BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CARTAN

Sur un théorème de M. Bertrand

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 230-234

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__230_0>

SUR UN THÉORÈME DE M. BERTRAND;

Par M. E. Cartan.

Il existe un certain nombre de démonstrations du célèbre théorème énoncé et démontré pour la première fois en 1845 par M. J. Bertrand :

Toute fonction rationnelle de n lettres ($n \neq 4$), *qui n'est ni symétrique ni alternée, prend au moins n valeurs distinctes, lorsqu'on y permute ces lettres.*

Ce théorème a été démontré depuis par Cauchy, Serret et M. Jordan. Mais les démonstrations que ces géomètres en ont données sont assez longues et exigent des connaissances assez étendues sur la théorie des substitutions. Il me semble qu'on peut le déduire immédiatement de deux lemmes, connus d'ailleurs depuis très longtemps, et dont la démonstration se fait d'une façon tout à fait élémentaire. Voici comment on peut présenter la chose, en ne supposant connues que les notions de substitutions, de produit de substitutions et de groupes de substitutions.

1. Soit $F(a, b, c, \ldots, l)$ une fonction rationnelle des n lettres $a, b, \ldots, l$, prenant p valeurs distinctes

$$F_1 = F_1, F_2, F_3, \ldots, F_p,$$

lorsqu'on y permute les lettres $a, b, \ldots, l$ de toutes les façons possibles. Si l'on effectue sur une quelconque de ces p fonctions une substitution des n lettres, cela revient à effectuer sur F deux substitutions successives, c'est-à-dire qu'on obtient encore une des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$. De plus, une même substitution, effectuée sur deux fonctions distinctes, donne naissance à deux fonctions distinctes. Il en résulte qu'à chaque substitution S des n lettres $a, b, \ldots, l$ on peut faire correspondre une permutation des p quantités $F_1, F_2, \ldots, F_p$, à savoir

$$F_1 S, F_2 S, \ldots, F_p S,$$

en désignant par $F_i S$ ce que devient F_i par la substitution S. On obtient ainsi $N = n!$ permutations des p quantités F. Ces N permutations ne sont pas nécessairement toutes distinctes. Une quelconque d'entre elles coïncidera avec $(q-1)$ autres, s'il y a q substitutions n'altérant aucune des quantités $F_1, F_2, \ldots, F_p$, et réciproquement. Soient

$$1, T_1, T_2, \ldots, T_{q-1}$$

toutes les substitutions qui jouissent de cette propriété. Nous aurons formé $\frac{N}{q}$ permutations distinctes des p quantités $F_1, F_2, \ldots, F_p$.

Il est évident que le produit de deux quelconques des substitutions T est encore une substitution T, car c'est une substitution qui n'altère évidemment aucune des quantités F. Donc les substitutions T forment un groupe Γ. Il y a plus. Soit S une substitution quelconque des n lettres $a, b, \ldots, l$. On a, quel que soit α,

$$F_\alpha S T_i = F_\alpha S,$$

d'où, en effectuant sur les deux membres la substitution S^{-1} inverse de S,

$$F_\alpha S T_i S^{-1} = F_\alpha S S^{-1} = F_\alpha,$$

et, par suite,

$$S T_i S^{-1} = T_k.$$

La substitution $S T_i S^{-1}$ est dite *transformée* de T_i par la substitution S^{-1}. On voit donc que toute substitution de Γ est transformée par une substitution quelconque en une autre substitution de Γ. Pour cette raison Γ est dit *invariant* dans le groupe total des substitutions des n lettres $a, b, \ldots, l$ ou, autrement dit, dans le groupe symétrique de ces n lettres.

Si l'on remarque que, parmi les $\frac{N}{q}$ permutations des p quantités F, il y en a au moins p distinctes, puisque la première quantité F_1 de la première permutation peut devenir $F_2, F_3, \ldots, F_p$, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Si F *est une fonction rationnelle des n lettres $a, b, \ldots, l$ prenant p valeurs distinctes lorsqu'on y permute ces lettres, il existe un système de $\frac{n!}{q}$ permutations distinctes de p lettres, où q désigne le nombre des substitutions d'un groupe de n lettres invariant dans le groupe symétrique, et de plus on a* *les inégalités*

$$p \leqq \frac{n!}{q} \leqq p!$$

2. Il s'agit maintenant de chercher toutes les valeurs possibles du nombre q, parmi lesquelles se trouve évidemment la valeur 1, si aucune substitution ne conserve toutes les fonctions F_1, $F_2, \ldots, F_p$.

Si l'on remarque que toute substitution peut être obtenue par une succession de transpositions de deux lettres, le nombre de ces transpositions conservant toujours la même parité, de quelque façon qu'on procède, il est clair que l'ensemble des substitutions résultant d'un nombre pair de transpositions forme un groupe G. Ce groupe est invariant dans le groupe symétrique, car si T est une de ses substitutions, S une substitution quelconque de n lettres, STS^{-1} résulte évidemment, comme T, d'un nombre pair de transpositions. Ce groupe G s'appelle le *groupe alterné,* et il contient la moitié des substitutions de n lettres, c'est-à-dire $\frac{n!}{2}$. Il peut évidemment être obtenu au moyen des substitutions qui sont les produits de *deux* transpositions, substitutions qui sont de la forme (abc) ou $(ab)(cd)$, suivant que ces deux transpositions déplacent ou non une lettre commune (¹). Il suffit même de prendre les cycles de trois lettres, car on a

$$(abc)\,(abd) = (ad)\,(bc).$$

Si n est différent de 4, *il n'y a pas d'autre groupe invariant dans le groupe symétrique que la substitution identique et le groupe alterné.* Pour le démontrer, je rappelle que, si une substitution T est décomposée en cycles

$$T = (ab\ldots d)(ef\ldots)\ \ldots,$$

la transformée de T, par une substitution quelconque S, est formée du même nombre de cycles, chacun d'eux échangeant le même nombre de lettres. Car, si S remplace respectivement $a, b, \ldots, d$ par $\alpha, \beta, \ldots, \delta$, la substitution $S^{-1}TS$ contiendra manifestement

(¹) Je désigne comme d'habitude par la notation $(\alpha\beta\ldots\lambda)$ la substitution circulaire (ou cycle) effectuée sur les lettres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

le cycle $(\alpha\beta\ldots\delta)$. C'est pour cela que $S^{-1}TS$ est dite *semblable* à T, et si T fait partie d'un groupe invariant dans le groupe symétrique, il en sera de même de toutes les substitutions semblables à T.

Cela étant, soit Γ un groupe invariant dans le groupe symétrique. « Supposons en prêmier lieu que, parmi les cycles d'une de ses substitutions T, il en existe un contenant plus de deux lettres, $T=(abc\ldots d)(ef\ldots)\ldots$. Soient α, β, δ trois lettres quelconques; γ, ε, φ, ... les autres. Les substitutions

$$T_1=(\alpha\beta\gamma\ldots\delta)(\varepsilon\varphi\ldots)\ldots \quad \text{et} \quad T_2=(\beta\alpha\gamma\ldots\delta)(\varepsilon\varphi\ldots)\ldots,$$

semblables à T, faisant partie de Γ, $T_2T_1^{-1}$ en fera également partie; mais cette substitution se réduit au cycle $(\alpha\beta\delta)$ des trois lettres arbitraires α, β, δ.

» Si tous les cycles de T contiennent au plus deux lettres, soient α, β, γ, δ quatre lettres arbitraires; ε, φ, ... les autres; Γ contiendra les deux substitutions $T_1=(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\varphi)\ldots$, $T_2=(\alpha\gamma)(\beta\delta)(\varepsilon\varphi)\ldots$, et par suite $\Sigma=T_1T_2=(\alpha\delta)(\beta\gamma)$. Si $n>4$, Γ contiendra de même $\Sigma_1=(\alpha\zeta)(\beta\gamma)$, où ζ est une lettre arbitraire autre que α, β, γ, δ, et, par suite aussi, $\Sigma\Sigma_1=(\alpha\delta\zeta)$ (¹). »

Donc dans tous les cas Γ contient tous les cycles de trois lettres et, par suite, toutes les substitutions du groupe alterné. S'il en contenait une autre non alternée S, en désignant par U une transposition quelconque, il contiendrait la substitution alternée US et, par suite aussi, $(US)S^{-1}=U$, donc toutes les transpositions et toutes les substitutions de n lettres.

La proposition est donc démontrée, et q ne peut avoir, si n est différent de 4, que l'une des valeurs 1 ou $\frac{n!}{2}$.

3. Cela étant, le théorème en vue se démontre immédiatement. Si q est égal à 1, les inégalités

$$p\leqq\frac{n!}{q}\leqq p!$$

exigent que *p soit au moins égal à n*; si q est égal à $\frac{n!}{2}$, les

(¹) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 63.

mêmes inégalités exigent que p soit égal à 2 et alors la fonction F admet le groupe alterné, c'est-à-dire est alternée.

On peut démontrer que, dans le cas de $n \neq 4$, le groupe alterné n'admet aucun sous-groupe invariant. L'application des mêmes raisonnements montre alors que *toute fonction non alternée de n lettres prend au moins n valeurs distinctes par les substitutions du groupe alterné.*

P.-S. Depuis la rédaction de cette Note, j'ai appris que M. E. Maillet, ingénieur des Ponts et Chaussées, avait, dans une thèse parue en novembre 1892, donné du théorème de M. Bertrand une démonstration fondée sur des principes analogues à ceux que j'ai exposés. M. Maillet, en partant du fait que le groupe alterné n'admet pas de sous-groupe invariant, en déduit (p. 20-21) que toute fonction non alternée de n lettres prend au moins n valeurs distinctes par les substitutions du groupe alterné, d'où résulte facilement le théorème en question. On voit que ma démonstration ne suppose pas connue la propriété du groupe alterné invoquée par M. Maillet.