Bulletin de la S. M. F.

R. Bricard

Note sur des systèmes de droites et de quadriques tangentes

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 180-184
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__180_0>

NOTE SUR DES SYSTÈMES DE DROITES ET DE QUADRIQUES TANGENTES;

Par M. Raoul Bricard.

I.

Dans une intéressante étude parue récemment au *Bulletin* ([1]), M. Mannheim a signalé des propriétés remarquables d'un quadrilatère gauche circonscrit à une quadrique. L'éminent géomètre considère en particulier le système des droites tangentes à une pareille surface, qui rencontrent deux tangentes fixes. Je me propose, dans la présente Note, d'indiquer quelques théorèmes relatifs au système des droites tangentes à une quadrique qui rencontrent deux droites quelconques.

Je rappellerai tout d'abord quelques propriétés très simples de la relation *doublement quadratique* entre deux variables t, u. On sait qu'on désigne ainsi une relation dont la forme la plus générale est la suivante :

$$(1)\quad f(t,u) = \mathrm{A}t^2u^2 + \mathrm{B}t^2u + \mathrm{C}tu^2 + \mathrm{D}t^2 + \mathrm{E}tu + \mathrm{F}u^2 + \mathrm{G}t + \mathrm{H}u + \mathrm{F} = 0.$$

Il suffit de rappeler ici que cette équation peut toujours être considérée comme exprimant la relation la plus générale entre deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes. C'est surtout à ce point de vue que l'a considérée Halphen, qui, dans son beau *Traité des fonctions elliptiques,* en fait une étude approfondie.

Cette équation contient neuf coefficients et, par suite, huit paramètres arbitraires : elle est donc complètement définie quand on sait qu'elle est satisfaite par *huit* couples de valeurs de t et de u

$$t_1,\ u_1;\quad t_2,\ u_2;\quad \ldots;\quad t_8,\ u_8.$$

C'est là une première propriété évidente de la relation doublement quadratique.

Une seconde propriété est fournie par la considération des t et des u *critiques*. J'appelle ainsi, employant une dénomination

---

([1]) *Note à propos d'un théorème connu de Géométrie,* t. XXV, p. 78.

qui m'a été indiquée par M. Fontené, les valeurs de t et de u auxquelles la relation (1) fait correspondre une valeur *double* de l'autre variable. On obtient les t critiques en égalant à zéro le discriminant de l'équation (1), où u est considérée comme étant l'inconnue. Ce discriminant étant un polynôme en t du quatrième degré, il existe *quatre* t critiques. Il y a de même quatre u critiques.

Les t et les u critiques ne peuvent être choisis arbitrairement pour définir la relation (1) : il existe en effet entre ces valeurs la liaison suivante : *le rapport anharmonique des t critiques est égal à celui des u critiques.*

Bien qu'elle ne soit pas énoncée directement dans l'Ouvrage d'Halphen, cette proposition résulte de l'étude qui s'y trouve faite : il est d'ailleurs très facile de l'établir.

On peut ramener l'équation (1) à être symétrique par rapport aux deux variables par une substitution homographique effectuée sur une seule d'entre elles : en effet, une pareille substitution

$$t = \frac{\alpha t' + \beta}{\gamma t' + \delta}$$

contient *trois* paramètres arbitraires, et les relations qui expriment que l'équation (1) est symétrique sont au nombre de trois, savoir

$$B = C, \qquad D = F, \qquad G = H.$$

Or, sur la nouvelle équation

$$\varphi(t', u) = 0, \tag{2}$$

le théorème énoncé est évident, puisque les valeurs des t' critiques sont les mêmes que celles des u critiques. On en déduit qu'il est vrai dans le cas général; en effet, les u critiques de l'équation (2) sont les mêmes que ceux de l'équation (1) et les t' critiques sont reliés homographiquement aux t critiques.

II.

Une application très simple des principes qui précèdent est fournie par l'étude du système des droites tangentes à une quadrique qui rencontrent deux droites fixes quelconques.

Soient Q la quadrique, A et B les deux droites données, M et N deux points, situés respectivement sur ces droites, tels que la droite MN soit tangente à Q. Si l'on désigne par t et u les distances des points M et N à deux origines fixes prises respectivement sur les droites A et B, il existe, quand on fait varier la tangente MN, une relation entre t et u dont il est facile de reconnaître la nature : si l'on se donne le point M sur la droite A, il existe pour le point N deux positions possibles sur la droite B; elles sont données par l'intersection de cette droite et du cône circonscrit à Q ayant son sommet en M. Ainsi la relation considérée est du second degré par rapport à u; elle est, pour la même raison, du second degré par rapport à t. C'est donc une relation (1), *doublement quadratique*.

Appliquons alors la première des propriétés rappelées au paragraphe précédent : à cet effet, considérons *huit* positions de la tangente variable à Q, $M_1N_1, M_2N_2, \ldots, M_8N_8$. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_8$ et $u_1, u_2, \ldots, u_8$ les distances respectives des points M et des points N aux origines choisies sur les deux droites. Comme on l'a vu, la connaissance de ces quantités détermine complètement la relation (1). Le système des droites MN est donc déterminé par la connaissance de *huit* positions particulières de ces droites.

Or, il existe une infinité de quadriques tangentes aux huit droites $M_1N_1, M_2N_2, \ldots, M_8N_8$. Quelle que soit celle de ces quadriques qu'on choisisse, elle donnera lieu au même système de tangentes MN rencontrant les deux droites A et B.

De ce qui précède on conclut les théorèmes suivants :

Toutes les quadriques tangentes à huit droites rencontrant deux droites données A *et* B *sont aussi tangentes à une infinité d'autres droites rencontrant également* A *et* B.

Toutes les droites tangentes à une quadrique donnée et rencontrant deux droites données sont aussi tangentes à une infinité d'autres quadriques.

On remarquera l'analogie du premier de ces théorèmes avec ceux énoncés par Lamé et qui concernent les quadriques passant par sept ou huit points ou bien tangentes à sept ou huit plans.

On peut donner aux énoncés qui précèdent une forme un peu différente, et dire qu'*il est possible de former un système de droites* D, *en nombre infini, et un système de quadriques* Q, *également en nombre infini, tels que chaque droite* D *soit tangente à chaque quadrique* Q.

Ces droites D engendrent une surface S qui est aussi l'enveloppe des quadriques Q. Pour reconnaître le degré de la surface S, cherchons le nombre de ses points d'intersection avec une droite C quelconque. On peut évidemment énoncer ainsi qu'il suit ce problème : *Combien existe-t-il de tangentes à une quadrique* Q *qui rencontrent trois droites données* A, B, C? Comme les droites rencontrant trois droites données sont les génératrices d'une quadrique qui appartiennent à un même système, la question posée se ramène elle-même à la suivante : *Combien existe-t-il de génératrices d'une quadrique* Q′, *appartenant à un même système, qui touchent une autre quadrique* Q?

Considérons la biquadratique gauche Γ, intersection de Q et de Q′. Les génératrices de Q′ rencontrent chacune Γ en deux points, et les génératrices que nous cherchons sont celles pour lesquelles ces deux points sont confondus. L'emploi des fonctions elliptiques va donner aisément leur nombre. On sait, en effet, que les coordonnées d'un point de Γ peuvent être exprimées en fonctions elliptiques d'un argument, et que la somme des valeurs de cet argument, correspondant aux deux points de rencontre de Γ avec les génératrices d'un même système de Q′, est une constante a, à une période près. Les points cherchés ont donc pour arguments, comme on le voit immédiatement,

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2} + \omega_1, \quad \frac{a}{2} + \omega_2, \quad \frac{a}{2} + \omega_3,$$

en adoptant les notations ordinaires. Ces points sont, par conséquent, au nombre de *quatre*.

Ce nombre est aussi, d'après ce qu'on vient de dire, celui des points de rencontre de la surface S avec la droite C. Ainsi la surface S est du quatrième degré.

Dans le cas particulier étudié par M. Mannheim et rappelé plus haut, la surface S dégénère en un hyperboloïde de révolution. Les droites D sont les génératrices de cet hyperboloïde, et les quadriques Q sont les sphères inscrites à la même surface.

III.

Appliquons à présent la deuxième propriété de l'équation (1) : le rapport anharmonique des t critiques est égal à celui des u critiques. Il faut d'abord rechercher quels sont les points de la droite A qui correspondent aux t critiques. Si M est un de ces points, il doit ne lui correspondre sur la droite B qu'un seul point N. Or cela peut arriver de deux manières :

1° Ou bien le point M est tel que le plan déterminé par ce point et par la droite B est tangent à la quadrique Q;

2° Ou bien le point M est l'un des points d'intersection de A et de Q.

En effet, dans le premier cas, le cône circonscrit à Q et dont le sommet est M est tangent à la droite B; dans le second cas, ce cône dégénère en un plan; dans l'un et l'autre cas, le point N correspondant à M est unique.

Ainsi, les quatre points de la droite A correspondant aux t critiques sont les points α et α', situés à l'intersection de A et des deux plans tangents menés par B à la quadrique Q, et les points β et β', situés à l'intersection de A et de Q.

On définira de même les quatre points de B, α et α'_1, β_1 et β'_1, qui correspondent aux u critiques.

On a donc

$$(\alpha\alpha'\beta\beta') = (\alpha_1\alpha'_1\beta_1\beta'_1).$$

On peut remarquer que la quadrique Q est circonscrite au tétraèdre $\beta\beta'\beta_1\beta'_1$, dont $\beta\beta'$ et $\beta_1\beta'_1$ sont deux arêtes opposées. Cela permet de donner une forme un peu plus nette au théorème obtenu, qui peut s'énoncer ainsi :

Lorsqu'une quadrique est circonscrite à un tétraèdre, le faisceau formé par deux faces de ce tétraèdre et par les deux plans tangents à la quadrique, menés par l'arête suivant laquelle se coupent ces deux faces, a même rapport anharmonique que le faisceau analogue relatif à l'arête opposée.