BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

Note à propos d'un théorème connu de géométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 78-82
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__78_1>

NOTE A PROPOS D'UN THÉORÈME CONNU DE GÉOMÉTRIE;

Par M. A. MANNHEIM.

Le théorème dont il s'agit est généralement énoncé ainsi :

« Dans tout quadrilatère circonscrit à une surface du second
» ordre les quatre points de contact sont dans un même plan. »

Cet énoncé est trop absolu, car il y a des quadrilatères circonscrits à une quadrique pour lesquels cette propriété n'existe pas. La démonstration même dont on a fait usage pour obtenir le théorème précédent permet d'arriver à cette remarque. On a appliqué le théorème de Carnot qui, dans le cas actuel, conduit à une relation dont tous les termes sont au carré; on a alors pris la racine sans faire précéder celle-ci du double signe qu'elle comporte. Le signe *plus* a donné le théorème précédent, avec le signe *moins* on aurait trouvé les quadrilatères qu'on a négligés. On peut aussi montrer de la manière suivante l'existence de ces derniers quadrilatères.

Appelons (S) la quadrique donnée, l, m, n, p les points où elle est touchée par les côtés L, M, N, P d'un quadrilatère gauche. Prenons l'une des extrémités du côté L comme sommet d'un cône circonscrit à (S). Ce cône coupe en deux points le côté N opposé à L. Les génératrices de ce cône qui passent par ces points sont P, et une tangente Q qui forme aussi avec L, M, N un quadrilatère gauche circonscrit à (S). Si q est le point de contact de Q, on voit tout de suite que ce point ne peut être dans le plan qui contient l, m, n, p que si L et N sont dans un même plan, et cela est contraire à l'hypothèse; donc L, M, N, Q forment un quadrilatère gauche pour lequel les points de contact des côtés ne sont pas dans un même plan [1].

Pour préciser davantage, voici ce que j'ajoute.

Transformons la quadrique (S) en une sphère et conservons les mêmes notations.

Supposons fixes les tangentes L, N *et rendons mobile la tangente* M *en l'assujettissant toujours à rencontrer ces droites; cherchons le lieu* (m) *de son point de contact* m *avec la sphère* (S).

Par L et m faisons passer un plan; il coupe la sphère (S) suivant un cercle tangent en m à M. De même le plan (N, m) donne un cercle tangent en m à M. On peut donc considérer sur (S) deux séries de cercles; l'une des séries est déterminée par des plans passant par L et l'autre par des plans passant par N. La courbe (m) est le lieu des points où les cercles de l'une des séries touchent les cercles de l'autre série.

Pour déterminer la nature de (m), ainsi définie, faisons une inversion en plaçant en l le pôle d'inversion. La sphère (S) et les cercles tangents en n ont pour transformés un plan (Σ) et, sur ce plan, des cercles tangents entre eux en un point ν; la tangente

---

[1] Par le calcul, M. Pruvost, dans son excellent Ouvrage : *Leçons de Géométrie analytique*, a aussi trouvé qu'il y a deux genres de quadrilatères circonscrits à une quadrique et que, seulement pour les quadrilatères de l'un de ces genres, les points de contact des côtés sont dans un même plan.

commune en ce point à ces cercles est la trace sur (Σ) du plan (l, N). Les cercles de l'autre série ont pour transformées des droites tracées sur (Σ) parallèlement à L. Il est facile de voir que :

Sur le plan (Σ) *les points où les cercles tangents en* ν *sont touchés par des parallèles à* L *appartiennent à deux droites rectangulaires qui passent par* ν; en outre, *l'une ou l'autre de ces droites coupe sous des angles égaux les cercles tangents en* ν; enfin que *ces deux droites rectangulaires, la tangente en* ν *aux cercles, et la parallèle à* L *menée de* ν *forment un faisceau harmonique.*

Revenant par inversion à la sphère (S), on obtient ce théorème :

1. *On a sur une sphère une série de cercles tangents entre eux en un point l et une autre série de cercles tangents entre eux en un point n. Les points m, q, où ces cercles se touchent appartiennent à deux cercles (m), (q) qui se coupent à angles droits en l, n. Le cercle (m), ou (q), coupe sous des angles égaux, en leur point de contact m, ou q, les cercles des deux séries. En l, comme en n, les tangentes à (m) et à (q) et les tangentes aux cercles des deux séries, qui contiennent à la fois l, n, forment un faisceau harmonique.*

D'après ce qui précède on peut énoncer ainsi ce théorème :

2. *Le lieu des points de contact avec la sphère* (S) *des tangentes* M *et* Q, *assujetties à rencontrer deux tangentes à cette surface, se compose de deux cercles (m), (q) qui se coupent à angles droits en l, n points de contact de* L, N. *Le cercle (m) coupe sous des angles égaux les tangentes* M; *de même pour (q) à l'égard des tangentes* Q. *Les plans de (m) et de (q) et les plans déterminés par la corde ln et par chacune des tangentes fixes* L, N *forment un faisceau harmonique* [1].

Si l'on transforme homographiquement ce théorème, on arrive à une propriété relative à une quadrique. En conservant les mêmes

[1] Les tangentes M appartiennent à un hyperboloïde de révolution, de même pour les tangentes Q; cette remarque intéressante a été faite par M. Bricard.

notations et ne parlant que de la transformation de la dernière partie de l'énoncé du théorème 2, on peut dire :

3. *Le lieu des points de contact avec une quadrique des tangentes* M *ou* Q, *assujetties à rencontrer deux tangentes* L, N *à cette surface, se compose de deux coniques : les plans de ces courbes et les plans déterminés par ln et par chacune des tangentes fixes* L, N, *forment un faisceau harmonique.*

De cette propriété résulte que :

4. *Pour un quadrilatère gauche formé par les tangentes* L, M, N, Q *à une quadrique, et dont les points de contact* l, m, n, q *ne sont pas dans un même plan, le point de contact* q *est l'harmonique conjugué, par rapport aux extrémités du côté* Q, *du point où ce côté est coupé par le plan* (l, m, n).

Cette propriété, qui éclaircit le théorème objet de cette Note, peut s'obtenir aussi au moyen du théorème de Carnot.

Remarques. — Reprenons le théorème 1 pour le compléter, lorsqu'on l'applique à un plan.

Conservons, sur ce plan, les lettres mêmes qui désignent les points ou lignes de la sphère en ajoutant seulement l'indice 1.

Quelle que soit la position de m_1 sur (m_1) la tangente aux cercles des deux séries, qui passent en ce point, faisant un angle constant avec ce cercle (m_1), cette droite enveloppe un cercle concentrique à (m_1). Il en est de même de la droite des centres des cercles des deux séries. Ainsi, dans le cas du plan, on peut ajouter :

5. *Quelle que soit la position de* m_1 *sur* (m_1), *la tangente aux cercles des deux séries qui y passent, et la droite des centres de ces cercles, enveloppent des cercles concentriques à* (m_1) [1].

A la sphère (S) circonscrivons un cône le long du petit cercle,

---

[1] On peut arriver à ce résultat en faisant sur un plan arbitraire la perspective de l'hyperboloïde, lieu des tangentes M, l'œil étant sur la sphère à l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan de projection. Cet hyperboloïde,

section de cette surface par le plan (L, m). Le sommet de ce cône est sur la droite L′, tangente en l à la sphère et perpendiculaire à L; il est aussi sur la droite M′, tangente en m à (S) et perpendiculaire à M. De même pour le cône relatif au petit cercle déterminé par le plan (N, m) son sommet, toujours sur M′, est sur la droite N′ tangente en n à (S) et perpendiculaire à N.

La courbe (m) est alors aussi le lieu des points de contact de la tangente M′ qui rencontre L′, N′. D'après cela : *Si l'on a une sphère et quatre tangentes fixes, deux de ces droites* L, L′ *se coupant à angles droits au point l où elles touchent la sphère, de même pour* N, N′, *il est possible de déplacer un angle droit de sommet m, dont les côtés sont tangents à la sphère en ce point, de façon que l'un des côtés de cet angle rencontre* L, N, *tandis que l'autre rencontre* L′, N′.

Dans le déplacement ainsi défini, la figure mobile de grandeur invariable remplit plus de cinq conditions. De là résulte la possibilité de trouver des propriétés relatives aux axes instantanés de rotation qu'on peut faire intervenir pour obtenir ce déplacement.

En terminant je ferai remarquer qu'une marche analogue à celle qui a donné le théorème 1 permet d'étudier ce qui concerne les courbes lieux des points de contact des sphères de deux séries : les unes tangentes à un plan en un point et les autres tangentes en un point à un autre plan.

---

circonscrit à (S) le long de (m), est de révolution; ses génératrices M font des angles égaux avec (m) et leurs perspectives font alors aussi des angles égaux avec (m_1), par suite elles enveloppent un cercle concentrique à cette courbe. De même, si l'on projette les tangentes M′ à (S) qui sont respectivement perpendiculaires aux tangentes M en leurs points de contact, on obtient l'autre cercle concentrique à (m_1).