BULLETIN DE LA S. M. F.

LÉMERAY

Un théorème sur les fonctions itératives

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 255-262

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__255_1>

UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS ITÉRATIVES;

Par M. Léméray.

Si l'on se donne la relation

$$z_1 = \varphi(z),$$

la fonction

$$z_n = \varphi(z_{n-1}) = \varphi^{(n)}(z)$$

est dite la $n^{ième}$ *fonction itérative de* $\varphi(z)$. M. Kœnigs [1] a étudié le cas où, x désignant une solution de l'équation

$$z - \varphi(z) = 0,$$

on a

$$\operatorname{mod}\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]_x < 1.$$

Si l'affixe de z est pris à l'intérieur d'un contour convenable, le point x est point limite de la substitution $[z, \varphi(z)]$. Il a étudié la fonction

$$B(z) = \lim \frac{\varphi_n(z) - x}{[\varphi'(x)]^n}$$

pour n infini.

Cette fonction a reçu depuis plusieurs applications; les plus récentes sont dues, je crois, à M. Appell [2] et à M. Grévy [3]. M. Grévy a considéré particulièrement le cas où $\varphi'(x)$ est nul. Je me propose de considérer le cas

$$\varphi'(x) = 1.$$

1. Désignons par z_{n+1} la $n+1^{ième}$ fonction itérative; alors

$$z_{n+1} = \varphi(z_n).$$

Dérivons par rapport à z, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{n+1}}{dz} &= \frac{dz_{n+1}}{dz_n}\frac{dz_n}{dz},\\
\frac{d^2 z_{n+1}}{dz^2} &= \frac{d^2 z_{n+1}}{dz_n^2}\left(\frac{dz_n}{dz}\right)^2 + \frac{dz_{n+1}}{dz_n}\frac{d^2 z_n}{dz^2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\frac{d^p z_{n+1}}{dz^p} &= \frac{d^p z_{n+1}}{dz_n^p}\left(\frac{dz_n}{dz}\right)^p + U_p + \frac{dz_{n+1}}{dz_n}\frac{d^p z_n}{dz^p},
\end{aligned}$$

---

(1) *Annales de l'École Normale;* 1884. Supplément.

(2) *Sur des équations différentielles transformables en elles-mêmes* (*Acta mathematica*, t. XV).

(3) *Étude sur les équations fonctionnelles* (*Ann. de l'Éc. Norm.;* août 1894).

où U_p désigne la somme des termes qui contiennent les dérivées de z_n par rapport à z avec des indices de dérivation autres que 1 ou p.

Supposons $\varphi(z)$ telle que, x désignant une racine de l'équation

$$\varphi(z) - z = 0,$$

la fonction $\varphi(z) - z$ ait, au point x, ses $p - 1$ premières dérivées nulles; dans cette hypothèse $\varphi'(x) = 1$ et U_p s'annule pour $z = x$, l'expression de la $p^{\text{ième}}$ dérivée au point x est

$$\left(\frac{d^p z_{n+1}}{dz^p}\right)_x = \left(\frac{d^p z_{n+1}}{dz_n^p}\right)_x + \left(\frac{d^p z_n}{dz^p}\right)_x.$$

Faisons successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$; on en tire

$$\left(\frac{d^p z_n}{dz^p}\right)_x = n\left(\frac{dz_1^p}{dz^p}\right)_x.$$

Par suite, dans notre hypothèse, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la $n^{\text{ième}}$ fonction itérative au point x est égale à n fois la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction donnée au même point.

2. Les fonctions holomorphes au point x, qu'elles admettent pour point limite et telles qu'en ce point les $p - 1$ premières dérivées de la fonction $\varphi(z) - z$ soient nulles peuvent s'écrire

$$\varphi(z) = z_1 = z + (z - x)^p\left[\frac{P}{p!} + \Phi(z - x)\right]$$

où P désigne la valeur (supposée différente de zéro) de $\left(\frac{d^p z_1}{dz^p}\right)_x$ et où Φ désigne une fonction qui, lorsque $z - x$ devient infiniment petit d'un certain ordre, devient infiniment petite d'un ordre au moins égal. Les fonctions considérées ne peuvent différer que par la fonction Φ. Supposons que, parmi ces fonctions, il y en ait une pour laquelle le produit

$$n(z_n - x)^{p-1}$$

ait une limite quand n est infiniment grand du premier ordre. C'est dire que $z_n - x$ est infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{p-1}$. La différence de deux itératives successives est

$$z_{n+1} - z_n = (z_n - x)^p \frac{P}{p!} + (z_n - x)^p \Phi(z_n - x);$$

à la limite, le premier terme du second membre est de l'ordre $\frac{p}{p-1}$; le deuxième terme est, au moins, de l'ordre

$$\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p+1}{p-1};$$

il reste

$$\lim(z_{n+1} - z_n) = \frac{P}{p!} \lim(z_n - x)^p.$$

On voit donc que $z_{n+1} - z_n$ est d'ordre p par rapport à $(z_n - x)$.

Si le produit $n(z_n - x)^{p-1}$ tend vers une limite, cette limite est indépendante de la valeur initiale de z, pourvu que cette dernière ait été choisie dans la région de convergence régulière (au sens de M. Kœnigs) appartenant au point x. Soient, en effet, deux valeurs de ce produit

$$n(z_n - x)^{p-1}, \quad (n+\nu)(z_{n+\nu} - x)^{p-1}.$$

Leur rapport est

$$\frac{n}{n+\nu}\left(\frac{z_n - x}{z_{n+\nu} - x}\right)^{p-1}.$$

Quand, ν étant fini, n croît sans limite, le premier facteur tend vers l'unité; d'autre part, en général, la limite du rapport

$$\frac{z_n - x}{z_{n+\nu} - x}$$

est, comme l'on sait,

$$\frac{1}{(\varphi' x)^\nu};$$

dans notre cas, le deuxième facteur tend donc aussi vers l'unité. Mais $z_{n+\nu}$ peut être considéré comme étant la $n^{\text{ième}}$ fonction itérative quand on a pris pour valeur initiale, non plus z, mais z_ν; la proposition est donc démontrée et la limite du produit est indépendante de z.

3. Je dis maintenant que, s'il existe une de ces fonctions, toutes les autres (qui n'en diffèrent que par Φ) présenteront la

même limite pour le produit considéré. Soit la fonction

$$u = z + (z - x)^p \left[\frac{P}{p!} + \Phi_1(z - x)\right].$$

Sa ($m + 1^{\text{ième}}$) fonction itérative est

$$u_{m+1} = u_m + (u_m - x)^p \left[\frac{P}{p!} + \Phi_1(u_m - x)\right].$$

On peut évidemment trouver des valeurs de m et de n telles que l'on ait

$$z_n < u_m < z_{n+1},$$

et soit $u_m = z_n + \varepsilon$, ε étant une quantité plus petite que $z_{n+1} - z_n$; on a

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{z_{n+1} - z_n} = \left(\frac{z_n + \varepsilon - u}{z_n - x}\right)^p \left[\frac{\frac{P}{p!} + \Phi(z_n + \varepsilon - x)}{\frac{P}{p!} + \Phi(z_n - x}\right].$$

A la limite, ε est infiniment petit du même ordre que $z_{n+1} - z_n$: il est donc infiniment petit d'ordre p par rapport à $z_n - x$; la limite du premier facteur du second membre est 1; le deuxième facteur a aussi l'unité pour limite; le premier membre a donc pour limite l'unité. Par suite, il existe des valeurs de m et de n assez grandes, mais finies, et différant d'une quantité constante, pour qu'en rangeant suivant l'ordre de convergence vers x, les termes de la suite $z_1, z_2, z_3, \ldots$ et de la suite $u_1, u_2, u_3 \ldots$, on trouve alternativement un terme de chaque suite,

$$z_n, \quad u_m, \quad z_{n+1}, \quad u_{m+1}, \quad z_{n+2}, \quad \ldots.$$

Si l'on pose

$$m = n + r,$$

les deux produits s'écrivent

$$n(z_n - x)^{p-1}, \qquad (n + r)(u_{n+r} - x)^{p-1}:$$

à la limite, le second devient

$$n(u_m - x)^{p-1}.$$

Comme, dans le premier, on peut remplacer z_n par z_{n+1}, on voit que l'on a à la limite (u_m étant compris entre z_n et z_{n+1})

$$\lim n(z_n - x)^{p-1} = \lim n(u_m - x)^{p-1} = \lim n(u_n - x)^{p-1}.$$

4. La limite étant indépendante de Φ et étant constante est nécessairement fonction de P. Appelons α et β deux valeurs successives du produit

$$\alpha = n(z_n - x)^{p-1},$$
$$\beta = (n+1)(z_{n+1} - x)^{p-1} = n(z_{n+1} - x)^{p-1} + (z_{n+1} - x)^{p-1},$$

on a

$$\beta - \alpha = n[(z_{n+1} - x)^{p-1} - (z_n - x)^{p-1}] + (z_{n+1} - x)^{p-1};$$

or

$$z_{n+1} - x = (z_n - x) + (z_n - x)^p \left(\frac{P}{p!} + \Phi\right)$$
$$= (z_n - x)\left[1 + (z_n - x)^{p-1}\left(\frac{P}{p!} + \Phi\right)\right].$$

Posons

$$\left(\frac{P}{p!} + \Phi\right) = \varpi$$

Élevons à la puissance $p - 1$, et retranchons des deux membres $(z_n - x)^{p-1}$; on a

$$(z_{n+1} - x)^{p-1} - (z_n - x)^{p-1} = (p-1)(z_n - x)^{2(p-1)}\varpi + \frac{p-1}{1}\,\frac{p-2}{2}(z_n - x)^{3(p-1)}\varpi^2 + \ldots;$$

par suite

$$\beta - \alpha = (z_{n+1} - x)^{p-1} + n(p-1)(z_n - x)^{2(p-1)}\varpi + n\frac{p-1}{1}\,\frac{p-2}{2}(z_n - x)^{3(p-1)}\varpi^2 + \ldots.$$

Divisons par $(z_n - x)^{p-1}$, et passons à la limite en remarquant qu'alors

$$\lim \varpi = \frac{P}{p!};$$

il vient

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{(z_n - x)^{p-1}} = 1 + n(p-1)(z_n - x)^{p-1}\frac{P}{p!} = K,$$

où K est une grandeur inconnue; on a alors

$$\lim n(z_n - x)^{p-1} = \frac{(K-1)p!}{P(p-1)}.$$

5. Il reste à montrer qu'il existe une fonction telle que le produit $n(z_n - x)^{p-1}$ ait une limite. Pour trouver une telle fonction, éliminons u entre les équations

$$u(z-x)^{p-1} = \mathrm{C}, \qquad (u+1)(z_1 - x)^{p-1} = \mathrm{C};$$

on en tire

$$z_1 = x + \sqrt[p-1]{\frac{\mathrm{C}(z-x)^{p-1}}{\mathrm{C}+(z-x)^{p-1}}}.$$

Cette fonction s'itère directement; on trouve

$$z_n = x + \sqrt[p-1]{\frac{\mathrm{C}(z-x)^{p-1}}{\mathrm{C}+n(z-x)^{p-1}}}.$$

On vérifie qu'elle admet bien x pour point limite; la limite du produit est C. Il reste à déterminer la valeur de K, au moyen de l'expression

$$\mathrm{C} = \frac{(\mathrm{K}-1)p!}{\mathrm{P}(p-1)}.$$

Pour cela, il nous faut connaître la valeur de P. Développons le binôme

$$[\mathrm{C}+(z-x)^{p-1}]^{-\frac{1}{p-1}},$$

on obtient

$$\mathrm{C}^{-\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p-1}\mathrm{C}^{-\frac{1}{p-1}-1}(z-x)^{p-1}$$
$$+ \frac{1}{2(p-1)}\left(\frac{1}{p-1}+1\right)\mathrm{C}^{-\frac{1}{p-1}-2}(z-x)^{2(p-1)} + \ldots;$$

par suite

$$z_1 = x + (z-x) - \frac{1}{p-1}\frac{(z-x)^p}{\mathrm{C}}$$
$$+ \frac{1}{2(p-1)}\left(\frac{1}{p-1}+1\right)\frac{(z-x)^{2p-1}}{\mathrm{C}^2} + \ldots.$$

En dérivant p fois cette expression, on arrive à une expression de la forme

$$\frac{d^p z_1}{dz^p} = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{\mathrm{C}}p(p-1)\ldots 3.2.1 + \mathrm{R},$$

où R désigne l'ensemble des termes qui contiennent des puissances de $z - x$. Pour $z = x$, R s'annule; il reste donc

$$\left[\frac{d^p z_1}{dz^p}\right]_x = \mathrm{P} = -\frac{p!}{(p-1)\mathrm{C}}.$$

On voit donc que K est nul; en sorte que:

Si une fonction $\varphi(z)$, holomorphe au voisinage du point x, admet ce point pour point limite; si, de plus, les $p - 1$ premières dérivées de la fonction $\varphi(z) - z$ sont nulles au point x, on aura

$$\lim n[\varphi^{(n)}(z) - x]^{p-1} = -\frac{p!}{\mathrm{P}(p-1)},$$

P désignant la valeur de la première dérivée au point $z = x$.