$, ..., etc. On voit que *nous obtenons en tout* $n-1$ *formes canoniques* pour les deux groupes G et G′; ces formes sont *essentiellement distinctes,* car chacune d'elles est caractérisée par le nombre des fonctions distinctes qui appartiennent à la fois aux deux groupes.

A chacune de ces fonctions canoniques correspond une forme canonique d'équation du second ordre, admettant deux intégrales intermédiaires distinctes. On peut obtenir sous forme explicite l'intégrale générale de chacune de ces équations. Il résulte, en effet, de ce qui précède qu'elles admettent toujours une intégrale intermédiaire de la forme

$$F(x_1, p_1, x_2, p_2, \ldots, x_q, p_q; x_{q+1}, \ldots, x_r, z) = 0, \tag{31}$$

ou de la forme

$$F(x_1, p_1, x_2, p_2, \ldots, x_q, p_q; x_{q+1}, \ldots, x_r) = 0, \tag{32}$$

et il suffit de montrer que l'on peut supposer la fonction F mise sous une forme telle qu'il soit possible d'intégrer ces équations du premier ordre.

Prenons d'abord l'équation (31); si l'on y considère $x_{q+1}, \ldots, x_r$, comme des paramètres, elle admet une intégrale complète de la forme

$$z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_q; x_{q+1}, \ldots, x_r; a_1, a_2, \ldots, a_q);$$

la fonction F étant arbitraire, il est évident qu'il en est de même de Φ, et réciproquement. Pour déduire de cette intégrale complète l'intégrale générale, on sait qu'il faut établir entre a_1, a_2, ..., a_q un certain nombre de relations, ces relations contenant en outre les variables x_{q+1}, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n, qui jouent ici le rôle de paramètres. D'après ce que l'on sait sur la théorie des intégrales complètes, on peut supposer que ces relations se réduisent à une seule, soit

$$a_q = \Psi(x_{q+1}, \ldots, x_r; x_{r+1}, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_{q+1}),$$

et l'intégrale générale est représentée par le système de q équations

$$\left\{\begin{aligned} & z = \Phi[x_1, \ldots, x_q, \ldots, x_r; a_1, \ldots, a_{q-1}; \Psi(x_{q+1}, \ldots, x_r, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})], \\ & \frac{\partial\Phi}{\partial a_i} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q-1); \end{aligned}\right. \tag{33}$$

à cause de la relation $q+r=n-1$, chacune des fonctions Φ et Ψ dépend bien de $(n-1)$ arguments, et les deux fonctions arbitraires se trouvent mises en évidence.

Dans le cas particulier où $q=1$, les formules se simplifient, et l'intégrale générale est fournie par l'équation unique, résolue par rapport à z,

$$z=\Phi[x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}; \Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)]; \tag{34}$$

l'équation du second ordre correspondante est

$$p_n p_{1,n-1}-p_{n-1}p_{1,n}=0.$$

Si l'intégrale intermédiaire est de la forme (32), elle admet une intégrale complète de la forme

$$z=\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_q; x_{q+1}, \ldots, x_r; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})+a_q,$$

et, en raisonnant comme tout à l'heure, on en déduit que l'intégrale générale est représentée par le système de q équations

$$\left\{\begin{aligned} z &= \Phi(x_1, \ldots. x_q, \ldots, x_r; a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}) \\ &\quad + \Psi(x_{q+1}, \ldots, x_r; x_{r+1}, \ldots, x_n; a_1, \ldots. a_{q-1}), \\ &\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}+\frac{\partial\Psi}{\partial a_i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, q-1), \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Φ et Ψ désignant des fonctions arbitraires. Si $q=1$, l'intégrale générale est donnée par l'équation

$$z=\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+\Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{36}$$

et l'équation du second ordre correspondante est

$$p_{1,n}=0.$$

12. Nous allons énumérer les diverses formes canoniques pour $n=3, 4, 5$.

Si $n=3$, on a les deux formes canoniques

$$(\alpha)\ p_{12}=0, \qquad (\beta)\ p_{12}p_3-p_{13}p_2=0;$$

la forme (α) admet les deux intégrales intermédiaires

$$p_1=f(x_1, x_3), \qquad p_2=f_1(x_2, x_3),$$

et l'intégrale générale est

$$z = \varphi(x_1, x_3) + \psi(x_2, x_3),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires. La forme (β) admet les deux intégrales intermédiaires

$$p_1 = f(x_1, z), \qquad \frac{p_2}{p_3} = f_1(x_2, x_3),$$

et l'intégrale générale est

$$z = \varphi[x_1, \psi(x_2, x_3)],$$

φ et ψ désignant encore deux fonctions arbitraires.

Pour $n = 4$, on a trois formes canoniques

$$(\alpha')\ \ p_{12} = 0, \qquad (\beta')\ \ p_{12}p_3 - p_2 p_{13} = 0, \qquad (\gamma)\ \ p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23} = 0;$$

la forme (α') admet les deux intégrales intermédiaires

$$p_1 = f(x_1, x_3, x_4), \qquad p_2 = f_1(x_2, x_3, x_4),$$

et l'intégrale générale est

$$z = \varphi(x_1, x_3, x_4) + \psi(x_2, x_3, x_4).$$

La forme (β') admet les deux intégrales intermédiaires

$$p_1 = f(x_1, x_4, z), \qquad \frac{p_2}{p_3} = f_1(x_2, x_3, x_4),$$

et l'intégrale générale est

$$z = \varphi[x_1, x_4, \psi(x_2, x_3, x_4)].$$

Enfin, la forme (γ) admet les deux intégrales intermédiaires

$$p_1 = f(x_1, p_2, x_2), \qquad p_3 = f_1(x_3, p_4, x_4),$$

et l'intégrale générale est représentée par le système des deux équations

$$(37) \qquad \left\{ \begin{aligned} & z = \varphi(x_1, x_2, a) + \psi(x_3, x_4, a), \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a} = 0, \end{aligned} \right.$$

a désignant un paramètre auxiliaire.

On remarquera sur ces exemples une loi générale qui se déduit aisément des résultats précédents, à savoir que, parmi les n —

formes canoniques relatives à une équation à n variables indépendantes, figurent les $n - 2$ formes canoniques relatives au cas de $n - 1$ variables indépendantes. Lorsque le nombre des variables indépendantes augmente d'une unité, il ne s'introduit donc qu'une forme canonique réellement nouvelle. Connaissant l'intégrale générale d'une équation canoniqne à $(n-1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, pour avoir l'intégrale générale de l'équation canonique correspondante à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il suffit d'ajouter la variable x_n, à titre de paramètre, dans les deux fonctions arbitraires qui figurent explicitement dans l'intégrale générale de l'équation à $(n-1)$ variables indépendantes.

Ainsi, pour $n = 5$, on a d'abord les trois formes canoniques (α'), (β'), (γ) et la forme canonique nouvelle

$$(\delta) \qquad \begin{vmatrix} p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_3 & p_4 & p_5 \end{vmatrix} = 0,$$

qui admet les deux intégrales intermédiaires

$$p_1 = f(x_1, x_2, z, p_2), \qquad \frac{p_5}{p_3} = f_1\left(x_3, x_4, x_5, \frac{p_4}{p_3}\right).$$

L'intégrale générale est représentée par le système de deux équations

$$\begin{cases} z = \varphi[x_1, x_2, a, \psi(x_3, x_4, x_5, a)], \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial a} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\psi}\dfrac{\partial\psi}{\partial a} = 0, \end{cases}$$

a désignant un paramètre auxiliaire.

13. Pour présenter les résultats obtenus sous la forme la plus générale possible, remarquons que l'une quelconque des équations canoniques à n variables admet une intégrale intermédiaire de la forme

$$(38) \qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant pris parmi les $2n + 1$ variables

$$(39) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad z.$$

Inversement, quelles que soient les n quantités choisies parmi celles-là, l'équation (38) représente toujours une intégrale intermédiaire d'une équation appartenant à la catégorie que nous venons d'étudier. Cela est d'abord évident si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont deux à deux en involution; l'équation du second ordre correspondante est une de celles qui ont été étudiées au n° **8**.

Si les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ne sont pas deux à deux en involution, il suffit, pour notre objet, de montrer que l'on peut trouver n autres fonctions distinctes $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ telles que l'on ait $(u_i, v_k) = 0$, quels que soient les indices i et k; la démonstration n'offre aucune difficulté. Le groupe des n fonctions $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est de la forme

$$x_1, \ p_1, \ \ldots, \ x_q, \ p_q, \ x_{q+1}, \ \ldots, \ x_r, \ p_{r+1}, \ \ldots; \ p_s,$$

ou de la forme

$$x_1, \ p_1, \ \ldots, \ x_q, \ p_q, \ x_{q+1}, \ \ldots, \ x_r, \ p_{r+1}, \ \ldots, \ p_s, \ z;$$

Dans le premier cas, on a $q + s = n$, et le groupe de n fonctions distinctes

$$x_{s+1}, \ p_{s+1}, \ \ldots, \ x_n, \ p_n, \ x_{q+1}, \ \ldots \ x_r, \ p_{r+1}, \ \ldots, \ p_s$$

a toutes ses fonctions en involution avec les u_i.

Dans le second cas, on a $q + s = n - 1$, et le groupe de n fonctions

$$\begin{array}{llll} x_{s+1}, \ \ldots, \ x_n; & \dfrac{p_{s+1}}{p_n}, & \ldots, & \dfrac{p_{n-1}}{p_n}; \\ x_{q+1}, \ \ldots, \ x_r; & \dfrac{p_{r+1}}{p_n}, & \ldots, & \dfrac{p_s}{p_n} \end{array}$$

a encore toutes ses fonctions en involution avec les u_i.

Ce résultat est d'un énoncé plus général que le résultat obtenu aux paragraphes précédents (n° **11**), mais il est moins précis, car toutes les équations du second ordre obtenues par ce dernier procédé ne sont pas essentiellement distinctes.

En revenant maintenant à un système de variables quelconques, par une transformation de contact générale, on voit que les résultats obtenus peuvent être résumés comme il suit :

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, Z$ *des fonctions des*

$(2n+1)$ *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, z$, *satisfaisant à l'identité*

$$dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n = \rho(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n);$$

toute équation de la forme

$$\frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0,$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *sont* n *quelconques des fonctions* Z, X_i, P_k, *admet deux intégrales intermédiaires distinctes. Réciproquement, toute équation du second ordre qui jouit de cette propriété peut être obtenue de cette façon.*

Remarque. — Étant donnée une équation du second ordre appartenant à la catégorie précédente, on peut toujours reconnaître, sans aucune intégration, à quelle forme canonique il est possible de la ramener par une transformation de contact, car cela revient à déterminer le nombre des intégrales communes aux deux systèmes (13) et (14). La réduction effective exige d'abord l'intégration de ces deux systèmes, puis la réduction d'un groupe homogène d'ordre $n+1$ à sa forme canonique; ce dernier problème est traité en détail dans les travaux déjà cités de M. Sophus Lie, auxquels nous renverrons le lecteur.

14. Je terminerai ce travail par quelques remarques sur les équations linéaires par rapport à z et à ses dérivées. Il est naturel de chercher à étendre à ces équations la méthode de transformation de Laplace. Or, si l'on prend cette méthode sous sa forme générale [1], on reconnaît aisément que le succès de ce procédé de transformation tient à ce que l'équation peut s'écrire

$$X[Y(z)] + aX(z) + bY(z) + cz = M,$$

où

$$X(f) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$Y(f) = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

[1] *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, t. II, chap. V.

a, b, c, M, α_1, α_2, β_1, β_2 étant des fonctions des variables x et y.

Prenons maintenant une équation à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui peut s'écrire sous une forme analogue

$$(40) \qquad X[Y(z)] + aX(z) + bY(z) + cz = M,$$

où

$$X(f) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$Y(f) = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \beta_n \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

cette équation peut encore s'écrire

$$(41) \qquad X[Y(z) + az] + b[Y(z) + az] + z(c - X(a) - ab] = M.$$

Si le coefficient de z, $h = X(a) + ab - c$ est nul, l'intégration est ramenée à l'intégration de deux équations du premier ordre successivement

$$X(u) + bu = M,$$
$$Y(z) + az = u.$$

Si le coefficient h n'est pas nul, prenons une inconnue nouvelle en posant

$$(42) \qquad z_1 = Y(z) + az;$$

ce qui permet d'écrire l'équation proposée

$$(43) \qquad X(z_1) + bz_1 = hz + M.$$

L'élimination de z_1 entre les deux relations (42) et (43) conduit à l'équation (41) elle-même, tandis que l'élimination de z conduit à une nouvelle équation de forme analogue

$$(44) \qquad Y[X(z_1) + bz_1] + a_1[X(z_1) + bz_1] = hz_1 + M_1;$$

la transformation définie par les formules (42) et (43) ramène ainsi l'une à l'autre les équations (41) et (44). On a bien là une transformation analogue à celle de Laplace; mais, pour qu'on puisse avoir une suite de transformations, et non une transformation unique, il faudrait que l'on puisse permuter $X[Y(z)]$ et $Y[X(z)]$ sans changer la forme de l'équation (41); autrement dit, que l'on ait une identité de la forme

$$X[Y(z)] - Y[X(z)] = \lambda X(z) + \mu Y(z).$$

Les conditions précédentes sont d'ailleurs suffisantes; car la méthode de Laplace, sous sa forme générale, s'étend sans aucune modification.

Étant donnée une équation linéaire du second ordre, il est toujours possible de reconnaître sans aucune intégration si les conditions précédentes sont remplies. En effet, pour que l'ensemble des termes qui renferment les dérivées du second ordre soit identique à l'ensemble des termes du second ordre de $X[Y(z)]$, il faudra que ces termes soient précisément

$$\alpha_1 \beta_1 p_{11} + \ldots + \alpha_n \beta_n p_{nn} + \sum_i \sum_k (\alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k) p_{ik}.$$

La forme associée à l'équation du second ordre

$$I = \sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} \xi_i \xi_k$$

est alors décomposable en un produit de deux facteurs linéaires

$$I = (\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n)(\beta_1 \xi_1 + \ldots + \beta_n \xi_n).$$

Il faudra donc d'abord que la forme associée à l'équation linéaire proposée soit le produit de deux formes linéaires; notre équation du second ordre doit donc rentrer dans la catégorie étudiée ici et posséder deux familles de caractéristiques du premier ordre. Cette condition étant supposée satisfaite, la décomposition de la forme associée I en ses deux facteurs linéaires fait connaître les coefficients α_i, β_i, et, par suite, $X(z)$ et $Y(z)$. Il restera à vérifier si le premier membre de l'équation proposée peut être mis sous la forme

$$X[Y(z)] + aX(z) + bY(z) + cz = M, \tag{45}$$

et si l'on a identiquement

$$X[Y(z)] - Y[X(z)] = \lambda X(z) + \mu Y(z), \tag{46}$$

ce qui n'exige évidemment que des calculs tout à fait élémentaires.

15. Il est intéressant de remarquer que toute équation du second ordre qui satisfait aux conditions précédentes peut être ramenée, par un changement de variables, à la forme même de Laplace. En effet, une des familles de caractéristiques de l'équation du second ordre est définie par les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\alpha_1} = \frac{dx_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\alpha_n}, \tag{47}$$

l'équation non écrite étant linéaire en $dp_1, \ldots, dp_n$. Comme α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne renferment que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les équations (47) admettent $(n-1)$ combinaisons intégrables distinctes, que l'on obtiendra par l'intégration de l'équation linéaire $X(f) = 0$. Le second système de caractéristiques admet de même $(n-1)$ combinaisons intégrables distinctes, qui s'obtiendront en intégrant l'équation $Y(f) = 0$. L'identité (46) prouve que ces deux équations $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$ forment un système complet, c'est-à-dire qu'elles ont $(n-2)$ intégrales communes distinctes. On peut alors effectuer un changement de variables tel que l'équation $X(f) = 0$ admette les $n-1$ intégrales

$$x'_2, \quad x'_3, \quad \ldots, \quad x'_n,$$

et l'équation $Y(f) = 0$ les $n-1$ intégrales

$$x'_1, \quad x'_3, \quad \ldots, \quad x'_n;$$

on aura alors identiquement

$$X(f) = k_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1}, \qquad Y(f) = k_2 \frac{\partial f}{\partial x'_2},$$

et l'équation (45) prendra la forme de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'_1 \partial x'_2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x'_1} + b_1 \frac{\partial z}{\partial x'_2} + c_1 z = M_1.$$

Les variables $x'_3, x'_4, \ldots, x'_n$ ne figureront que dans les coefficients a_1, b_1, c_1, M_1.

Prenons, par exemple, l'équation étudiée par M. Forsyth [1]

$$p_{11} + p_{23} - p_{12} - p_{13} + \frac{2p_1 - p_2 - p_3}{x_2 + x_3} = 0,$$

---

[1] *Philosophical Transactions*, vol. CXCI, p. 20; 1898.

qui peut s'écrire

$$X[Y(z)] + \frac{X(z) + Y(z)}{x_2 + x_3} = 0,$$

en posant

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Les équations $X(z) = Y(z) = 0$ forment bien un système complet, et en prenant pour nouvelles variables

$$x'_1 = x_1 + x_2 + x_3, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3,$$

on est ramené à l'équation

$$(x'_2 + x'_3)\frac{\partial^2 z}{\partial x'_2\, \partial x'_3} - \frac{\partial z}{\partial x'_2} - \frac{\partial z}{\partial x'_3} = 0,$$

qui est intégrable par la méthode de Laplace.