BULLETIN DE LA S. M. F.

N. DELAUNAY

Sur les surfaces n’ayant qu’un côté et sur les points singuliers des courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 43-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__43_1>

SUR LES SURFACES N'AYANT QU'UN COTÉ ET SUR LES POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES;

Par M. N. Delaunay.

1. M. Darboux donne, dans ses *Leçons sur la Théorie générale des surfaces* (t. I, nos 231, 232), des indications très intéressantes sur les surfaces telles que le sens de la normale se trouve changé quand on revient au point de départ, après avoir parcouru un chemin réel convenablement choisi.

C'est Möbius qui a le premier remarqué l'existence de ces surfaces *n'ayant qu'un côté*.

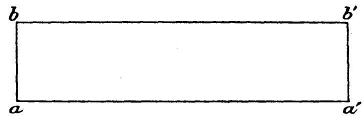
La propriété essentielle de ces surfaces, de n'avoir qu'un seul côté, présente par elle-même un caractère paradoxal. Mais l'apparence paradoxale de quelques questions scientifiques a été souvent la source de nouvelles idées. Par cela même, les surfaces n'ayant qu'un côté doivent attirer l'attention des savants.

Dans la présente Note j'essaye de poser les équations générales de ces surfaces, lorsqu'elles sont réglées, et de les définir géométriquement d'une manière générale, lorsqu'elles sont développables. Nous verrons que ces questions se rattachent à la théorie des points de rebroussement des courbes.

Mais, avant d'aborder de plus près ces questions, je tâcherai de donner une représentation sensible des surfaces n'ayant qu'un côté, par des dessins de modèles.

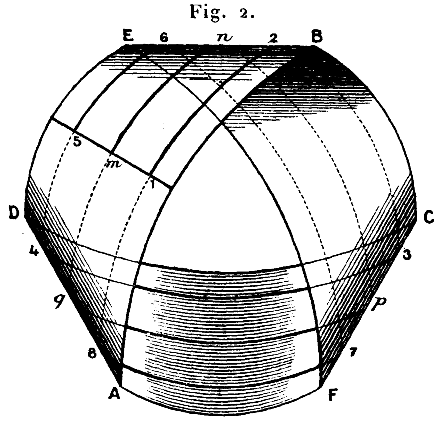
Prenons, par exemple, une bande de papier $abb'a'$ (*fig.* 1).

Fig. 1.



On peut aisément faire une surface cylindrique en collant le bord $a'b'$ au bord ab. Mais, si avant de coller les bords l'un à l'autre, on applique une torsion à la bande, on pourra coller le bord $a'b'$ au bord ab de telle manière que le point a' vienne en b

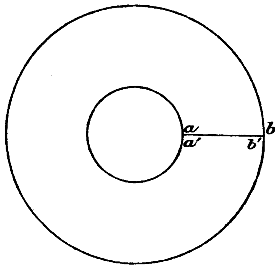
Fig. 2.



et que b' vienne en a, et qu'ainsi le sens de $a'b'$ se trouve changé. On obtient de la sorte une surface développable qui n'a qu'un côté, comme on le voit en parcourant un contour fermé $mnpqm$ qui est dessiné (*fig.* 2) ponctué en ses parties visibles à travers la bande.

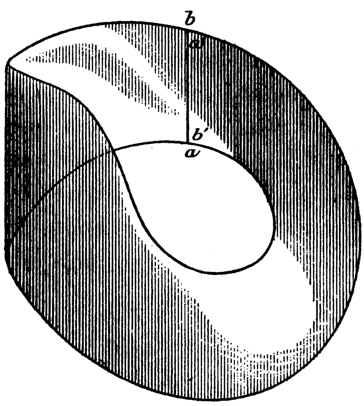
Coupons dans une feuille de papier une bande en forme d'anneau limité par deux circonférences concentriques (*fig.* 3). Faisons

Fig. 3.



une coupure radiale *ab* et recollons la bande, en ayant soin que le point *a'* vienne en *b* et que le point *b'* vienne en *a*. Nous obtenons par ce procédé un autre modèle (*fig.* 4) d'une surface développable n'ayant qu'un côté.

Fig. 4.



Avant d'approfondir la question, arrêtons-nous sur quelques propriétés singulières de ces surfaces.

a. La bande de la *fig.* 2 est limitée par un seul contour continu ABCDEFA.

b. Par cela même une coupure suivant la ligne *mnpq*, qui ne coupe pas le contour, ne tranche pas l'anneau en deux : après avoir fait cette coupure, on obtient un seul anneau plus grand que l'anneau primitif.

c. Traçons une ligne 1 2 3 4 5, parallèle au bord de l'anneau. Nous ne revenons pas au point de départ après avoir parcouru un tour; pour revenir en 1, il faut parcourir encore le chemin 5 6 7 8 1.

d. Lorsque nous tranchons l'anneau suivant la ligne 123456781, nous obtenons une chaîne à deux chaînons dont l'un est plus grand et plus mince que l'autre.

e. Ces surfaces ont quelque analogie avec la surface de Riemann à deux feuillets : sur la surface de Riemann on peut passer d'un point (z, u_1) du feuillet supérieur au point (z, u_2) du feuillet inférieur; sur la surface à un côté, on peut passer d'un point m, qui se trouve *sur* la surface, au point m qui se trouve *sous* la surface sur la même normale.

2. Voyons maintenant, de plus près, le mode de génération de ces surfaces par le mouvement d'une génératrice rectiligne.

On voit que, pour engendrer une surface à un côté, la génératrice $a'b'$ doit la parcourir une fois, après quoi la génératrice vient s'appliquer à sa position initiale, mais en sens contraire (renversée). Et c'est seulement après avoir parcouru la surface une seconde fois que la génératrice vient s'appliquer à sa position initiale dans le même sens. Nous voyons donc que les surfaces réglées n'ayant qu'un côté sont *doublement engendrées*.

Considérons une génératrice rectiligne, et prenons sur cette génératrice deux points a' et b' situés à une distance constante m l'un de l'autre. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point a' et x_2, y_2, z_2 celles du point b'. Soient

$$x_1 = f(t), \qquad y_1 = F(t), \qquad z_1 = \varphi(t) \tag{1}$$

les équations du mouvement du point a', et k le temps pendant lequel la génératrice parcourt la surface une fois pour revenir renversée à sa position initiale. Après avoir parcouru la surface une seconde fois, la génératrice reviendra à sa position initiale ainsi que a' reviendra en a et b' en b. Ainsi, après le temps k, le point a' vient en b et b' en a; les coordonnées du point b' sont donc

$$x_2 = f(t+k), \qquad y_2 = F(t+k), \qquad z_2 = \varphi(t+k),$$

et les fonctions f, F et φ sont des fonctions périodiques ayant la période commune $2k$.

Comme la génératrice passe par les points a' et b', ses équations sont

$$\frac{x-f(t)}{x-f(t+k)}=\frac{y-F(t)}{y-F(t+k)}=\frac{z-\varphi(t)}{z-\varphi(t+k)}$$

qu'on peut transformer en celles-ci

$$(2)\qquad \frac{x-f(t)}{f(t+k)-f(t)}=\frac{y-F(t)}{F(t+k)-F(t)}=\frac{z-\varphi(t)}{\varphi(t+k)-\varphi(t)}.$$

La distance $a'b'$ est supposée égale à m, d'où l'équation de condition

$$(3)\ [f(t+k)-f(t)]^2+[F(t+k)-F(t)]^2+[\varphi(t+k)-\varphi(t)]^2=m^2.$$

Il faut cependant remarquer que le renversement de la génératrice peut se produire aussi sur des plans et sur les surfaces coniques n'ayant qu'une nappe.

Néanmoins nous pouvons énoncer ce résultat :

Théorème I. — *Les surfaces réglées à un côté sont engendrées par le mouvement de la génératrice dont les équations ont la forme* (2) *et dans ces équations f,* F *et φ sont des fonctions périodiques ayant pour période $2k$. Ce mode de génération peut cependant donner aussi des plans et des cônes à une nappe.*

3. Pour faire l'application de ce théorème, il faut se donner explicitement les fonctions f, φ et F. Prenons comme exemple

$$f(t)=2\sin t\cos t+\sin t,$$
$$F(t)=2\cos^2 t+\cos t,$$
$$\varphi(t)=\sin^2 t.$$

La période commune de ces fonctions est 2π, donc $k=\pi$ (pour $\sin^2 t$ la période est π, mais cela n'empêche pas le renversement de la génératrice).

Les équations (2) donnent

$$\frac{x-(2\cos t+1)\sin t}{-2\sin t}=\frac{y-(2\cos t+1)\cos t}{-2\cos t}=\frac{z-\sin^2 t}{0},$$

ou bien

$$(4)\qquad z=\sin^2 t,\qquad\qquad \frac{x}{\sin t}=\frac{y}{\cos t}.\qquad (5)$$

En combinant (4) et (5), on obtient

$$x^2(1 - z^2) = zy^2,$$

équation de la surface mentionnée par M. Darboux comme n'ayant qu'un côté (*loc. cit.*, n° 231) (¹).

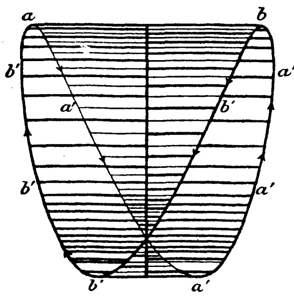
4. Proposons-nous cette question : *Quel caractère doit avoir l'arête de rebroussement des surfaces développables n'ayant qu'un côté?*

Il ne faut pas perdre de vue que la génératrice revient renversée à sa position initiale après n'avoir parcouru la surface qu'une fois. Pour cela, il suffit que l'arête de rebroussement, étant une courbe fermée, ait un nombre impair de points singuliers qui soient des points de rebroussement ou des points doubles à tangente double.

En effet, considérons une courbe (*fig.* 6) ayant un point de rebroussement, et la tangente $a'b'$ qui parcourt cette courbe d'une telle manière qu'un de ses points c' reste sur la courbe. Prenons sur cette tangente deux points a' et b' équidistants du point c'. La tangente parcourt la courbe à partir de la position initiale ab, en ayant le point b' en avant. Mais, quand c' aura dépassé le point de rebroussement, c'est le point a' qui sera en avant, et la tangente reviendra renversée à sa position initiale. En chaque point de la

(¹) En posant $f(t) = \cos t$; $F(t) = \sin t$; $\varphi(t) = \sin 2t$ on aurait obtenu le

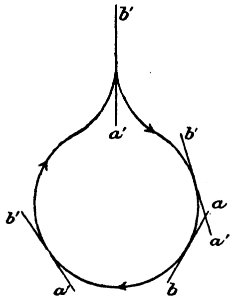
Fig. 5.



cylindroïde de Plücker (*fig.* 5) sur lequel on voit le procédé du renversement de la génératrice $a'b'$.

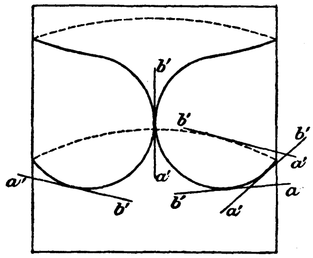
courbe, il y aura deux tangentes superposées l'une à l'autre et dirigées en sens contraire.

Fig. 6.



La tangente peut aussi se renverser après un passage du point c' par un point double à tangente double (*fig.* 7).

Fig. 7.



Dans ces deux cas, la courbe est une enveloppe double de la tangente.

Nous pouvons énoncer ce résultat :

Théorème II. — *Le lieu géométrique des tangentes à une courbe fermée gauche, ayant un nombre impair de points singuliers, qui sont des points de rebroussement ou des points doubles à tangente double, est une surface développable n'ayant qu'un côté.*

5. D'après ce qui a été dit dans les numéros précédents, nous pouvons énoncer encore un autre résultat :

Théorème III. — *Les courbes planes ayant un nombre impair* *de points singuliers, qui sont des points de rebroussement ou des points doubles à tangente double, sont des enveloppes de la droite définie par l'équation*

$$\frac{X - f(t)}{f(t+k) - f(t)} = \frac{y - F(t)}{F(t+k) - F(t)},$$

dans laquelle f et F *sont des fonctions périodiques ayant une période commune* $2k$, *et liées par l'équation de condition*

$$[f(t+k) - f(t)]^2 + [F(t+k) - F(t)]^2 = m^2.$$

Ce mode de génération peut cependant donner aussi un point isolé, parce que la tangente d'un tel point (c'est-à-dire la droite passant par ce point) se renverse en tournant d'un angle de 180°.

Ainsi, *les points singuliers mentionnés dans le théorème III, lorsqu'ils sont en nombre impair, agissent sur tous les points de la courbe en leur impliquant des tangentes doublées.* Pour faire ressortir le doublement de ces tangentes, il y a avantage à définir le sens de chacune d'elles en considérant le mouvement de deux de ses points. C'est en cela que consiste la méthode que nous proposons.

6. Revenons aux surfaces. Désignons par u la valeur commune des rapports (2). On obtient alors

$$(6)\qquad \begin{cases} x = [f(t+k) - f(t)]u + f(t), \\ y = [F(t+k) - F(t)]u + F(t), \\ z = [\varphi(t+k) - \varphi(t)]u + \varphi(t). \end{cases}$$

Les quantités u et t peuvent être envisagées comme des coordonnées curvilignes. La somme des carrés des coefficients de u est, d'après la formule (3), égale à m^2. On peut poser $m = 1$. Alors u désignera la longueur portée sur chaque génératrice à partir de la courbe définie par les équations (1) (Darboux, *loc. cit.*, n° 67).

On déduira des formules (6) l'expression suivante de l'élément linéaire

$$(7)\qquad ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dt + (Au^2 + 2Bu + C)dt^2,$$

où A, B, C, D sont des fonctions définies par les formules :

$$(8)\quad \begin{cases} A = [f'(t+k)-f'(t)]^2 + [F'(t+k)-F'(t)]^2 + [\varphi'(t+k)-\varphi'(t)]^2, \\ B = [f'(t+k)-f'(t)]f'(t) + [F'(t+k)-F'(t)]F'(t) + [\varphi'(t+k)-\varphi'(t)]\varphi'(\\ C = [f'(t)]^2 + [F'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2, \\ D = [f(t+k)-f(t)]f'(t) + [F(t+k)-F(t)]F'(t) + [\varphi(t+k)-\varphi(t)]\varphi'(\end{cases}$$

On sait qu'une surface est développable (DARBOUX, *loc. cit.*, n° 69) lorsqu'on a

$$(9)\quad \frac{f'(t+k)-f'(t)}{f'(t)} = \frac{F'(t+k)-F'(t)}{F'(t)} = \frac{\varphi'(t+k)-\varphi'(t)}{\varphi'(t)} = \theta.$$

En différentiant l'équation (3) on trouve

$$(10)\quad \begin{cases} [f(t+k)-f(t)][f'(t+k)-f'(t)] + [F(t+k)-F(t)] \\ \quad\times [F(t+k)-F'(t)] + [\varphi(t+k)-\varphi(t)][\varphi'(t+k)-\varphi'(t)] = 0. \end{cases}$$

Cette équation se transforme en

$$(11)\quad \begin{cases} [f(t+k)-f(t)]f'(t) + [F(t+k)-F(t)]F'(t) \\ \qquad\qquad + [\varphi(t+k)-\varphi(t)]\varphi'(t) = 0, \end{cases}$$

en vertu des conditions (9) lorsque la surface est développable. C'est-à-dire que, dans le cas des surfaces développables, on a $D = 0$, et la courbe $u = 0$ définie par les équations (1) est une des trajectoires orthogonales des génératrices (DARBOUX, *loc. cit.*, n° 67). L'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + (Au^2 + 2Bu + C)dt^2,$$

où A, B, C sont les mêmes que dans les formules (8). Mais, en transformant ces quantités à l'aide des conditions (9), on obtient

$$(12)\quad ds^2 = du^2 + [\theta^2 u + 2\theta u + 1]\{[f'(t)]^2 + [F'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2\}dt^2.$$

Rien ne nous empêche de supposer que la courbe définie par les équations (1) est parcourue par le point (x_1, y_1, z_1) avec une vitesse constante et que, pour cette raison,

$$[f'(t)]^2 + [F'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 = 1.$$

Nous pouvons aussi, et même avec un plus haut degré de généralité, poser

$$\theta^2\left\{[f'(t)]^2+[F'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2\right\}=1. \tag{13}$$

Alors l'élément linéaire prend la forme

$$\begin{aligned} ds^2 = du^2 + \Big\{ & u^2 + 2u\sqrt{[f'(t)]^2+[F'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2} \\ & + [f'(t)]^2+[F'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2 \Big\} dt^2, \end{aligned}$$

qui revient à

$$ds^2 = du^2 + \left\{u + \sqrt{[f'(t)]^2+[F'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\right\}^2 dt^2, \tag{14}$$

et les formules (23) du n° 70 de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux deviennent, pour les surfaces n'ayant qu'un côté,

$$\left\{\begin{aligned} x &= u\cos t - \int\sqrt{[f'(t)]^2+[F'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\sin t\,dt, \\ y &= u\sin t + \int\sqrt{[f'(t)]^2+[F'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\cos t\,dt. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces formules peuvent servir pour appliquer sur un plan une surface n'ayant qu'un côté.