BULLETIN DE LA S. M. F.

V. SCHLEGEL

Sur un système de coordonnées tétraédriques

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 216-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__216_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TÉTRAÉDRIQUES;

Par M. V. Schlegel.

M. d'Ocagne a étudié (¹) un système de coordonnées tétraédriques ponctuelles ou planes, très remarquable par le fait que l'on en déduit quatre systèmes connus, deux à deux réciproques, en rejetant à l'infini le *point fondamental* O ou le *plan fondamental* ABC du tétraèdre OABC. Il s'agit des coordonnées cartésiennes et plückeriennes d'une part, des coordonnées ponctuelles et tangentielles d'autre part.

Dans ce qui suit nous allons déduire ce système intéressant d'une méthode employée par Grassmann, pour représenter un point P ou un plan π à l'aide d'un tétraèdre OABC.

1. Soient α, β, γ, δ des nombres quelconques réels; on a, suivant cette méthode,

$$(1)\qquad \alpha+\beta+\gamma+\delta)\,P = \alpha A+\beta B+\gamma C+\delta O.$$

Soit a le point d'intersection du plan PBC et de l'arête OA, savoir le point qu'on peut déduire également des points O et A ou des points P, B, C. Ce point a est représenté doublement par l'équation

$$(2)\qquad \alpha A+\delta O = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)P - \beta B - \gamma C$$

dérivée de (1). Donc on peut poser

$$(3)\qquad (\alpha+\delta)a = \alpha A+\delta O,$$

d'où l'on tire, par des calculs bien connus,

$$(4)\qquad \frac{O-a}{a-A} = \frac{\alpha}{\delta},\qquad \frac{O-b}{b-B} = \frac{\beta}{\delta},\qquad \frac{O-c}{c-C} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Pour trouver les deux dernières formules et le sens de b et c, il

(¹) *Nouv. Annales de Mathem.*, série 2, t. XI, p. 70.

suffit de permuter circulairement, dans ce qui précède, les trois premières lettres des deux alphabets. Ajoutons que la différence de deux points représente leur distance en longueur et direction.

Enfin, si l'on pose

$$(5)\qquad \alpha = \frac{x}{\lambda}, \qquad \beta = \frac{y}{\mu}, \qquad \gamma = \frac{z}{\nu}, \qquad \delta = 1,$$

les équations (4) se changent en

$$(6)\qquad x = \lambda\,\frac{O - a}{a - A}, \qquad y = \mu\,\frac{O - b}{b - B} \qquad z = \nu\,\frac{O - c}{c - C}.$$

Ce sont les formules (1) de M. d'Ocagne, déterminant les coordonnées tétraédriques ponctuelles du point P.

2. Soient α', β', γ', δ' des nombres quelconques réels; on a, suivant la même méthode,

$$(7)\qquad (\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')\pi = \alpha'(OBC) + \beta'(OCA) + \gamma'(OAB) + \delta'(BAC).$$

Il faut se rappeler que le produit *extérieur* (écrit entre crochets) de *deux* points représente le segment de droite compris entre eux, le produit de *trois* points le double de l'aire du triangle formé par eux, le produit de *quatre* points le sextuple du volume du tétraèdre formé par eux. S'il ne s'agit pas de grandeur, mais seulement de situation et direction, on peut remplacer le segment de droite par la droite entière et le triangle par son plan.

Soit a' le point d'intersection du plan π et de l'arête OA. Alors, pour représenter a' à l'aide de π et OA, nous posons

$$(8)\qquad (OBCA) = 1,$$

ce qui donne à la multiplication extérieure le caractère spécial de multiplication *régressive*. En omettant un facteur numérique, qui sera ajouté plus tard, on a

$$(9)\qquad a' \equiv [\pi(OA)],$$

ou, en ayant égard à l'équation (7),

$$a' \equiv \alpha'[(OBC)(OA)] + \delta'[(BAC)(OA)].$$

En appliquant les lois de la multiplication extérieure, savoir

$$[(ab)c] = (abc), \qquad (ab) = -(ba),$$

on trouve

$$a' \equiv -\alpha'[(\mathrm{OBCA})\mathrm{O}] + \delta'[(\mathrm{OBCA})\mathrm{A}],$$

ou, à cause de la relation (8),

$$(10) \qquad a' \equiv -\alpha'\mathrm{O} + \delta'\mathrm{A}.$$

Les autres produits tirant leur origine de (9) s'évanouissent en vertu de la loi $(aa) = 0$.

En égalant, comme il faut, les sommes de facteurs des deux membres, on écrira, au lieu de (10),

$$(11) \qquad (\delta' - \alpha')a' = \delta'\mathrm{A} - \alpha'\mathrm{O};$$

d'où l'on tire

$$(12) \qquad -\frac{a' - \mathrm{A}}{\mathrm{O} - a'} = \frac{\alpha'}{\delta'}, \qquad -\frac{b' - \mathrm{B}}{\mathrm{O} - b'} = \frac{\beta'}{\delta'}, \qquad -\frac{c' - \mathrm{C}}{\mathrm{O} - c'} = \frac{\gamma'}{\delta'}.$$

Enfin, si l'on pose

$$(13) \qquad \alpha' = \lambda u, \qquad \beta' = \mu v, \qquad \gamma' = \nu w, \qquad \delta' = 1,$$

les équations (12) se changent en

$$(14) \quad u = -\frac{1}{\lambda}\frac{a' - \mathrm{A}}{\mathrm{O} - a'}, \qquad v = -\frac{1}{\mu}\frac{b' - \mathrm{B}}{\mathrm{O} - b'}, \qquad w = -\frac{1}{\nu}\frac{c' - \mathrm{C}}{\mathrm{O} - c'}.$$

Ce sont là précisément les formules (2) de M. d'Ocagne, déterminant les coordonnées tétraédriques planes (tangentielles) du plan π.

3. Pour que le point P soit situé dans le plan π, il faut que l'on ait

$$(15) \qquad (\pi\mathrm{P}) = 0,$$

ou, à cause des relations (1) et (7),

$$\alpha\alpha'(\mathrm{OBCA}) + \beta\beta'(\mathrm{OCAB}) + \gamma\gamma'(\mathrm{OABC}) + \delta\delta'(\mathrm{BACO}) = 0,$$

les autres produits s'évanouissant en vertu de la loi $(aa) = 0$. Les produits restants sont égaux entre eux en vertu de la loi

$(ab) = -(ba)$, parce qu'ils se réduisent à la même forme par un nombre pair de changements de facteurs juxtaposés. Donc il reste

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' = 0,$$

ou, en substituant les valeurs (5) et (13),

$$ux + vy + wz + 1 = 0, \tag{16}$$

ce qui est l'équation (6) de M. d'Ocagne.