BULLETIN DE LA S. M. F.

P. PAINLEVÉ

Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 136-184

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__136_0>

SUR LES MOUVEMENTS ET LES TRAJECTOIRES RÉELS DES SYSTÈMES;

Par M. Paul Painlevé.

L'étude des trajectoires réelles d'un système soumis à des forces données rentre dans la théorie des courbes définies par les équations différentielles. On connaît les travaux considérables de M. Poincaré sur le sujet; les nouvelles méthodes d'approximation de M. Picard comportent également d'importantes applications à cette théorie. C'est à un point de vue assez différent que je me place pour étudier *le mouvement et les trajectoires réels d'un système matériel* (S) *à liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps*. Le principal résultat que j'indiquerai ici n'est qu'une première application (dans le domaine *réel*) de la méthode que j'ai employée pour discuter les singularités essentielles d'une équation différentielle quelconque [1].

Dans l'étude du mouvement de (S), étude qui revient à l'intégration d'un système d'équations de Lagrange, on peut se trouver en effet arrêté pour des raisons très différentes. Si, à l'instant t_1, le système atteint une position déterminée (S_0) avec des vitesses déterminées, il n'y a aucune difficulté à poursuivre la détermination du mouvement, pourvu que la position (S_0) soit *régulière :* j'entends par là que, dans le voisinage de (S_0), les coefficients des équations de Lagrange sont des fonctions régulières des paramètres $q_1, \ldots, q_k$, qui définissent la position de (S). Quand (S_0) est une position *singulière,* il faut avoir recours aux travaux de M. Poincaré et de M. Picard sur les intégrales des équations différentielles qui répondent à des conditions initiales singulières. Mais une difficulté d'un tout autre ordre provient de ce fait que, t tendant vers t_1, la position de (S) ou ses vitesses peuvent ne pas tendre vers une limite; autrement dit, les fonctions $q_i(t)$ et $q'_i(t)$ peuvent devenir indéterminées pour $t = t_1$, et cela sans que rien le fasse prévoir sur les équations différentielles.

La proposition que j'ai en vue s'énonce ainsi : *Si, t tendant vers t_1,* (S) *tend vers une position régulière, ses vitesses tendent*

[1] Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mars 1893).

respectivement vers une limite finie. De plus, *si, t croissant indéfiniment,* (S) *tend vers une position régulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre, et toutes les vitesses tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

D'après cela, si pour $t = t_1$ le mouvement cesse d'être *régulier,* c'est que (S) ou bien atteint une position singulière, ou bien ne tend vers aucune position limite quand t tend vers t_1. Cette dernière singularité peut d'ailleurs se présenter : il arrive que les fonctions $q_i(t)$ deviennent indéterminées pour des valeurs réelles de t, variables avec les constantes. Toutefois, cela n'a jamais lieu quand certaines conditions sont remplies ; mais c'est là un point qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

Le théorème que je viens de citer, joint à des considérations tout élémentaires, entraîne quelques conséquences au sujet des trajectoires réelles. Voici les plus importantes. Regardons les variables réelles $q_1, \ldots, q_k$ comme les coordonnées d'un espace à k dimensions ; soit E_k un domaine de cet espace *où les coefficients des équations de Lagrange sont holomorphes,* et soit (C) ou $[q_i = \varphi_i(q_1),\ i = 2, \ldots, k]$ un fragment de trajectoire contenu dans E_k. En chaque point M de (C), la force vive T de (S) a une valeur bien déterminée ; une trajectoire ne comporte donc que deux mouvements *distincts,* différant seulement par le sens, mouvements réels si T est positif, imaginaires si T est négatif. Mais les mouvements imaginaires deviennent réels (et réciproquement) quand on change t en it ou, ce qui revient au même, quand on change *le sens* de toutes les forces appliquées au système. En appelant mouvement *conjugué* du mouvement *vrai* le mouvement de (S) qui correspond aux nouvelles forces, on voit que les trajectoires réelles se divisent naturellement en *trajectoires vraies* et *trajectoires conjuguées*. Il existe un faisceau à k paramètres de trajectoires pour lesquelles T s'annule au moins en un point M′ (qui n'est pas un point d'équilibre) ; en ces points, dits *points d'arrêt,* le système rétrograde sur la trajectoire, qui est alors formée de segments alternativement vrais ou conjugués, séparés par les points M′ ; nous la nommons *trajectoire mixte*.

Il peut exister toutefois (mais il n'existe pas en général) des trajectoires exceptionnelles qui comportent une infinité de mouvements ; ces trajectoires sont nécessairement des *géodésiques* de T, et elles dépendent au plus de $(k - 1)$ paramètres. Elles seront dites *trajectoires remarquables*. Quand elles dépendent précisément de $(k - 1)$ paramètres, elles se confondent avec le faisceau des trajectoires mixtes dont le nombre de paramètres s'abaisse d'une unité.

Ces définitions adoptées, soit M un point de E_k ; *par ce point passent une infinité de trajectoires réelles* (C) *tangentes à une direction quelconque donnée et qui dépendent d'une constante arbitraire; ces trajectoires sont toutes des courbes analytiques régulières dans le voisinage de* M. Elles comprennent un faisceau à un paramètre de trajectoires *mixtes* présentant dans E_k un point d'arrêt, une trajectoire (C_1) (et une seule) pour laquelle M est un point d'arrêt. Cette trajectoire se réduit à un point si M correspond à une position d'équilibre de (S). Enfin, quand par un point M passe une trajectoire *remarquable,* elle se confond avec (C_1) ; si toutes les trajectoires (C_1) sont remarquables, elles se confondent dans E_k avec les trajectoires mixtes.

Il ne passe pas par le point M *d'autres trajectoires, si le point* M *n'est pas une position d'équilibre.* Cette proposition peut paraître évidente au premier examen ; en réalité, elle n'est exacte qu'en vertu du théorème énoncé tout à l'heure, et elle se trouve en défaut *pour les points d'équilibre. Par un point d'équilibre* M, *il peut passer, en outre du faisceau régulier de trajectoires, des branches* SINGULIÈRES *de trajectoires* (C), qui présentent au point M des singularités de nature quelconque, par exemple n'ont pas de tangente ; *si voisin qu'on prenne* M' *de* M, *l'arc* MM' *de* (C) *n'est parcouru en un temps fini ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué.* En général, le système (S) tend sur (C) vers la position M *quand t croît indéfiniment,* dans l'un des deux mouvements vrai ou conjugué. Il arrive aussi que M est sur (C) un point limite d'une suite de points d'arrêt M_1, M_2, ... ; la branche MM' se décompose alors en une infinité de segments M_1M_2, M_2M_3, ... qui correspondent à autant de mouvements périodiques de (S), alternativement vrais et conjugués. Enfin, il peut exister sur (C) une infinité de points d'équilibre (de l'une ou l'autre des espèces précédentes) formant des suites dont le point d'équilibre considéré M soit un point limite.

Tout fragment MM′ de trajectoire, intérieur à E_k, qui ne comprend pas de branche singulière, notamment tout fragment qui ne passe pas par un point d'équilibre, est parcouru tout entier en un temps fini dans le même sens, d'un mouvement soit vrai, soit conjugué; toutefois, dans le cas exceptionnel où (C) est une trajectoire mixte, MM′ se décompose en un nombre *fini* de segments jouissant de cette propriété; si MM′ appartient à une trajectoire remarquable, il est parcouru tout entier dans le même sens d'une infinité de manières, mais un point quelconque de MM′ est point d'arrêt pour d'autres mouvements.

Quand les forces dérivent d'un potentiel, tout segment MM′ (*intérieur à* E_k) *d'une trajectoire prise au hasard, est parcouru entièrement en un temps fini, dans le mouvement vrai ou conjugué. Il n'y a d'exception que pour des faisceaux particuliers de trajectoires.*

Tels sont les principaux résultats qui seront développés dans ce Mémoire. Je commencerai par établir quelques propositions bien simples concernant les équations différentielles des trajectoires.

Nombre des constantes dont dépendent les trajectoires.

Considérons un système (S) à liaisons indépendantes du temps, et soumis à des forces également indépendantes du temps, mais que nous ne supposons pas encore indépendantes des vitesses. Le mouvement de ce système est déterminé par les équations de Lagrange

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k), \qquad \dfrac{dq_i}{dt} = q'_i, \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array} \right.$$

où

$$2T \equiv \sum q'_i q'_j A_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_k) \equiv \frac{ds^2}{dt^2}, \qquad (A_{ij} \equiv A_{ji}),$$

et où le discriminant Δ de la forme quadratique T n'est pas identiquement nul.

Soient $t_0, q_2^0, \ldots, q_k^0, q_1'^0, q_2'^0, \ldots, q_k'^0$ les valeurs de $t, q_2, \ldots, q_k,$

$q'_1, q'_2, \ldots, q_k$, pour une valeur donnée de q_1, soit $q_1 = 0$; les équations (1) définissent $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k$ en fonction de $t - t_0$ et des $(2k-1)$ constantes arbitraires $q_2^0, q_3^0, \ldots, q_k^0$, $q_1'^0, \ldots, q_k'^0$. Exprimons $q_2, \ldots, q_k$ en fonction de q_1 en éliminant t, et convenons de dire que les relations $q_2 = \varphi_2(q_1), \ldots$, $q_k = \varphi_k(q_1)$ ainsi obtenues définissent *les trajectoires* du système. Il est clair que ces trajectoires dépendent au plus de $(2k-1)$ constantes, à savoir $q_2^0, \ldots, q_k^0, q_1'^0, \ldots, q_k'^0$; d'autre part, elles dépendent au moins de $(2k-2)$ constantes distinctes, puisque, pour q_1 donné, $q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. Il est bien facile de voir qu'*en général* le nombre ν des constantes distinctes dont dépendent les trajectoires est égal à $2k-1$, et de trouver à quelles conditions ce nombre se réduit à $2k-2$.

Résolvons en effet les équations (1) par rapport aux q''_i. Si α_i représente ce que devient le discriminant Δ quand on y remplace les éléments de la première colonne par $Q_1, \ldots, Q_k$; enfin, si P_i représente une certaine forme quadratique par rapport aux q'_i, on peut écrire

$$(2) \qquad q''_i = P_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} = P_i + \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Nous avons d'autre part

$$q''_i = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} q_1'^2 + \frac{dq_i}{dq_1} q''_1$$

et par suite

$$(3) \qquad \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = \frac{\left(P_i - \frac{dq_i}{dq_1} P_1\right) + \left(\beta_i - \frac{dq_i}{dq_1}\beta_1\right)}{q_1'^2}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Dans ce qui va suivre, nous représenterons par $q'_{(i)}, q''_{(i)}, \ldots$ les dérivées $\frac{dq_i}{dq_1}, \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}, \ldots$, et par Π_i ce que devient P_i quand on y remplace q'_1 par 1, q'_2 par $q'_{(2)}, \ldots, q'_k$ par $q'_{(k)}$. L'équation (3) devient ainsi

$$(4) \qquad q''_{(i)} = \Pi_i - q'_{(i)}\Pi_1 + \frac{\beta_i - q'_{(i)}\beta_1}{q_1'^2} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

les β étant des fonctions de $q_1, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$.

Deux cas sont alors à distinguer : si le second membre de toutes les équations (4) est indépendant de q'_1, le système (4) forme un système de $(k-1)$ équations du second ordre portant sur les k variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et ces équations définissent $q_2, q_k, \ldots, q_k$ en fonction de q_1 et des $(2k-2)$ constantes arbitraires $q_2^0, \ldots, q_k^0, q'^0_{(2)}, \ldots, q'^0_{(k)}$. Si au contraire q'_1 figure dans une au moins des équations (4), soit dans la première, on peut disposer de q'^0_1 pour que q''^0_2 ait une valeur arbitraire (en même temps que $q_2^0, \ldots, q_k^0, q'^0_{(2)}, \ldots, q'^0_{(k)}$) et les fonctions $q_2, \ldots, q_k$ de q_1 dépendent de $(2k-1)$ constantes arbitraires.

Pour que les seconds membres des équations (4) soient indépendants de q'_1, et par suite que $\nu = 2k-2$, *il faut et il suffit évidemment que les* $(k-1)$ *expressions* $q'_1\beta_i - q'_i\beta_1$ *soient homogènes et du troisième degré par rapport aux* q'_i. Si l'on désigne par a_{ij} le mineur de Δ relatif à l'élément A_{ij}, on a d'ailleurs

$$(5) \qquad \beta_i = \frac{1}{\Delta}(a_{i1}Q_1 + a_{i2}Q_2 + \ldots + a_{ik}Q_k),$$

et inversement

$$(6) \qquad Q_i = A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \ldots + A_{ik}\beta_k.$$

Le nombre ν sera en particulier égal à $(2k-2)$ si tous les coefficients Q_i sont homogènes et du second degré par rapport aux vitesses.

Quand les Q_i ne dépendent pas des vitesses, il en est de même des β_i; pour que ν soit égal à $2k-2$, il faut donc et il suffit que les expressions $\beta_i q'_1 - \beta_2 q'_i$ soient identiquement nulles, ce qui entraîne

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0,$$

et par suite

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_k = 0.$$

Les trajectoires sont alors les *géodésiques* du ds^2.

Un cas remarquable est celui où, les forces dépendant des vitesses, les trajectoires du système coïncident avec les géodésiques du ds^2. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les $(k-1)$ conditions $\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i = 0$ soient remplies, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\beta_1}{q'_1} = \frac{\beta_2}{q'_2} = \ldots = \frac{\beta_k}{q'_k} = \lambda,$$

ou encore, d'après (6),

$$
(7)\qquad Q_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \qquad Q_2 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \qquad \ldots, \qquad Q_k = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_k},
$$

λ désignant une fonction quelconque de q_i, q'_i.

Pour que les trajectoires de (1) *coïncident avec les géodésiques de* ds^2, *il faut donc et il suffit que* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ *soient proportionnels à* $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q'_k}$.

Quand ces conditions sont remplies, les trajectoires (qui sont les géodésiques) une fois obtenues, il reste à intégrer une équation différentielle du premier ordre pour obtenir $\frac{dt}{dq_1}$; t est donné ensuite par une quadrature. Dans le cas où λ est homogène et du premier degré par rapport aux q'_i,

$$
\lambda = q'_1 f(q_1, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}),
$$

le théorème des forces vives donne aussitôt

$$
dT = 2 f T \, dq_1,
$$

d'où, en intégrant,

$$
T = e^{2\int f\left(q_1, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right) dq_1};
$$

t s'obtient ainsi à l'aide de deux quadratures.

Il est facile d'interpréter, dans des cas particuliers intéressants, ces conditions (7). Si, par exemple, le système (S) se réduit à un point libre M, ces conditions expriment que la force F qui s'exerce sur M a constamment même ligne d'action que la vitesse de M. Si le système (S) est formé de points matériels libres M_i de masse m_i, les conditions (7) expriment que la force (F_i) qui s'exerce sur chaque point M_i a pour ligne d'action la vitesse v_i de M_i, et que de plus les forces F_i sont entre elles comme les quantités de mouvement $m_i v_i$, $\frac{F_1}{m_1 v_1} = \frac{F_i}{m_i v_i}$. Enfin, dans le cas du mouvement d'un point sur une surface, les conditions (7) expriment que la projection (sur le plan tangent à la surface) de la force donnée est constamment dirigée selon la vitesse du point : c'est ce qui arrive quand un point est mobile avec frottement sur une surface dans un milieu résistant.

Sans insister davantage sur ces applications faciles, je vais me placer désormais dans l'hypothèse où les forces Q_i ne dépendent pas des vitesses.

Équations différentielles des trajectoires. — Mouvements possibles sur une trajectoire. — Trajectoires remarquables.

Les trajectoires $q_i = \varphi_i(q_1)$ définies par le système

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

dépendent de $(2k - 1)$ constantes à moins que tous les Q_i ne soient nuls.

Quand tous les Q_i sont nuls, les trajectoires dépendent de $(2k - 2)$ paramètres et sont données, comme on sait, par le système

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

si l'on pose

$$f^2 \equiv \sum A_{ij} q'_{(i)} q'_{(j)} \equiv \frac{ds^2}{dq_1^2}, \qquad \left(q'_{(1)} = 1, \; q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}\right).$$

Le mouvement sur chaque *géodésique* est défini par l'égalité

$$T = h,$$

où h est une constante arbitraire, et qui donne t par la quadrature

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \int f \, dq_1.$$

On voit que sur la même trajectoire une infinité de mouvements *distincts* sont possibles; nous ne regardons pas comme *distincts* deux mouvements qui se déduisent l'un de l'autre en augmentant t d'une constante.

Je ne dirai rien de plus, pour l'instant, sur ce cas particulier. J'aborde immédiatement *le cas général où les* Q_i *ne sont pas tous nuls.*

Formons, dans ce cas, les équations différentielles des trajectoires; nous avons déjà obtenu le système

$$(a)\quad \frac{q''_{(i)}+q'_{(i)}\Pi_1-\Pi_i}{\beta_i-q'_{(i)}\beta_1}=\frac{q''_{(2)}+q'_{(2)}\Pi_1-\Pi_2}{\beta_2-q'_{(2)}\beta_1},\qquad (i=3, 4, \ldots, k),$$

la valeur commune de ces rapports étant $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$.

D'autre part, posons

$$\psi_i=\beta_i-q'_{(i)}\beta_1,\qquad \chi_i=q''_{(i)}+q'_{(i)}\Pi_1-\Pi_i,$$

et différentions par rapport à q_1 l'égalité

$$q_1'^2=\frac{\beta_2-q'_{(2)}\beta_1}{q''_{(2)}+q'_{(2)}\Pi_1-\Pi_2}=\frac{\psi_2}{\chi_2},$$

en remarquant que $\frac{d}{dq_1}q_1'^2=2q''_1=2\left(\Pi_1\frac{\psi_2}{\chi_2}+\beta_1\right)$; il vient

$$(b)\qquad \frac{d}{dq_1}\frac{\psi_2}{\chi_2}=2\Pi_1\frac{\psi_2}{\chi_2}+2\beta_1,$$

égalité de la forme

$$q'''_{(2)}=\frac{-3q''^2_{(2)}+q''_{(2)}M_3+M_5}{M_0-q'_{(2)}},$$

où M_3 et M_5 désignent des polynômes du troisième et du cinquième degré en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, et M_0 une simple fonction des q_i.

J'ai indiqué dans un autre travail (voir le *Journal de Mathématiques*, 1894) quelques propriétés du système différentiel (a) et (b) *qui définit les trajectoires*. Je me bornerai à rappeler ici que les équations des géodésiques de T s'obtiennent en égalant à zéro les numérateurs χ_i des rapports (a); il suit de là que les géodésiques de T font partie des trajectoires; en effet, elles satisfont aux équations (a), et comme l'équation (b) peut s'écrire

$$\frac{d\chi_2}{dq_1}=\chi_2 N,$$

elles vérifient aussi cette équation. Les géodésiques de T forment donc, quels que soient les Q_i, un faisceau de trajectoires à $2(k-1)$ paramètres.

Détermination du temps. — Quand le système (a), (b) est intégré, on connaît $q_2, \ldots, q_k$ en fonction de q_1 et de $(2k-1)$ constantes arbitraires; le temps t est alors donné par une quelconque des égalités

$$(c) \qquad dt = dq_1\sqrt{\frac{\chi_i}{\psi_i}} = dq_1\sqrt{\frac{q''_{(i)} + q'_{(i)}\Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)}\beta_1}},$$

c'est-à-dire par une quadrature.

On voit qu'*une trajectoire ne comporte que deux mouvements distincts* [1], qui se déduisent l'un de l'autre en changeant t en $-t$. En particulier, si cette trajectoire est une géodésique quelconque, on trouve $\frac{dt}{dq_1} \equiv 0$, $t = t_0$. Inversement, si l'on a $\frac{dt}{dq_1} \equiv 0$, tous les χ_i sont nuls et la trajectoire est une géodésique.

Quand on connaît une trajectoire particulière, le mouvement sur cette trajectoire est défini par la simple quadrature (c).

Trajectoires remarquables. — Il peut exister toutefois des trajectoires exceptionnelles, que nous appellerons trajectoires *remarquables,* pour lesquelles les conclusions précédentes sont en défaut; ce sont les trajectoires qui donnent à tous les rapports $\frac{\chi_i}{\psi_i}$ la forme $\frac{0}{0}$, autrement dit qui satisfont à la fois à toutes les égalités

$$\chi_2 = \chi_3 = \ldots = \chi_k = 0$$

et

$$(d) \qquad \frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_2}{\beta_2} = \frac{dq_3}{\beta_3} = \ldots = \frac{dq_k}{\beta_k}.$$

Les trajectoires remarquables seront donc les géodésiques (s'il en existe) qui vérifient les équations (d).

En général, ces conditions sont incompatibles; dans tous les cas, d'après (d), *les trajectoires remarquables ne peuvent dépendre de plus de* $(k-1)$ *constantes.*

Sur une trajectoire remarquable, une infinité de mouvements distincts sont possibles. En effet, il est loisible de remplacer les

---

[1] Cette proposition subsiste quand les Q_i renferment les q'; si le nombre ν des constantes qui figurent dans les trajectoires est égal à $2k-2$, chaque trajectoire comporte une infinité de mouvements; si $\nu = 2k-1$, chaque trajectoire (à part des trajectoires exceptionnelles) ne comporte que deux mouvements qui ne diffèrent que par le signe de t.

équations du mouvement par les équations (3)

$$(3)\qquad 0 = q''_{(i)} + q'_{(i)}\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_i + \frac{\beta_1 q'_{(i)} - \beta_i}{q'^2_1} \equiv \chi_i - \frac{\psi_i}{q'^2_1}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

jointes à une des équations de Lagrange ou, si l'on veut, à l'égalité des forces vives

$$d\mathrm{T} = \mathrm{Q}_1\,dq_1 + \mathrm{Q}_2\,dq_2 + \ldots + \mathrm{Q}_k\,dq_k.$$

Par hypothèse, la trajectoire considérée, satisfaisant aux équations $\chi_i = 0$, $\psi_i = 0$, satisfait aux équations (3); le mouvement sur cette trajectoire est donc défini par la seule égalité

$$\mathrm{T} \equiv q'^2_1 f[q_1, \ldots, q_k, 1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}] = \int [\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 q'_{(2)} + \ldots + \mathrm{Q}_k q'_{(k)}],$$

ou encore

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{f(q_1)}{\varphi(q_1) + h}};$$

$\dfrac{dt}{dq_1}$ dépend donc d'une constante h (¹).

Le mouvement du système (S) sur une trajectoire remarquable est celui d'un système à liaisons complètes; les points matériels d'un tel système ne parcourent qu'une trajectoire, mais peuvent la parcourir d'une infinité de manières.

Exemple. — Comme application, prenons l'exemple d'un point matériel libre M ou (x, y, z) soumis à une force F ou (X, Y, Z). Quelles seront les trajectoires remarquables de M? Ce seront les droites D (s'il en existe) telles qu'en tout point (x, y, z) de D la force (F) ait D pour ligne d'action. A quelles conditions ces trajectoires dépendront-elles de $k - 1 = 2$ paramètres? Les droites D forment alors une congruence; par un point (x, y, z) quelconque passe une trajectoire D, et tout le long de D la force F est dirigée suivant cette droite. L'ensemble des lignes d'action de F, qui, en général, constitue un *complexe,* doit donc se réduire à une *congruence;* inversement, quand cette condition est remplie, toutes

---

(¹) Il n'y aurait d'exception que si $f(q_1)$ était identiquement nul, c'est-à-dire si la géodésique satisfaisait à l'équation $ds^2 = 0$. Il est clair qu'elle ne pourrait correspondre alors à un déplacement *réel* des points du système matériel. C'est là un point sur lequel nous reviendrons tout à l'heure.

les droites de la congruence sont des trajectoires remarquables. Si notamment F dérive d'un potentiel U, la condition exprime que les surfaces de niveau sont *parallèles*. Le cas où F est une force centrale ou parallèle à une direction fixe sont des cas simples où la condition est remplie.

Remarque. — Il convient de faire au sujet de cet exemple une remarque d'une portée générale. Ne considérons que les valeurs réelles de x, y, z; si X, Y, Z sont des fonctions *analytiques* de ces variables, holomorphes pour toutes les valeurs réelles de ces variables, il est clair qu'un segment de droite D ne peut être trajectoire remarquable sans que la droite tout entière jouisse de cette propriété; il est clair également que si les forces forment une congruence dans une certaine portion de l'espace, elles forment une congruence dans tout l'espace. Ceci est encore vrai quand les fonctions X, Y, Z présentent des points singuliers pourvu que ces points ne forment pas de surfaces séparant l'espace réel en parties distinctes.

Mais quand les fonctions X, Y, Z ne sont pas analytiques, ou quand, étant analytiques, elles présentent des surfaces coupures séparant l'espace en plusieurs parties, il n'en est plus ainsi en général. Il peut se faire qu'un segment seulement de droite soit trajectoire remarquable, et aussi que pour les points x, y, z d'un certain volume les forces F forment une congruence tout en formant un complexe pour les points d'un autre volume [1].

C'est ce qui a lieu, par exemple, si le point M est soumis, à l'intérieur d'une sphère Σ de centre O et de rayon 1, à la force centrale $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, et à l'extérieur de Σ à la force $X = x - (r-1)^2$, $Y = y$, $Z = z$, $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$: chaque *diamètre* O de la sphère Σ est une trajectoire remarquable et peut être parcouru par le mobile d'une infinité de façons, mais quand le mobile sort de la sphère il quitte la droite D pour suivre une trajectoire tangente à la droite et d'autant plus voisine de D que sa vitesse de sortie est plus grande.

---

[1] Quand les fonctions X, Y, Z sont à plusieurs valeurs, il peut se faire que, pour le même volume, les forces forment une congruence si l'on choisit une certaine détermination des X, Y, Z, et un complexe si l'on choisit une autre détermination

Pour échapper à toute objection, il faut donc énoncer ainsi la condition trouvée tout à l'heure :

Soit V une portion d'espace où les X, Y, Z ont une valeur bien déterminée; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il passe une trajectoire remarquable par un point arbitraire de V, c'est que les forces F (*relatives aux différents points de* V) forment une congruence; ou encore, s'il existe une fonction de force, que les surfaces de niveau contenues dans V soient parallèles.

La même observation s'applique à un système (S) quelconque, mais il sera plus commode de la développer après avoir fixé la terminologie que nous emploierons dans l'étude des trajectoires réelles que nous allons aborder maintenant.

Trajectoires réelles et mouvement réel.

Choix des paramètres. Définitions. — Il est toujours loisible de choisir les paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$ qui définissent la position d'un système (S) de façon que pour toute position réelle à distance finie du système les $q_1, \ldots, q_k$ aient une valeur unique, réelle et finie. Il suffit, en effet, x_j, y_j, z_j étant les coordonnées d'un point matériel M_j de (S), de choisir, comme paramètres, k de ces coordonnées qui soient indépendantes.

Nous regarderons, dans ce qui va suivre, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ comme les k coordonnées rectangulaires d'un espace à k dimensions; quand (S) occupe toutes les positions réelles possibles, le point M ou $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, qui lui correspond dans cet espace, varie dans un certain domaine réel E_k qui ne comprend pas nécessairement tout l'espace. C'est ce domaine E_k, où à tout point M correspond une position réelle du système, que nous prendrons exclusivement comme champ des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

La position et la vitesse de chaque point M_j déterminant sans ambiguïté la force vive $2T$, chaque position réelle de (S) définit une valeur réelle et une seule des coefficients A_{ij}. Mais au point M de E_k peuvent correspondre plusieurs positions de (S); les coefficients A_{ij} forment alors un système multiforme de fonctions réelles définies dans E_k; à chaque point M de E_k et à une détermination arbitrairement choisie des A_{ij} correspond une position réelle de (S) et une seule.

La même remarque s'applique aux coefficients

$$Q_i = \sum_j X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_i},$$

quand les forces données X_j, Y_j, Z_j sont définies sans ambiguïté pour chaque position réelle du système : c'est ce qui a toujours lieu dans les applications. S'il en était autrement, observons seulement qu'il faudrait fixer celle des déterminations X_j, Y_j, Z_j qu'on choisit au début du mouvement, afin que les conditions mécaniques initiales du problème fussent pleinement déterminées.

Nous supposons que les diverses valeurs des A_{ij}, Q_i définissent dans E_k autant de fonctions uniformes continues admettant des dérivées premières et secondes continues ([1]), sauf en certains points N de E_k que nous appelons *points singuliers* de E_k. En un point N une au moins des fonctions A_{ij}, Q_i ou de leurs dérivées est discontinue, ou bien deux de ces déterminations deviennent égales. Ces points N, dans le cas le plus défavorable, forment une surface à $(k-1)$ dimensions dans E_k, soit $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0$; la surface qui limite E_k en fait partie, quand E_k n'embrasse pas tout l'espace.

J'ajoute que, les paramètres q_i étant convenablement choisis, le discriminant Δ de T ne s'annule pas dans E_k. Autrement les $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$, et par suite T, s'annuleraient en un point M de E_k et pour des valeurs réelles des q_i; à M correspond une position réelle du système et aux q'_i des valeurs *réelles* des x'_j, y'_j, z'_j, qui ne sont pas toutes nulles si q_1, par exemple, coïncide avec x_j. La somme $\Sigma m_j(x'^2_j + y'^2_j + z'^2_j)$ serait donc nulle pour des valeurs réelles des x', y', z' différentes de zéro, ce qui est absurde ([2]).

En définitive, le mouvement de (S) sera défini par les équations

$$(2) \qquad q''_i = P_i + \beta_i \equiv \sum_{r,s} \lambda^i_{r,s}(q_1, \ldots, q_k) q'_r q'_s + \beta_i(q_1, \ldots, q_k),$$

où les $\lambda^i_{r,s}$, et les β_i sont des fonctions réelles (à une ou plusieurs

([1]) Il suffit même que les Q_i admettent des dérivées premières continues.

([2]) Ceci est encore vrai évidemment si S est un système *continu* qui dépend de k paramètres.

déterminations) continues dans E_k ainsi que leurs dérivées premières, sauf en des points singuliers N.

Dans les applications, les diverses valeurs des A_{ij}, Q_i, par suite les $\lambda^i_{r,s}$, β_i sont des fonctions analytiques holomorphes de q_1, $q_2, \ldots, q_k$, sauf en certains points N' de E_k que nous appellerons *points analytiquement singuliers* [1]. Il arrive que ces points N' forment des surfaces décomposant E_k en volumes distincts E'_k, $E''_k, \ldots$; nous disons alors que les fonctions A_{ij}, Q_i présentent (dans E_k) des coupures *fermées;* en particulier, quand les A_{ij}, Q_i sont multiformes, il peut se faire que dans le même volume E'_k deux déterminations d'un de ces coefficients soient deux fonctions analytiques différentes.

Dans tous les cas, si l'on place le système S dans des conditions mécaniques initiales arbitrairement choisies, les valeurs correspondantes des $q_i - q'_i$ ainsi que les valeurs initiales des A_{ij}, L_i sont déterminées sans ambiguïté, et quand le point M ou $(q_1, \ldots, q_k)$ varie (dans E_k) d'une manière continue, il n'y a aucune difficulté à suivre les variations des A_{ij}, L_i, tant que M ne passe pas par un point singulier N.

J'ajoute que plusieurs des restrictions précédentes ne sont nullement essentielles. Quand on assujettit seulement T à la condition que Δ ne soit pas identiquement nul, et quand on embrasse tout le champ réel E_k où les A_{ij}, Q_i restent réels, tout ce que nous allons dire subsiste, pourvu toutefois qu'on ajoute aux points singuliers N les points de E_k où Δ s'annule.

Précisons maintenant quelques définitions relatives aux courbes (C)[ou $q_i = \varphi_i(q_1)$, $i = 2, 3, \ldots, k$] de l'espace E_k. Soit d'abord $k = 2$; si la courbe (C), ou $q_2 = \varphi_2(q_1)$, admet dans le voisinage de M_0 une tangente continue, on peut rapporter q_2 et q_1 à l'arc σ compté à partir de M_0 positivement dans un sens déterminé. Quand σ croît par exemple à partir de 0, à chaque valeur de σ correspond un point M de (C) et un seul, tant que σ n'atteint pas une certaine limite σ_1, qui peut être infinie. Pour $\sigma_1 = \infty$, deux hypothèses sont possibles; quand σ croît indéfiniment, ou bien M ne tend vers aucun point M_1 à distance finie, ou bien M tend vers une position limite M_1. Quand σ_1 est fini, M tend sûrement vers

---

(1) Tous les points N sont des points N', mais la réciproque n'est pas vraie.

un point M_1 [1]. Dans ces deux derniers cas, nous dirons que la courbe (C) passe par M_1, mais il convient de remarquer que M_1 *peut* être un point singulier de nature quelconque, notamment un point *asymptote* de C.

Ces remarques s'étendent aussitôt à un espace E_k quelconque. Si les $(k-1)$ fonctions $q_i = \varphi_i(q_1)$ qui définissent (C) admettent dans le voisinage de q_i^0 des dérivées premières continues, posons (suivant la terminologie adoptée)

$$d\sigma^2 = dq_1^2 + dq_2^2 + \ldots + dq_k^2,$$

et appelons longueur de l'arc $M_1 M$ de (C) l'intégrale curviligne $\sigma = \int_{M_0}^{M} d\sigma$, effectuée le long de (C).

Quand on rapporte $q_1, \ldots, q_k$ à σ (compté positivement à partir de M_0 dans un sens déterminé), à chaque valeur de σ correspond un point M et un seul, tant que σ n'atteint pas une certaine limite σ_1 (qui peut être infinie). *Si* M *tend vers une position limite* M_1 *quand* σ *tend vers* σ_1 (*ce qui a toujours lieu quand* σ_1 *est fini*) *on dit que la courbe* (C) *passe par* M_1. Cette définition revient à la suivante : (C) passe par le point M_1 ou $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, si chacune de ses projections $q_i = \varphi_i(q_1)$ sur le plan des q_1, q_i passe par le point a_1, a_i.

La tangente à (C) au point M_0 sera la *droite*

$$\frac{q_1 - q_1^0}{\left(\frac{dq_1}{d\sigma}\right)_0} = \frac{q_2 - q_2^0}{\left(\frac{dq_2}{d\sigma}\right)_0} = \ldots = \frac{q_k - q_k^0}{\left(\frac{dq_k}{d\sigma}\right)_0},$$

dont les cosinus directeurs sont $\left(\frac{dq_i}{d\sigma}\right)_0$. Si $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont fonctions de t, la *vitesse* sera le segment qui a comme projections sur $Oq_1, \ldots, Oq_k$ les valeurs $q'_1(t), \ldots, q'_k(t)$, segment dirigé selon la tangente et dont la longueur est $\frac{d\sigma}{dt}$. La courbure sera l'expression

$$\sqrt{\sum \left(\frac{d^2 q_i}{d\sigma^2}\right)^2}$$

[1] D'une façon précise, on entend par là que, ε étant donné à l'avance aussi petit qu'on veut, on peut déterminer α de façon que la distance MM_1 reste moindre que ε quand σ varie de $\sigma_1 - \alpha$ à σ_1 (ou, dans le cas de σ_1 infini, quand σ croît à partir de α).

Un arc de courbe M_0M_1 de (C) sera dit *régulier,* si, en chaque point M de cet arc (les extrémités comprises), (C) admet une *tangente* continue. Analytiquement, cela signifie que les q_i étant rapportés à l'arc, soit $q_i = \psi_i(\sigma)$, le point M parcourt M_0M_1 quand σ varie entre deux limites finies σ_0 et σ_1, et que les fonctions $\psi_i(\sigma)$ admettent des dérivées premières continues entre σ_0 et σ_1 (les valeurs extrêmes comprises).

Si (C) est une courbe analytique, les ψ_i sont des fonctions analytiques de σ. L'arc M_0M_1 de (C) sera dit *analytiquement régulier* si pour toute valeur de σ ($\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$) les fonctions ψ_i sont *holomorphes*.

Cette terminologie adoptée, revenons au mouvement réel d'un système (S). Partons d'un point M_0 de E_k avec une valeur particulière des A_{ij}, Q_i, et considérons autour de M_0 un *volume* V_k de E_k à l'intérieur duquel les déterminations choisies pour les A_{ij}, Q_i soient *régulières,* j'entends restent uniformes et continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Il suffit pour cela que V_k ne renferme aucun des *points singuliers* N.

Les coefficients $\lambda_{r,s}^{i}$, β_i des équations (2) ont ainsi dans V_k une valeur unique.

Si M_0 ou $(q_1^0, \ldots, q_k^0)$ est la position de M au temps t_0, et v_0 ou $(q_1'^0, \ldots, q_k'^0)$ sa vitesse initiale, les équations

$$(2) \qquad q_i'' = P_i + \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

définissent un mouvement et un seul, par suite une trajectoire et une seule, répondant à ces conditions initiales. On voit que par M_0 passent une infinité de trajectoires tangentes en ce point; la valeur absolue v_0 de la vitesse initiale permet de disposer arbitrairement de la courbure en M_1 de ces trajectoires. Par M_0 passe une géodésique et une seule tangente en M_0 à une droite donnée.

Qu'arrive-t-il quand la vitesse v_0 croît indéfiniment, sa direction restant invariable? Si l'on prend q_1 comme variable indépendante, les équations (2) deviennent, en posant $q_1' = \frac{1}{r_1}$,

$$(2)' \quad \begin{cases} \dfrac{dt}{dq_1} = r_1, & \dfrac{dr_1}{dq_1} = -r_1\Pi_1 - r_1^3\beta_1, \\ \dfrac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)}, & \dfrac{dq'_{(i)}}{dq_1} = \Pi_i - q'_{(i)}\Pi_1 + (\beta_i - q'_{(i)}\beta_1)r_1^2, \quad (i = 2, 3, \ldots, k). \end{cases}$$

Ces équations admettent un système d'intégrales, et un seul, tel qu'on ait, pour $q_1 = q_1^0$,

$$t = t_0, \qquad r_1 = r_1^0, \qquad q_i = q_i^0, \qquad q'_{(i)} = q'^0_{(i)};$$

ces intégrales varient avec r_1^0 d'une manière continue, et pour $r_1^0 = 0$ sont de la forme

$$t = t_0, \qquad r_1 = 0, \qquad q_1 = \varphi_i(q_1), \qquad q'_i = \varphi'_i(q_k),$$

la courbe $q_i = \varphi_i(q_1)$ étant la géodésique tangente à la direction (v_0). Cette géodésique est donc la limite des trajectoires (C) quand v_0 croît indéfiniment.

Lorsqu'en M_0 tous les β_i s'annulent, et que de plus v_0 est aussi nul, les intégrales du mouvement sont simplement

$$q_1 = q_1^0, \qquad q_2 = q_2^0, \qquad \ldots, \qquad q_k = q_k^0;$$

le point M reste en équilibre, la trajectoire se réduit au point M_0. Nous appelons *points d'équilibre* les points P de E_k où tous les β_i sont nuls; les conditions $\beta_i = 0$ équivalent d'ailleurs aux conditions $Q_i = 0$, puisque Δ ne s'annule pas dans E_k. Les points P sont en général des points isolés; dans des cas particuliers, ils peuvent former des lignes, et même des surfaces à $(k-1)$ dimensions $\chi(q_1, \ldots, q_k) = 0$ dans E_k.

Tout cela suppose seulement que M_0 ne soit pas un point singulier N des déterminations A_{ij}, Q_i considérées. Si M_0 coïncidait avec un tel point N, il faudrait avoir recours en général aux procédés de discussion de M. Poincaré. Observons toutefois qu'il y a lieu de distinguer ces points N en deux catégories : les points singuliers *parasites* qui tiennent au choix des paramètres q_i et qu'on fait disparaître en changeant de paramètres, en prenant par exemple comme variables k autres coordonnées parmi les x_j, y_j, z_j; et les points singuliers *intrinsèques* qui subsistent quels que soient les paramètres choisis parmi les x_j, y_j, z_j. Par exemple, s'il s'agit d'un point mobile sur une surface $F(x, y, z) = 0$, et si l'on prend comme paramètres x et y, les points où le plan tangent est parallèle à Oz sont des points singuliers N, mais on élimine la singularité en prenant comme coordonnées x et z (ou y et z), pour étudier le mouvement dans le voisinage d'un tel point N, à moins que N ne soit un point multiple de la surface; dans ce dernier cas seulement N est un point singulier intrinsèque. Il est clair que les points singuliers *intrinsèques* sont les seuls qui donnent lieu à des difficultés sérieuses, puisqu'un changement bien simple de paramètres fait disparaître les autres points N.

J'arrive maintenant aux propositions que j'ai en vue concernant les trajectoires et le mouvement réel.

Retour sur les trajectoires remarquables. — Je reviendrai d'abord un instant sur les trajectoires remarquables; sur une telle trajectoire (γ), le mouvement est défini par l'égalité

$$dt = dq_1\sqrt{\frac{f(q_1)}{\varphi(q_1)+h}},$$

où $f(q_1) \equiv \mathrm{T}(q_1, \ldots, q_k, 1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})$ est toujours positif, puisque T est positif en tout point M de E_k pour des valeurs réelles des q' qui ne sont pas toutes nulles. On peut, d'autre part, disposer de la constante h de façon que $\varphi(q_1)+h$ soit positif dans le voisinage d'un point arbitraire M de (γ), en sorte qu'une infinité de mouvements réels sont possibles sur (γ).

Par un point M du volume V_k de E_k considéré plus haut (où les A_{ij}, Q_i sont bien déterminés et réguliers), passe une courbe et une seule satisfaisant aux conditions

$$(d) \qquad \frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{dq_k}{\beta_k},$$

pourvu que M ne soit pas un point d'équilibre.

Par un point arbitraire M de V_k passe donc au plus une trajectoire remarquable.

Pour qu'un point quelconque de V_k appartienne à une trajectoire remarquable, il faut et il suffit que toutes les courbes définies par (d) soient des géodésiques. On peut donner à ce théorème une forme un peu différente : soit (G) la géodésique tangente en M au segment $\beta_1, \ldots, \beta_k$; l'ensemble des courbes (G) relatives aux différents points M de E_k dépend en général de k constantes distinctes. Pour qu'il passe une trajectoire remarquable par un point arbitraire de V_k, il faut et il suffit que l'ensemble (G) ne dépende que de $(k-1)$ paramètres.

Quand les coefficients A_{ij}, Q_i sont (dans E_k) des fonctions analytiques sans coupure fermée, la condition ne peut être vérifiée pour une portion finie de V_k sans être vérifiée dans tout le domaine E_k. Mais quand les fonctions A_{ij}, Q_i ne sont pas analytiques ou présentent des coupures fermées, un volume V_k peut se décomposer en volumes de deux espèces V'_k, V''_k : par un point quelconque des V'_k il passe une trajectoire remarquable, au lieu qu'il n'en passe aucune par un point *arbitraire* de V''_k. Nous avons cité un exemple de ce fait (*voir* p. 147).

Mouvements réels sur une trajectoire quelconque. Mouvements vrais. Mouvements conjugués.

Sur une trajectoire réelle quelconque, le mouvement est défini par une des égalités

$$(c)\qquad \frac{dt}{dq_1}=\sqrt{\frac{q''_{(i)}+\Pi_1 q'_{(i)}-\Pi_i}{\beta_i-q'_{(i)}\beta_1}}\equiv\sqrt{\frac{\chi_i}{\psi_i}}.$$

Si le long du segment M_0M_1 d'une trajectoire réelle (C), la valeur commune des rapports $\frac{\chi_i}{\psi_i}$ est positive, l'arc M_0M_1 est parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement réel, et nous dirons que c'est une trajectoire *vraie*. Si la même expression $\frac{\chi_i}{\psi_i}$ est négative, le mouvement est imaginaire; il devient réel quand on change t en it dans les équations (1), ce qui ne modifie pas les trajectoires; les nouvelles équations (1) sont alors celles du système (S) sous l'action des mêmes forces (F) dont on a seulement changé le sens. Nous donnerons à ce second mouvement le nom de mouvement *conjugué* du mouvement *vrai*, et nous dirons que l'arc M_0M_1 est une trajectoire conjuguée. On voit que les trajectoires réelles (C) se divisent ainsi en deux classes : les trajectoires *vraies* (C'), et les trajectoires *conjuguées* (C'') qui sont les trajectoires vraies de (S) quand on change le *sens* des forces.

Pour pousser plus loin l'étude de ces trajectoires, nous établirons une importante propriété du mouvement réel.

Démonstration d'une propriété du mouvement réel.

Plaçons le système dans une position initiale *régulière* M_0 avec des vitesses données, et étudions le mouvement quand t croît ([1]) à partir de t_0. Nous dirons que le mouvement reste *régulier* entre t_0 et t_1 si, quand t varie de t_0 à t_1, le système occupe à chaque instant une position déterminée à distance finie avec des vitesses déterminées sans passer jamais par une position singulière N.

D'après le théorème fondamental sur les équations différentielles, les intégrales $q_i(t)$ du mouvement qui correspondent aux conditions initiales q_i^0, $q_i'^0$, sont continues, et admettent des dérivées premières continues tant que $|t - t_0|$ reste inférieur à une certaine limite; le mouvement reste donc à coup sûr régulier dans un intervalle de temps fini. Admettons qu'il reste régulier tant que t n'a pas atteint ou dépassé la valeur t'. Quand t tend vers t', une au moins des trois circonstances suivantes doit se présenter : *ou bien* (S) *ne tend vers aucune position limite à distance finie, ou bien* (S) *tend vers une position singulière; ou bien enfin* (S) *tend vers une position régulière, mais les vitesses* q_i' *ne tendent pas vers des limites finies.* Autrement, en effet, (S) atteindrait à l'instant t' une position régulière avec des vitesses déterminées, et, d'après le théorème invoqué, le mouvement se poursuivrait régulièrement au delà de t'. — La proposition que nous voulons démontrer, c'est que la troisième circonstance ne saurait se réaliser. Autrement dit, *quand t tendant vers t', le système* (S) *tend vers une position régulière, les vitesses* q_i' *de* (S) *tendent vers des limites finies et le mouvement reste régulier à l'instant t' et au delà.*

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le théorème fondamental de la théorie des équations tel que l'énonce M. Picard ([2]).

Soit M ou $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ un point de E_k dans le voisinage duquel les déterminations choisies pour les A_{ij}, Q_i sont *régulières* (au sens que nous avons défini); les seconds membres des équations

$$(2) \qquad \frac{dq_i}{dt} = q_i', \qquad \frac{dq_i'}{dt} = P_i + \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

([1]) Il suffit de faire croître t, car les équations (1) ne changent pas quand on change t en $-t$.

([2]) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. XI, p. 308.

seront continus ainsi que leurs dérivées premières et moindres en module qu'une certaine limite M tant que les q_i, q'_i satisferont aux inégalités

$$|q_i - a_i| \leqq \delta, \qquad |q'_i| \leqq \mathrm{L}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

δ est un certain nombre positif, L un nombre positif choisi arbitrairement, et que nous prenons seulement supérieur à δ.

D'après cela, soit q_i^0, $q_i'^0$ un système de valeurs satisfaisant aux conditions

$$|q_i^0 - a_i| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad |q_i'^0| \leqq \frac{\mathrm{L}}{2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Pour toutes les valeurs q_i, q'_i telles qu'on ait

$$|q_i - q_i^0| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad |q'_i - q_i'^0| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

les seconds membres de (2) restent en module moindres que M. D'après le théorème invoqué, *le système d'intégrales $q_i(t)$, $q'_i(t)$ qui, pour $t = t_0$ prennent les valeurs q_i^0, $q_i'^0$, est un système de fonctions de t bien déterminées et continues au moins dans l'intervalle $t_0 - \frac{\delta}{2\mathrm{M}}$ à $t_0 + \frac{\delta}{2\mathrm{M}}$.*

Voyons, d'autre part, ce qui se passe pour des vitesses initiales très grandes (en valeur absolue). Prenons comme variable indépendante un des paramètres q choisi de façon que sa dérivée $\left(\frac{dq}{dt}\right)_0$ ne soit en module inférieure à aucune des autres dérivées $q_i'^0$; soit q_1 ce paramètre. Le système (2) devient le système

$$(2)' \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dt}{dq_1} = r_1, & &\frac{dr_1}{dq_1} = -r_1\Pi_1 - r_1^3\beta_1, \\ &\frac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)}, & &\frac{dq'_{(i)}}{dq_1} = \Pi_i - q'_{(i)}\Pi_1 + (\beta_i - q'_{(i)}\beta_1)r_1^2. \end{aligned}\right.$$

Soit M_1 le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois

$$|q_i - a_i| \leqq \delta, \qquad r_1 \leqq \mathrm{L}_1, \qquad |q'_{(i)}| \leqq 1 + \frac{\delta}{2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

(L_1 étant toujours une quantité quelconque supérieure à δ). Soient, d'autre part, des valeurs q_i^0, r_1^0, $q'^0_{(i)}$ satisfaisant aux conditions

$$|q_i^0 - a_i| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad r_1^0 \leqq \frac{L_1}{2}, \qquad |q'_{(i)}| \leqq 1;$$

il existe un système d'intégrales et un seul $t(q_1)$, $r_1(q_1)$, $q_i(q_1)$, $q'_{(i)}(q_1)$ *qui prennent pour* $q_1 = q_1^0$ *les valeurs* t_0, r_1^0, q_i^0, $q'^0_{(i)}$, *et ces intégrales sont continues au moins dans l'intervalle de* $q_1^0 - \varepsilon_1$ *à* $q_1^0 + \varepsilon_1$, *en appelant* ε_1 *la quantité* $\frac{\delta}{2M_1}$.

En particulier, si $r_1^0 = 0$, ce système est de la forme

$$t \equiv t_0, \qquad r_1 \equiv 0, \qquad q_i \equiv \varphi_i(q_1), \qquad q'_{(i)} = \varphi'_i(q_1).$$

Ceci nous montre que, dans l'intervalle de $q_1^0 - \varepsilon_1$ à $q_1^0 + \varepsilon_1$, r_1 ne s'annule jamais à moins d'être identiquement nul; t varie donc constamment dans le même sens quand q_1 croît de $q_1^0 - \varepsilon$ à $q_1^0 + \varepsilon$, et passe de la valeur $t_0 - \eta$ à la valeur $t_0 + \eta'$ (ou de la valeur $t_0 + \eta'$ à la valeur $t_0 - \eta$). Il suit de là que $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_k(t)$ *sont des fonctions de t continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle de* $t_0 - \eta$ à $t_0 + \eta'$, *et que* q_1 *passe d'une des valeurs* $q_1^0 \pm \varepsilon$ *à l'autre quand t varie dans cet intervalle.*

Le même raisonnement peut se répéter si la variable indépendante est un autre paramètre q_j. Aux équations (2)' correspondent des équations analogues ; soit M_j le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois

$$|q_i - a_i| \leqq \delta, \qquad \left|\frac{dt}{dq_j}\right| \leqq L_1, \qquad \left|\frac{dq_i}{dq_j}\right| \leqq 1 + \frac{\delta}{2};$$

à la quantité $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2M_1}$ correspond la quantité $\varepsilon_j = \frac{\delta}{2M_j}$; j'appellerai ε la plus petite des quantités ε_j.

Nous sommes dès lors en état de démontrer la proposition que nous avons énoncée. Admettons, en effet, que, t tendant vers t', (S) tende vers une position non singulière $a_1, a_2, \ldots, a_k$; de deux choses l'une : ou bien les q'_i tendront vers zéro (auquel cas le théorème est démontré), ou bien l'un au moins des q'_i, pour certaines valeurs de t aussi voisines qu'on veut de t', est supérieur en module à une certaine limite fixe λ. Considérons alors le nombre ε introduit plus haut et qui correspond aux conditions

$$|q_i - a_i| \leqq \delta, \qquad \left|\frac{dt}{dq_j}\right| \leqq \frac{1}{\lambda}, \qquad \left|\frac{dq_i}{dq_j}\right| \leqq 1 + \frac{\delta}{2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$\left(\frac{1}{\lambda}\text{ remplace } L_1\right)$. Nous pouvons, par hypothèse, trouver **un** instant t_1 assez voisin de t pour que, t variant de t_1 à t', chaque variable q_i reste comprise entre $q_i - \alpha$ et $q_i + \alpha$; α désigne un nombre quelconque qu'on a choisi inférieur à $\frac{\delta}{2}$ et à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant t_0 une valeur de t comprise entre t' et t_1 et pour laquelle le plus grand des modules $|q'_i|$, soit $|q'_1|$, dépasse λ. On a, pour $t = t_0$,

$$|q_1^0 - a_i| \leqq \frac{\delta}{2}, \qquad \left|\frac{dt}{dq_1}\right|_0 < \frac{1}{\lambda}, \qquad \left|\frac{dq_i}{dq_1}\right|_0 \leqq 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

quand q_1 varie de $q_1^0 - \varepsilon$ à $q_1^0 + \varepsilon$, t varie de $t_0 - \eta$ à $t_0 + \eta'$ (ou de $t_0 + \eta'$ à $t_0 - \eta$); je dis que t' est compris entre t_0 et $t_0 + \eta'$. Autrement, t variant de t_0 à $t_0 + \eta'$, par suite entre t_1 et t', q_1 varierait de q_1^0 à $q_1^0 \pm \varepsilon$; mais, entre t' et t, on a

$$|q_1 - a_1| \leqq \alpha < \frac{\varepsilon}{2};$$

deux valeurs de q_1 dans cet intervalle ne peuvent donc différer de ε. L'instant t' est nécessairement compris entre t_0 et $t_0 + \eta'$, et comme, dans cet intervalle, les fonctions $q_i(t)$, $q'_i(t)$ sont continues, le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t'.

C. Q. F. D.

Dans ce qui précède, nous avons supposé t' fini. Admettons maintenant que, t croissant indéfiniment à partir de t_0, le mouvement reste régulier; trois hypothèses sont possibles : ou bien, t croissant indéfiniment, (S) ne tend vers aucune position limite à distance finie (¹); ou bien (S) tend vers une position singulière; ou enfin (S) tend vers une position M ou $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ non singulière. Je vais montrer que, *dans ce dernier cas, cette position* M

(¹) (S) peut s'éloigner indéfiniment, ou sa position peut être indéterminée quand t tend vers ∞.

est nécessairement une position d'équilibre P *et de plus que les* q'_i *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

Tout d'abord les vitesses tendent vers zéro ; admettons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et répétons le raisonnement fait plus haut en gardant la même notation ; par hypothèse, pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite t_1, on a

$$|q_i - a_i| \leqq \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

mais, d'autre part, il existe des valeurs t_0 de t plus grandes que t_1 et telles que l'un au moins des paramètres, q_1 par exemple, varie de ε quand t passe de t_0 à $t_0 + \eta'$. Il y a donc contradiction ; les q'_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

D'autre part, la position limite $a_1, a_2, \ldots, a_k$ est une position d'équilibre du système (S). Changeons, en effet, t en $\frac{1}{\theta}$; les équations (2) deviennent

$$\frac{dq_i}{d\theta} = -\frac{q'_i}{\theta^2}, \qquad \frac{dq'_i}{d\theta} = -\frac{\beta_i + \Pi_i}{\theta^2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Par hypothèse, quand θ tend vers zéro, les $q_1, \ldots, q_k$ tendent vers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et les q'_i vers zéro ; il suit de là que $\beta_i(a_1, \ldots, a_k)$ est nul ; car soit $\beta_1(a_1, \ldots, a_k) = \beta_1^0 \neq 0$, on aurait

$$\frac{dq'_i}{d\theta} = \frac{-\beta_1^0 + \delta'_i}{\theta^2},$$

δ'_i tendant vers zéro avec θ, et q'_i croîtrait indéfiniment quand θ tendrait vers zéro. Il faut donc que $\beta_1^0, \beta_2^0, \ldots, \beta_k^0$ soient nuls.

Inversement [1] d'ailleurs, si le système (S) tend vers une position régulière d'équilibre P ou $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, avec une force vive qui tend vers zéro, quand t tend vers une certaine limite t', cette limite est forcément l'infini ; car si t' était fini, le mouvement répondrait pour $t = t'$ aux conditions initiales $q_i = a_i$, $q'_i = 0$; or (P étant une position d'équilibre) le système unique d'intégrales définies par ces conditions initiales est le système $q_i \equiv a_i$.

---

[1] Cette réciproque, comme la proposition même, n'est plus exacte si la position P est intrinsèquement singulière.

Nous pouvons en définitive énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Si, quand t tend vers t', le système* (S) *tend vers une position non singulière, les vitesses tendent vers une limite finie* ([1]) *et le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t'.*

Si, quand t croît indéfiniment, le système (S) *tend vers une position limite non singulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre et les vitesses de* (S) *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

Inversement, si (S) *tend vers une position* (*régulière*) *d'équilibre avec une force vive qui tend vers zéro, ce ne peut être que pour t croissant* (*ou décroissant*) *indéfiniment.*

APPLICATION DU THÉORÈME PRÉCÉDENT A L'ÉTUDE DES TRAJECTOIRES.

Tangente à une trajectoire. Courbure. — Supposons qu'à l'instant t_1 le point M de E_k qui définit la position de (S) arrive en un point M_1 ou $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ non singulier; sa vitesse est nécessairement déterminée et finie, mais deux cas sont à distinguer, suivant qu'elle est ou non différente de zéro. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas qui est le cas général.

Un au moins des q'_i, soit q'_1, est alors différent de zéro à l'instant t_1. Le mouvement est défini par les égalités

$$q_1 = a_1 + b_1(t - t_1) + \ldots \qquad (b_1 \neq 0),$$
$$q_2 = a_2 + b_2(t - t_1) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La trajectoire (C) de M se poursuit au delà de M_1, et admet

([1]) Lorsque les fonctions A_{ij}, Q_i sont analytiques, on démontre de la même manière cette proposition plus générale : si, quand la variable imaginaire t tend vers t' suivant une certaine loi continue, les q_i tendent vers des valeurs $a_1, \ldots, a_k$ qui ne sont pas des valeurs *singulières*, les q'_i tendent nécessairement vers des limites finies. Ce n'est là qu'un cas particulier d'un important théorème qui concerne toutes les équations

$$q''_i = F_i(t, q_1, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où F_i est algébrique par rapport aux q'_i : ce théorème sera développé dans un Mémoire consacré aux équations différentielles.

en M_1 et dans le voisinage *une tangente continue* dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $1, \frac{q'_2}{q'_1}, \ldots, \frac{q'_k}{q'_1}$.

De plus, les égalités

$$q''_{(i)} = \Pi_i - \frac{q'_i}{q'_1}\Pi_1 + \frac{\beta_i - \frac{q'_i}{q'_1}\beta_1}{q'^2_1}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, k)$$

montrent que la trajectoire admet en M_1 et dans le voisinage *une courbure continue* [1]. Cette courbure varie pour les diverses trajectoires tangentes en M_1 à la même droite avec q'_1, à moins toutefois que la tangente n'ait précisément pour direction $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$; les trajectoires (en particulier la géodésique) tangentes à cette droite ont même courbure, du moins toutes celles qui correspondent à une vitesse en M_1 différente de zéro.

Inversement, donnons-nous en M_1 *la tangente et la courbure* d'une trajectoire (C). Les rapports $\frac{q'_i}{q'_1} = q'_{(i)}$ sont déterminés; d'autre part, R désignant le rayon de courbure, on a

$$\frac{1}{R^2} = \sum \frac{\left[q'_{(i)}\Pi_j - q'_{(j)}\Pi_i + \frac{\beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}}{q'^2_1}\right]^2}{[\Sigma q'^2_{(i)}]^3},$$

d'où deux valeurs pour q'^2_1 et, par suite, deux trajectoires (C_1) et (C_2), pourvu seulement que toutes les quantités $\beta_j q'_{(i)} - \beta_j q'_{(j)}$ ne soient pas nulles, c'est-à-dire que la tangente n'ait pas comme direction $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$. Mais à quelles conditions ces trajectoires (C_1) et (C_2) seront-elles réelles? Si l'on pose

$$A_r = \beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}, \qquad B_r = \Pi_j q'_{(i)} - \Pi_i q'_{(j)} \qquad \text{et} \qquad \rho^2 = \frac{[\Sigma q'^2_{(i)}]^3}{R^2},$$

il faut que les deux valeurs de q'^2_1 soient réelles, et, par suite, qu'on ait

$$(\Sigma A_r B_r)^2 + \Sigma A_r^2(\rho^2 - \Sigma B_r^2) \geqq 0$$

ou bien

$$\rho^2 \geqq \frac{\Sigma(A_r B_s - A_s B_r)^2}{\Sigma A_r^2}.$$

Quand cette condition est remplie, les trajectoires (C_1) et (C_2)

---

[1] Si M_1 est un point *analytiquement* régulier des A_{ij}, Q_i, la trajectoire est une courbe analytique régulière dans le voisinage de M_1.

sont réelles. Si, de plus, ρ^2 est supérieur à ΣB_r^2, l'une de ces trajectoires est vraie, l'autre conjuguée. Pour $\rho^2 = \Sigma B_r^2$, une des trajectoires est une géodésique, l'autre une trajectoire vraie ou conjuguée suivant que $\Sigma A_r B_r$ est positif ou négatif. Pour $\rho^2 < \Sigma B_r^2$, (C_1) et (C_2) sont toutes deux vraies ou conjuguées, suivant le signe de $\Sigma A_r B_r$. Quand $\Sigma A_r B_r$ est nul, ρ^2 est nécessairement plus grand que ΣB_r^2; pour $\rho^2 = \Sigma B_r^2$, (C_1) et (C_2) se confondent avec la géodésique.

D'où cette conclusion : V_k *désignant un domaine de* E_k *où les* A_{ij}, Q_i *sont uniformes et réguliers, par un point* M_1 *de* V_k *passent deux trajectoires réelles* (C_1) *et* (C_2) *ayant en* M_1 *une tangente* M_1T *et une courbure* $\frac{1}{R}$ *données, pourvu que la courbure soit supérieure à une certaine limite* L. Soit de plus $\frac{1}{R_1}$ la courbure de la géodésique (G) tangente en M_1 à M_1T $\left(\frac{1}{R_1} > L\right)$. si $\frac{1}{R}$ est supérieur à $\frac{1}{R_1}$, les trajectoires (C_1) et (C_2) sont l'une *vraie,* l'autre *conjuguée;* si $\frac{1}{R}$ est égal à $\frac{1}{R_1}$, une de ces trajectoires est la géodésique (G); si $\frac{1}{R}$ est inférieur à $\frac{1}{R_1}$, (C_1) et (C_2) sont toutes deux *vraies* ou toutes deux *conjuguées* suivant que la seconde trajectoire de courbure $\frac{1}{R_1}$ est vraie ou conjuguée; quand cette seconde trajectoire se confond elle-même avec la géodésique, $\frac{1}{R_1}$ coïncide avec L. *Il n'y a d'exception à ce théorème que si la tangente* M_1T *a comme direction* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ (¹). Quand tous les Π_i, par suite tous les B_r, sont nuls, à toute valeur de $\frac{1}{R}$ comprise entre o et $+\infty$ correspondent deux trajectoires, l'une *vraie,* l'autre *conjuguée.*

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où M arriverait en M_1 à l'instant t_1 avec une vitesse nulle. Montrons d'abord que les rapports $\frac{q'_i}{q'_1}$ tendent vers une limite quand t tend vers t_1. On a,

---

(¹) Ces théorèmes et d'autres analogues prennent une forme plus élégante quand on regarde, d'après les idées de M. Beltrami, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ comme les coordonnées d'un espace *non euclidien* dont le ds^2 est le ds^2 défini par T, $ds^2 = \Sigma A_{ij}\, dq_i\, dq_j$. Mais c'est là un point sur lequel je reviendrai dans un autre travail.

en effet,

$$q_i = \frac{(t-t_1)^2}{1.2}\left[\beta_i(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \delta_i\right] = \frac{(t-t_1)^2}{2}(\beta_i^0 + \delta_i), \qquad (i = 2, \ldots, k),$$

les δ_i tendant vers zéro avec $t - t_1$, et l'un au moins des β_i^0, soit β_1^0, n'étant pas nul (¹). Les rapports $\frac{q'_i}{q'_1}$ tendent donc vers $\frac{\beta_i^0}{\beta_1^0}$. J'ajoute que les intégrales $q_i(t)$ sont alors des fonctions paires de $(t - t_1)$; autrement dit, si l'on pose $t - t_1 = \tau = \theta^2$, on a

$$(n) \qquad q_i = a_i + b_i\theta + c_i\theta^2 + \ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad (b_1 \neq 0).$$

Si, en effet, dans les intégrales $q_i(\tau)$ on change τ en $-\tau$, on obtient encore un système d'intégrales : quand le premier système répond aux conditions initiales q_i^0, $q_i'^0$ pour $t = t_1$, le second répond aux conditions q_i^0, $-q_i'^0$; ici, les $q_i'^0$ étant nuls, les conditions initiales restent les mêmes, les deux systèmes d'intégrales coïncident. Donc $q_i(\tau) \equiv + q_i(-\tau)$. Quand t dépasse l'instant t_1, le système S *rétrograde;* à l'instant $t_1 + \tau$ il repasse par la même position qu'à l'instant $t_1 - \tau$, mais toutes les vitesses ont changé de sens.

Les équations (n) nous montrent que la trajectoire (C) se poursuit *au delà de* M_1, et admet en M_1 et dans le voisinage *une tangente continue*. Cette tangente, au point M_1, a comme direction $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$. De plus, σ désignant l'arc de (C) compté dans le sens du mouvement, on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = (t - t_1)\left(-\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2} + \varepsilon\right) = (t - t_1)(B + \varepsilon)$$

(ε tendant vers zéro avec $t - t_1$); $\sigma(t)$ passe donc par un maximum pour $t = t_1$. Sur l'arc M_1M' de (C), qui fait suite au point M_1, c'est le mouvement *conjugué* qui est réel. Le point M_1 de (C) où le point M rétrograde sur sa trajectoire sera dit un *point d'arrêt.* L'arc MM' que le point M_1 divise en deux parties, l'une parcourue dans le mouvement *vrai,* l'autre dans le mouvement *conjugué,* sera dit *trajectoire mixte.*

Au point d'arrêt M_1 la courbe (C) peut d'ailleurs ne pas admettre de *courbure*. Si l'on suppose toutefois qu'en ce point les coeffi-

(¹) Autrement M_1 serait un point d'équilibre et t_1 serait infini.

cients $\lambda^i_{r,s}$, β_i des équations (2) ont des dérivées secondes continues par rapport aux q_i, les q_i ont des dérivées secondes par rapport au paramètre $\theta \equiv (t - t_1)^2$, et (C) admet en M_1 et dans le voisinage une courbure continue. Si notamment le point M_1 est un point *analytiquement* régulier des A_{ij}, Q_i, la courbe (C) est analytique et régulière dans le domaine de M_1.

Trajectoires singulières. — Supposons maintenant que, t croissant indéfiniment, M tende vers une position régulière d'équilibre P. La trajectoire (C) passe par le point P, mais en ce point elle n'admet pas nécessairement de tangente; la longueur de l'arc PM peut être infinie; enfin la courbe *réelle* (supposée analytique) peut ne pas se prolonger au delà du point P.

Soit, par exemple, un point M (ou x, y) de masse 1 mobile dans un plan et soumis à la force $X = \lambda^2 x$, $Y = \mu^2 y$; l'origine O ($x = 0$, $y = 0$) est un point d'équilibre, et il existe une infinité de mouvements dans lesquels M tend vers O quand t croît indéfiniment, à savoir les mouvements $x = Ce^{-\lambda t}$, $y = C'e^{-\mu t}$; les trajectoires correspondantes $y = cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$ admettent l'origine comme point singulier transcendant si $\frac{\mu}{\lambda}$ est incommensurable, algébrique si $\frac{\mu}{\lambda}$ est commensurable. Dans tous les cas, la courbe admet une tangente à l'origine, l'arc σ ou M_0M tend vers une limite finie quand M tend vers o, et ce point n'est pas une *extrémité analytique* de la trajectoire.

Si la force était $X = 2x^3$, $Y = \mu^2 y$, la trajectoire $y = Ce^{-\frac{\mu}{x}}$, parcourue dans chaque mouvement $x = \frac{1}{t}$, $y = Ce^{-\mu t}$, admet une tangente en O (l'axe des x); l'arc OM_0 a une longueur finie, mais le point O est une extrémité analytique de la trajectoire.

La force $X = 2y$, $Y = -2x$ donnerait lieu de même aux mouvements $x = Ce^{-t}\cos t$, $y = Ce^{-t}\sin t$, et chaque trajectoire correspondante (dont l'équation en coordonnées polaires est $r = Ce^{-\theta}$) est une spirale logarithmique ayant l'origine comme point asymptote. En ce point, la courbe n'a pas de tangente; l'arc OM_0 a une longueur finie $C\sqrt{2}e^{-\theta_0}$, mais le point O est une extrémité analytique de la trajectoire.

Enfin, considérons la force

$$X = \tfrac{3}{4}x(x^2+y^2)^2 - x + y(x^2+y^2), \quad Y = \tfrac{3}{4}y(x^2+y^2)^2 - y - x(x^2+y^2);$$

le mouvement est défini, en coordonnées polaires, par les équations

$$r'' - r\theta'^2 = \frac{3}{4}r^5 - r, \qquad \frac{d}{dt}(r^2\theta') = -r^4.$$

Dans le mouvement particulier $r = t^{-\frac{1}{2}}$, $\theta = t$, la trajectoire $r = \theta^{-\frac{1}{2}}$ admet O comme point asymptote (et extrémité analytique), et l'arc MM_0 croît indéfiniment quand M tend vers O.

Nous donnerons le nom de *branche singulière* de trajectoire à tout arc M_1M de trajectoire, tel que M_1M ne soit pas parcouru en un temps fini soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué, et cela si voisin du point M_1 qu'on prenne le point M.

Il est clair que les trajectoires que nous venons de considérer sont des *trajectoires singulières*.

Classification et propriétés des trajectoires réelles.

Il suffit d'étudier les trajectoires vraies : tout ce que nous allons dire s'appliquera aux trajectoires conjuguées, puisqu'on passe du mouvement vrai au mouvement conjugué en changeant t en it.

Plaçons donc le système à l'instant t_0 dans des conditions initiales réelles $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0; q_1'^0, q_2'^0, \ldots, q_k'^0$, et comptons l'arc σ de la trajectoire (C) à partir du point M_0 dans un sens tel que σ commence par croître avec t; σ continuera de croître avec t tant que t n'atteindra pas soit une valeur t_1 pour laquelle le mouvement cesse d'être régulier, soit une valeur t_1 pour laquelle $\frac{d\sigma}{dt}$, et par suite tous les q_i' s'annulent.

Envisageons d'abord la première hypothèse : quand t tendra vers t_1, ou bien le point M de coordonnées $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ ne tendra vers aucune position limite M_1 à distance finie, auquel cas σ croîtra indéfiniment, ou bien M tendra vers un point singulier N de E_k. D'après ce qui précède, il n'y a pas d'autres cas possibles.

Dans la seconde hypothèse (où tous les q_i s'annulent quand t tend vers t_1), σ croît jusqu'à une certaine limite σ_1, puis décroît et reprend pour $t_1 + \alpha$ la même valeur que pour $t_1 - \alpha$; le point M rétrograde sur sa trajectoire, qui est une trajectoire *mixte;* le point M_1, qui correspond à la valeur σ_1 de l'arc, est *un point d'arrêt*. Quand la trajectoire (C) n'est pas une trajectoire *remarquable,* $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ a en chaque point de M_0M une valeur déterminée $\varphi(\sigma)$; l'égalité (*voir* p. 164)

$$\sigma - \sigma_1 = (t - t_1)^2\left(\frac{B}{2} + \varepsilon'\right)$$

et sa conséquence

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (\sigma - \sigma_1)(2B + \varepsilon'')$$

prouvent que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ ou $\varphi(\sigma)$ reste fonction continue de σ (mais change de signe) quand σ dépasse la valeur σ_1.

Le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend de k constantes arbitraires, par exemple les k coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ du point d'arrêt M_1. Il peut se faire toutefois que ces k constantes ne soient pas distinctes; cela n'a lieu que si la même trajectoire mixte (Γ) correspond à une infinité de valeurs des constantes a_1, a_2, ..., a_k, telles qu'on puisse prendre arbitrairement au moins l'une d'entre elles. S'il en est ainsi, tous les points d'un segment de (Γ) sont des points d'arrêt et, par suite, une infinité de mouvements sont possibles sur (Γ) qui doit être une trajectoire *remarquable*. Comme, d'autre part, par un point M_0 il passe au moins une trajectoire mixte, à savoir celle qui admet M_0 comme point d'arrêt, on voit que le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend soit de k constantes, soit de $(k-1)$ constantes; dans ce dernier cas (qui est un cas particulier), le faisceau (Γ) se confond avec celui des trajectoires remarquables.

Une trajectoire *remarquable* (γ) doit d'ailleurs être regardée comme une trajectoire mixte, en ce sens qu'un point quelconque de (γ) est *point d'arrêt* pour un des mouvements de M sur (γ). En effet, tous ces mouvements sont définis par une égalité de la forme

$$T = f(q_1) + h.$$

où h est une constante arbitraire. Soit pour $t = t_0$, $q_1 = a_1$ et soit $h = -f(a_1)$; au point $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de (γ) la force vive, et par suite $q'_1, \ldots, q'_k$, s'annulent, et M rétrograde sur (γ). Mais il peut exister sur (γ) des mouvements qui aient lieu toujours dans le même sens. Par exemple, si (S) est un point, mobile dans le plan des xy et repoussé par l'origine O proportionnellement à la distance, Ox est une trajectoire remarquable, et les mouvements sur Ox sont définis par l'égalité

$$x'^2 = k^2 x^2 + h;$$

si h est positif, x' ne s'annule pas et l'axe des x est parcouru tout entier dans le même sens quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$. Si h est négatif, le mouvement présente un point d'arrêt.

Il importe de préciser les conditions dans lesquelles les trajectoires *mixtes* et les trajectoires *remarquables* se confondent. Considérons un domaine V_k de E_k dans lequel les déterminations prises pour les A_{ij}, Q_i soient uniformes et régulières. D'après une remarque faite plus haut, dans tous les cas V_k se décompose en domaines partiels V'_k, V''_k caractérisés par la propriété suivante : dans un domaine V'_k, par un point M quelconque passe une trajectoire remarquable ; dans un domaine V''_k, les points qui appartiennent à une trajectoire remarquable ne forment pas un domaine fini à k dimensions. Ceci rappelé, il est clair que *par un point d'un domaine V'_k passe une trajectoire mixte, et une seule, ayant un point d'arrêt dans V'_k*; le faisceau de ces trajectoires est formé, en effet, des trajectoires qui passent par chaque point M de V'_k et correspondent à une vitesse nulle en ce point, conditions initiales qui définissent la trajectoire *remarquable* passant par M. Au contraire, *par un point arbitraire de V''_k passent une infinité de trajectoires mixtes dépendant d'une constante arbitraire* (et ayant un point d'arrêt dans V''_k) : autrement, ces trajectoires ne dépendraient dans V''_k que de $(k-1)$ constantes distinctes et seraient des trajectoires remarquables; un point arbitraire de V''_k appartiendrait donc à une trajectoire remarquable, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour que le faisceau des trajectoires mixtes se confonde avec le faisceau des trajectoires remarquables, il faut donc et il suffit que par un point arbitraire de E_k (quelles que *soient les déterminations choisies pour les* A_{ij}, Q_i) *passe une trajectoire remarquable.*

Dans la discussion précédente, nous avons supposé t_1 fini : si le mouvement reste régulier quand t croît indéfiniment, ou bien M ne tend vers aucune position limite M_1 et l'arc σ de (C) croît indéfiniment avec t, ou bien M tend vers un point d'équilibre P qui peut être un point singulier quelconque de (C).

D'après cela, soit M un point quelconque de E_k dans le voisinage duquel les déterminations prises pour les A_{ij}, Q_i sont régulières, *et qui n'est pas un point d'équilibre. Toute trajectoire* (C) *qui aboutit au point* M *admet une tangente en ce point et se prolonge au delà;* si, en effet, (C) n'est pas une géodésique, T a au point M une valeur bien déterminée, soit T_0; quand T_0 est différent de zéro, la trajectoire se prolonge dans le mouvement même (vrai ou conjugué); quand T_0 est nul, les deux mouvements (vrai et conjugué) qui répondent à la position initiale M et aux conditions initiales $q_i'^0 = 0$ définissent la trajectoire (C) en deçà et au delà de M. Si (C) est une *géodésique,* la chose est encore vraie, lors même que M est un point d'équilibre : on le voit en appliquant les théorèmes établis plus haut au cas particulier où tous les Q_i sont nuls. Les trajectoires remarquables sont des géodésiques : il y a lieu toutefois de signaler ici les trajectoires dont un segment seulement M_0M est *remarquable* et, par suite, coïncide avec un segment de géodésique; une infinité de trajectoires MM' prolongent alors le segment M_0M, suivant la valeur de h dans l'égalité $T = f(q_1) + h$ qui définit le mouvement sur M_0M (*voir* l'exemple de la p. 147).

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

Soit (C) une trajectoire définie par la position et la vitesse initiales M_0 et (v_0) de M, les déterminations choisies pour les coefficients A_{ij}, Q_i étant régulières dans le domaine du point M_0. Il n'y a aucune difficulté à suivre les variations des A_{ij}, Q_i le long de (C) tant qu'une au moins de ces fonctions ne devient pas discontinue ou égale à une autre détermination du même coefficient. Ceci posé, *toute trajectoire réelle* (C) *est prolongeable régulièrement* [1] *tant qu'elle ne rencontre pas soit un point sin-*

[1] J'entends par là qu'en chaque point, la courbe admet une tangente con-

gulier N *des déterminations considérées des* A_{ij}, Q_i, *soit un point d'équilibre* P (*point où tous les* Q_i *s'annulent*) : *en chaque point* M *la courbe* (C) *admet une courbure continue, sauf peut-être aux points d'arrêt si c'est une trajectoire mixte* (*non remarquable*).

En particulier, toute *géodésique* se prolonge régulièrement et admet une courbure continue tant qu'elle ne rencontre pas un point singulier N des A_{ij}.

Si les coefficients A_{ij}, Q_i *sont des fonctions analytiques des* q_i, *toute trajectoire* (C) *est une courbe analytique qui se prolonge régulièrement* (*au sens analytique*) *tant qu'on ne rencontre pas soit un point* N *où les* A_{ij}, Q_i *cessent d'être holomorphes, soit un point d'équilibre.*

Soit donc M_0M un fragment continu de la même trajectoire réelle (C), *qui ne passe ni par un point singulier* N *des* A_{ij}, Q_i, *ni par un point d'équilibre* P. La courbe admettant en chaque point (les extrémités comprises) une tangente continue, la longueur totale de cet arc est un certain nombre fini σ. Si (C) n'est pas une trajectoire *mixte* (ce qui est le cas général, le faisceau des trajectoires mixtes ne dépendant que de k constantes), l'arc M_0M est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini, soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué. Ceci est encore vrai, quand la trajectoire (C) étant *mixte* (sans être *remarquable*) n'admet pas de points d'arrêt entre M_0 et M.

Si (C) est une trajectoire *mixte*, en général elle ne possède qu'un point d'arrêt M_1. Quand ce point fait partie de l'arc M_0M, cet arc est décomposé en deux parties M_0M_1 et M_1M, l'une trajectoire vraie, l'autre trajectoire conjuguée. Il peut arriver pourtant qu'entre M_1 et M il existe plusieurs points d'arrêt M_1, M_2, ..., *mais il n'en existe jamais qu'un nombre fini;* supposons, en

---

tinue sans rebroussement. Ce prolongement ne comporte *aucune ambiguïté*, sauf dans le cas où (C) est une trajectoire dont des segments partiels sont remarquables; les segments en question appartiennent alors à une infinité de trajectoires réelles. Ce cas ne saurait se présenter quand les A_{ij}, Q_i sont analytiques et sans coupures fermées.

effet, que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \varphi(\sigma)$ admette une infinité de zéros

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n < \ldots < \sigma;$$

σ_n tend vers une limite $\sigma' \leqq \sigma$ quand n croît indéfiniment et la fonction $\varphi(\sigma)$, continue entre φ et σ, s'annule pour $\sigma = \sigma'$; comme, par hypothèse, le point M' correspondant n'est pas un point d'équilibre, on a

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - \sigma')(2B + \varepsilon), \qquad (B \neq 0),$$

ce qui montre que $\varphi(\sigma)$ n'admet dans le voisinage de σ' d'autre zéro que σ'; l'hypothèse est donc absurde.

D'après cela, *on pourra toujours décomposer l'arc* M_0M *en un nombre fini de segments qui seront tout entiers les uns trajectoires vraies, les autres trajectoires conjuguées.* A chaque segment M_1M_2, compris entre deux points d'arrêt, correspond un mouvement périodique du système (vrai ou conjugué).

Si le segment M_0M est une trajectoire *remarquable,* chaque point de M_0M est un point d'arrêt d'un des mouvements correspondants; mais on peut toujours, dans l'égalité

$$(\alpha) \qquad T = f(q_1) + h = F(\sigma) + h,$$

prendre h assez grand pour que M_0M soit parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement vrai. De plus, *aucun des mouvements qui ont lieu sur* (C) *ne saurait présenter entre* M_0 *et* M *deux points d'arrêt.* Admettons, en effet, que T s'annule en M_1 et en M_2; d'après l'égalité (α), $F'(\sigma)$ (qui est continu en M_0 et M) s'annule entre M_1 et M_2, donc entre M_0 et M; si $F'(\sigma)$ est identiquement nul, T est constant et différent de zéro; sinon, soit σ' le premier zéro de $F'(\sigma)$ qu'on rencontre en partant d'un point μ de M_0M où $F'(\sigma)$ est différent de zéro et en allant vers M (ou vers M_0); je dis que le point M' (ou σ') de C doit être un point d'équilibre P; il suffit, pour le voir, de considérer le mouvement défini sur (C) par l'égalité

$$T = F(\sigma) - F(\sigma') = (\sigma - \sigma')^2 - F_1(\sigma);$$

comme, entre μ et M', $F_1(\sigma)$ s'annule au plus une fois (soit en M_1) le long d'un arc fini M_1M', le signe de F_1 est constant, et il est loisible de le supposer positif (sinon on changerait t en it); on a donc

$$dt = \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma'} g(\sigma),$$

$g(\sigma)$ restant supérieur à un certain nombre positif quand σ varie entre $\sigma' - \alpha$ et σ'; t croît donc indéfiniment quand σ tend vers σ', ou encore σ tend vers σ' quand t croît indéfiniment. Cela n'est possible que si M' est *un point d'équilibre* [1]. Il suit de là que pour h suffisamment grand ($h > h_1$) le segment M_0M sera parcouru en entier dans le mouvement vrai correspondant; pour h inférieur à une certaine limite h_2, le segment sera parcouru en entier dans le mouvement conjugué; pour h compris entre h_1 et h_2, M_0M se décomposera en *deux* parties, parcourues l'une dans le mouvement vrai, l'autre dans le mouvement conjugué; h_1 et h_2 peuvent être infinis.

Enfin si le segment M_0M n'est que *partiellement* une trajectoire remarquable, par exemple si le segment M_0M' est remarquable et le segment M'M ordinaire, la valeur de T au point M' détermine la valeur de h, donc de T, le long de M_0M'; T a ainsi une valeur bien définie le long de M_0M qui jouit, par suite, des mêmes propriétés qu'une trajectoire *ordinaire*.

Branches de trajectoires singulières. — Admettons maintenant que le segment M_0M passe par des *points d'équilibre* P (mais non par des points singuliers). Soit P le premier point

---

(1) Il est facile de vérifier cette conclusion ainsi. On a

$$F'(\sigma) = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + Q_2 \frac{dq_2}{d\sigma} + \ldots + Q_k \frac{dq_k}{d\sigma};$$

mais, d'autre part, (C) étant une trajectoire remarquable, on sait que

$$\frac{dq_1}{d\sigma} = \frac{dq_i}{d\sigma}, \qquad (i = 2, 3, \ldots, k);$$

d'où l'égalité

$$F'(\sigma) = \frac{Q_1\beta_1 + \ldots + Q_k\beta_k}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_k^2}},$$

ou bien, comme $Q_i = \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij}\beta_j$,

$$F'(\sigma) = \frac{T(q_1, q_2, \ldots, q_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_k^2}},$$

expression qui ne peut être nulle que si tous les β_i sont nuls.

d'équilibre que l'on rencontre sur M_0M en partant de M_0; étudions le segment M_0P en supposant d'abord que (C) n'est pas une trajectoire remarquable.

Dans cette hypothèse, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ est une fonction de σ, continue tant que M reste compris entre M_0 et P; mais qu'arrive-t-il quand M tend vers P? Je dis que $\varphi(\sigma)$ tend vers une limite. Tout d'abord, si $\varphi(\sigma)$ tend vers zéro, la proposition est démontrée; s'il n'en est pas ainsi, on peut trouver sur (C) des points M aussi voisins que l'on veut de P et tels que $\varphi(\sigma)$ (et par suite un au moins des $q_i'^2$) ait en M une valeur absolue supérieure à un certain nombre fixe λ^2. En répétant alors identiquement le raisonnement de la page 160 (soit sur le mouvement vrai, soit sur le mouvement conjugué), on voit que M doit atteindre en un temps fini la position P avec une force vive déterminée et finie, et par suite le mouvement, comme la trajectoire (C), se prolongent régulièrement au delà de P. En résumé, $f(\sigma)$ *tend vers une limite* $f(\mathrm{P})$ *quand on fait tendre* M *vers* P *sur la courbe* MP, *et, si cette limite n'est pas nulle, le point* P *est un point ordinaire de* (C).

Si au contraire $f(\mathrm{P})$ est nul, l'arc M_0P ne saurait être parcouru en un temps fini dans le mouvement soit vrai, soit conjugué, et cela si voisin de P qu'on prenne M_0 sur la trajectoire. Le segment M_0P est donc, d'après notre définition, *une branche singulière de trajectoire*. Mais deux circonstances distinctes peuvent se présenter suivant que $f(\sigma)$ s'annule ou non un nombre infini de fois entre M_0 et P. Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas qui est le plus général.

1° *Il n'existe entre* M_0 *et* P *qu'un nombre fini de zéros de* $f(\sigma)$. Il suffit alors de considérer le segment M_1P adjacent à P et où $f(\sigma)$ garde un signe constant qu'il est loisible de supposer positif. Quand t croît, le point M placé entre M_1 et P et lancé vers P tangentiellement à (C) avec la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ *tend vers* P *quand* t *croît indéfiniment*. Le point P peut être un point singulier quelconque et une extrémité analytique de (C). Nous avons donné plus haut des exemples de cette singularité.

2° $f(\sigma)$ *admet une infinité de zéros* $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ *entre* M_0 *et* P. Les points d'arrêt $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ tendent vers P quand n croît indéfiniment. Le segment M_1P se trouve ainsi décomposé en une *infinité* de segments M_1M_2, M_2M_3, ... qui tendent vers P et qui correspondent à autant de mouvements *périodiques* (alternativement vrais ou conjugués), dont l'*amplitude* tend vers zéro. Comme exemple de ce cas, citons les équations

$$(A)\quad \begin{cases} x'' = \dfrac{xy}{2}\left[\dfrac{7}{4}(x^2+y^2)^2 - 3\right] + \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)(5y^2-x^2), \\ y'' = \dfrac{7}{8}y^2(x^2+y^2)^2 - \dfrac{3}{2}xy(x^2+y^2) + \dfrac{x^2}{2} - y^2. \end{cases}$$

Une des trajectoires définie par (A) est la suivante

$$x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\theta}}, \qquad y = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}},$$

ou encore, en coordonnées polaires,

$$\theta = \frac{1}{r^2};$$

cette trajectoire admet l'origine (point d'équilibre) comme point asymptote, et le mouvement correspondant est défini par l'égalité

$$dt = \frac{d\theta\,\theta^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\sin\theta}} = -\frac{2}{r^3}\,\frac{dr}{\sqrt{r\sin\dfrac{1}{r^2}}}.$$

Sur chaque arc de courbe $2n\pi < \theta < (2n+1)\pi$ le mouvement vrai est réel et périodique, sur les arcs $(2n+1)\pi < \theta < 2(n+1)\pi$, c'est le mouvement conjugué qui est périodique.

Comme dans le premier cas, P peut être un point singulier de nature quelconque et une *extrémité* de (C); quand M tend vers P, σ peut tendre vers une limite, ou croître indéfiniment comme dans l'exemple ci-dessus.

Quand la courbe C, dans l'un ou l'autre cas, se prolonge au delà de P, elle peut passer par un autre point d'équilibre P_1, etc. Il peut arriver que les points d'équilibre forment sur (C) une *suite* ayant certains points *limites* P' qui sont nécessairement des points d'équilibre (¹); mais, dans tous les cas, $f(\sigma)$ est une fonc-

(¹) Par exemple, soit M un point mobile dans un plan et soumis à une force qui s'annule tout le long d'une certaine courbe (G) et soit M_0 un point de cette tion continue le long de M_0M, qui s'annule en tous les points d'équilibre *singuliers* pour la trajectoire et en particulier aux points limites P'.

Toutes les trajectoires singulières qui passent par un point d'équilibre P ou $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ s'obtiendront donc en cherchant toutes les intégrales du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_1}{\beta_1 + \Pi_1} = \frac{dq'_2}{\beta_2 + \Pi_2} = \ldots = \frac{dq'_k}{\beta_k + \Pi_k},$$

qui satisfont aux conditions initiales

$$q_i = a_i, \qquad q'_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Il nous reste à dire un mot du cas que nous avons laissé de côté où la trajectoire M_0P serait remarquable. Si cette trajectoire n'est que partiellement remarquable, ce qui précède subsiste; mais quand un segment fini attenant au point P, soit M_0P, est *tout entier* remarquable, on peut aller plus loin. Tout d'abord, disposons de la constante h de façon que le point M atteigne le point P avec une vitesse différente de zéro; *la trajectoire se prolonge alors régulièrement au delà du point* P. Si, au delà de P, la trajectoire est encore remarquable (ce qui a lieu nécessairement quand P est un point *analytiquement régulier* des A_{ij}, Q_i), ce prolongement n'est possible que d'une seule manière; sinon une infinité de trajectoires prolongent régulièrement M_0M.

Dans les deux cas, le mouvement sur M_0P étant défini par l'égalité

$$T = F(\sigma) + h,$$

si l'on donne à h la valeur F(P), le point M tendra vers P quand t croîtra indéfiniment. Quand la trajectoire est encore remarquable au delà du point P, on a dans le voisinage de P (où $\sigma = \sigma'$)

$$T = h + (\sigma - \sigma')^2(A + \varepsilon),$$

A ayant une valeur finie et ε tendant vers zéro avec $(\sigma - \sigma')$. En effet, la trajectoire (C), étant une géodésique, admet en chaque point, notamment au point P, une courbure continue, et l'égalité

---

courbe; il peut se faire qu'une trajectoire passant par M_0 rencontre (G) en une infinité de points voisins de M_0 qui soient tous points singuliers de la trajectoire.

$F'(\sigma) = \sum Q_i \frac{dq_i}{d\sigma}$ montre que $F''(\sigma)$ existe au point P. Si A est négatif, les mouvements correspondant à de petites valeurs de h sont périodiques autour de P; si A est positif, la même remarque s'applique aux mouvements conjugués.

Observons qu'une trajectoire remarquable (γ) peut d'ailleurs renfermer un nombre infini de points d'équilibre P formant une suite. C'est ce que montre l'exemple des deux équations

$$2x'' = x^3\left(5x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right), \qquad y'' = 0,$$

qui admettent les trajectoires remarquables $y = y_0$ le long desquelles le mouvement est défini par la relation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x^5 \sin\frac{1}{x} + h;$$

toutes les racines x_i de l'égalité $\operatorname{tang}\frac{1}{x} = \frac{1}{5x}$ correspondent à des points d'équilibre P qui tendent vers l'origine.

Dans cet exemple, les fonctions X, $Y \equiv 0$ sont continues ainsi que leurs dérivées premières à l'origine. Mais il convient de remarquer que la singularité en question ne se présente pas si les coefficients A_{ij}, Q_i sont des fonctions *holomorphes* dans le domaine du point P. En effet, le point P est alors un point analytique régulier de la trajectoire (γ) et les variables q_i sont des fonctions holomorphes de σ dans le voisinage de σ'; la fonction $F'(\sigma) \equiv \sum Q_i \frac{dq_i}{d\sigma}$ est donc holomorphe dans le voisinage de σ', et σ' est nécessairement un zéro isolé de $F'(\sigma)$. *Lors donc que le point d'équilibre* P *est un point analytiquement régulier des* A_{ij}, Q_i, *toute trajectoire remarquable* M_0P *est prolongeable analytiquement et reste au delà du point* P *régulière et remarquable; de plus* P *est un point d'équilibre isolé sur cette trajectoire.*

Observons enfin que les β_i peuvent être nuls tout le long du segment M_0M de la trajectoire (γ). Il faut pour cela et il suffit que la *géodésique* M_0M de T soit un lieu de points d'équilibre P. Le mouvement sur M_0M est alors le même que si le système S n'était soumis à aucune force; T est constant.

Remarque sur le cas où les forces Q_i *dérivent d'un potentiel* $U(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. — S'il existe une fonction de forces U, et si, de plus, les points d'équilibre P ne forment pas un ensemble continu, les trajectoires (C) qui passent par un point d'équilibre P sont nécessairement exceptionnelles.

Tout d'abord, les trajectoires (C) pour lesquelles P est un point ordinaire [$T \neq 0$ en P] dépendent seulement de k paramètres. Quant à celles pour lesquelles P est un point singulier [$T = 0$ en P], elles satisfont à la condition

$$U(a_1, a_2, \ldots, a_k) + h = 0.$$

Ces trajectoires correspondent donc à des valeurs particulières de h, et par suite ne peuvent dépendre de plus de $(2k - 2)$ constantes.

Conclusions.

Les principaux résultats que nous avons obtenus au sujet des trajectoires réelles se résument ainsi :

Soit V_k un domaine de E_k dans lequel les déterminations choisies pour les fonctions A_{ij}, Q_i sont uniformes et continues; nous admettons de plus que les dérivées premières des Q_i et les dérivées secondes des A_{ij} sont aussi continues dans le même domaine.

I. *Par un point* M *de* V_k *passe une géodésique de* T, *et une seule, tangente à la direction* MT; *toute géodésique est prolongeable régulièrement tant que l'on ne sort pas de* V_k *et admet en chaque point une courbure continue.*

II. *Toute trajectoire réelle* (C) *de* (S) *est prolongeable régulièrement tant que l'on ne sort pas de* V_k *ou que l'on ne rencontre pas dans* V_k *un point d'équilibre* P (*point où tous les* Q_i *sont nuls*).

Une trajectoire (C) ne comporte que deux mouvements distincts dont l'un se déduit de l'autre en changeant t en $-t$. Il n'y a d'exception que pour certaines trajectoires *remarquables* (γ) qui n'existent pas en général et qui se composent des géodésiques de T satisfaisant en même temps aux conditions

$$\text{(A)} \qquad \frac{q'_1}{\beta_1} = \frac{q'_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{q'_k}{\beta_k}.$$

Ces trajectoires (γ) dépendent au plus de ($k - 1$) constantes; sur une telle trajectoire une infinité de mouvements distincts (dépendant d'une constante) sont possibles.

Tout segment de trajectoire réelle compris dans V_k et ne renfermant pas de point d'équilibre est parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement régulier soit vrai, soit conjugué. Il n'y a d'exceptions que pour une classe de trajectoires dépendant de k constantes, et qui se décomposent en segments alternativement vrais ou conjugués, les points de séparation étant des points d'arrêt où T s'annule et où le système rétrograde. Ces trajectoires (*trajectoires mixtes*) ne dépendent plus que de ($k - 1$) constantes et se confondent avec les trajectoires remarquables quand toutes les courbes définies par (A) dans V_k sont des géodésiques.

Quand la trajectoire (C) rencontre dans V_k un point d'équilibre P, les conclusions précédentes subsistent si la trajectoire (C) est *remarquable*, ou si, (C) étant trajectoire ordinaire, T [qui a une valeur déterminée en chaque point de (C)] ne s'annule pas en P. Mais si T s'annule en P, l'arc M_0P de (C) ne saurait être parcouru en un temps fini (si petit que soit M_0P) dans le mouvement vrai ou conjugué. C'est une branche *singulière* de trajectoire qui peut admettre P comme point singulier quelconque et comme extrémité analytique.

Les seuls points de V_k *par lesquels puisse passer une trajectoire sans tangente continue sont donc les points d'équilibre* P.

III. On peut toujours admettre que V_k est tout entier soit de l'espèce V'_k (c'est-à-dire qu'un point quelconque de V_k appartient à une trajectoire remarquable), soit de l'espèce V''_k (c'est-à-dire que les trajectoires remarquables n'emplissent aucun domaine fini à k dimensions à l'intérieur de V_k).

Ceci posé, plaçons-nous d'abord dans le cas *particulier* où V_k est de l'espèce V'_k.

Toutes les trajectoires (C) *qui passent par un point* M *de* V_k *qui n'est pas un point d'équilibre ont en ce point une tangente et une courbure continues.* Par un point M passent deux trajectoires tangentes en M à une direction donnée MT et de courbure donnée $\frac{1}{R}$, pourvu seulement que la direction MT ne soit pas la direction $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ et que $\frac{1}{R}$ soit supérieur à une certaine limite qui peut être nulle. Quand MT coïncide avec la direction $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, toutes les trajectoires tangentes à MT se confondent avec la géodésique tangente en M à MT, qui est une trajectoire remarquable : il ne passe pas par M d'autre trajectoire *mixte,* ayant un point d'arrêt dans V_k.

Plaçons-nous maintenant dans le *cas général* où V_k est de l'espèce V''_k. *Toutes les trajectoires qui passent par un point* M *de* V_k (*qui n'est pas un point d'équilibre*) *admettent en* M *une tangente et une courbure continues, sauf peut-être la trajectoire unique qui admet* M *comme point d'arrêt.* Cette dernière a en M une tangente continue, mais n'a pas nécessairement de courbure. Par un point arbitraire M passent encore deux trajectoires tangentes à MT et de courbure donnée, pourvu que MT ne se confonde pas avec la direction $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$. Si MT coïncide avec cette direction, il existe une infinité de trajectoires tangentes à MT, *mais toutes ces trajectoires ont même courbure en* M ; il existe de plus une trajectoire *isolée* tangente à MT, admettant M comme point d'arrêt, et qui n'a pas nécessairement de courbure en M.

Par chaque point M de V_k passent une infinité de trajectoires *mixtes* (dépendant d'une constante arbitraire) et présentant un point d'arrêt M′ dans V_k.

Que V_k soit de l'espèce V'_k ou V''_k, *si les* A_{ij}, Q_i *sont holomorphes dans* V_k, *toute trajectoire est une ligne analytique régulière dans* V_k, *sauf peut-être aux points d'équilibre* P.

Soit maintenant P un point d'équilibre de V_k. *Par ce point passent une infinité de trajectoires* (C) *tangentes en* P *à la droite* PT, *et ces trajectoires ont même courbure que la géodésique qui leur est tangente :* elles se confondent avec cette géodésique dans le cas particulier où V_k est de l'espèce V'_k et où toutes les trajectoires remarquables passent par P. Mais le fait le plus important, c'est qu'*il peut exister en dehors de ces trajectoires d'autres branches singulières passant par* P *et telles que le segment* M_0P *d'une de ces branches* (*si petit qu'il soit*) *ne soit* *parcouru en un temps fini ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué.*

Ces branches singulières peuvent ne pas admettre de tangente au point P *et ne pas se prolonger analytiquement au delà.* Toutes ces branches s'obtiennent en cherchant les intégrales du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_1}{\beta_1 + \Pi_1} = \ldots = \frac{dq'_k}{\beta_k + \Pi_k},$$

qui satisfont aux conditions initiales $q_i = a_i$, $q'_i = 0$, ($a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant les coordonnées des points P) (¹). Ces conditions donnent en particulier les trajectoires remarquables qui passent par P.

IV. Enfin, quand les forces dérivent d'un potentiel, une trajectoire *prise au hasard* n'est ni mixte, ni remarquable, ni singulière; elle se prolonge donc régulièrement et est parcourue tout entière dans le même sens d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué) tant qu'on ne rencontre pas un point singulier des A_{ij}, Q_i.

Exemple. — Pour appliquer ces généralités à un exemple, traitons le cas d'un point matériel libre M ou (x, y, z) soumis à une force (F) qui dérive d'un potentiel $U(x, y, z)$, fonction holomorphe des trois variables réelles x, y, z; nous admettons de plus que les trois dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ ne s'annulent simultanément qu'en des points isolés.

Toute trajectoire est une courbe analytique qui se prolonge indéfiniment d'une manière régulière tant qu'on ne rencontre pas un point d'équilibre. De plus, une trajectoire *prise au hasard* ne

(¹) Quand il n'y a pas de point d'équilibre, il n'y a pas de branches singulières. En général, les points d'équilibre sont isolés, mais ils peuvent, dans des cas particuliers, former un ensemble continu. Par chaque point d'équilibre P, il peut ne passer qu'un nombre fini de branches singulières, ou il peut en passer une infinité dépendant de constantes; c'est ce dernier cas qui est réalisé dans les exemples cités plus haut; le premier est réalisé dans le mouvement défini par les équations

$$x'' = x, \qquad y'' = -y,$$

où les seules trajectoires définies par les conditions initiales $x = 0$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$ sont les deux axes Ox et Oy (trajectoires remarquables).

passe pas par un point d'équilibre; elle est prolongeable indéfiniment d'une façon régulière et un segment fini quelconque est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué).

Deux cas principaux sont d'ailleurs à distinguer suivant que les surfaces de niveau $U =$ const. forment ou non une famille de surfaces *parallèles*. Dans le premier cas, les normales à ces surfaces forment une congruence de trajectoires remarquables (γ). Toute trajectoire, autre que ces droites, est ou vraie, ou conjuguée. Les trajectoires mixtes se confondent avec les droites remarquables (γ). Par un point d'équilibre P passent *en général* une infinité de normales, formant un cône du second degré, et qui sont autant de trajectoires remarquables : si on place M sur une de ces droites (γ) avec une vitesse convenable, M tendra vers P quand t croîtra indéfiniment; la même droite comportera une infinité de mouvements périodiques (vrais ou conjugués) où M oscillera autour de P.

Quand les surfaces de niveau ne sont pas *parallèles,* il ne passe pas par un point arbitraire de trajectoire remarquable. Les trajectoires *mixtes* dépendent de trois constantes arbitraires.

Par un point M de l'espace (qui n'est pas un point d'équilibre) passent deux trajectoires tangentes à une droite donnée MT et de courbure donnée; l'une de ces trajectoires est vraie, l'autre conjuguée. Toutefois, si la direction de MT coïncide avec celle de (F), toutes les trajectoires tangentes à MT ont même courbure en M que la géodésique qui est la droite MT, c'est-à-dire ont en M une inflexion, sauf, toutefois, la trajectoire qui admet M comme point d'arrêt et dont la courbure en M n'est pas nulle en général : si la ligne d'action de (F) est trajectoire singulière, toutes les trajectoires tangentes en M à (F) se confondent avec cette droite (F). C'est ce qui a lieu, quel que soit M, quand les surfaces de niveau sont parallèles.

Par un point d'équilibre P passent une infinité de trajectoires tangentes à une direction donnée PT et toutes ces trajectoires (qui dépendent d'une constante arbitraire) ont une inflexion en P; toutefois, si PT est trajectoire remarquable, ces trajectoires se confondent avec la droite PT. Mais, de plus, il peut passer par P d'autres trajectoires *singulières* qui s'obtiennent en cherchant toutes les intégrales du système

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dx'}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy'}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}$$

qui satisfont aux conditions initiales $x' = y' = z' = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$ (a, b, c étant les coordonnées du point P).

Soit, par exemple, un point M attiré par l'origine proportionnellement à la distance; les surfaces de niveau sont des sphères de centre O, famille parallèle; les trajectoires vraies sont les ellipses concentriques à l'origine, les trajectoires conjuguées les hyperboles; enfin les trajectoires mixtes, confondues avec les trajectoires remarquables, sont les droites (γ) issues de l'origine. Quand on remplace l'attraction par une répulsion, les trajectoires vraies et les trajectoires conjuguées se permutent. Les trajectoires singulières passent par le point d'équilibre O et se confondent avec les droites (γ).

Soit maintenant un point M de masse 1 soumis à la force (F) qui dérive du potentiel $U = xy$. Les trajectoires s'obtiennent en éliminant t entre les relations

$$x = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma \cos t, \qquad y = \alpha e^t + \beta e^{-t} - \gamma \cos t, \qquad z = ct + c'.$$

Les trajectoires mixtes correspondent aux valeurs des constantes $\alpha = \beta$ et $c = 0$. Les seules trajectoires remarquables sont l'axe des z et les droites $y = \pm x$, $z = c'$, qui se confondent avec les branches singulières passant par chaque point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, $z = c'$. Si le potentiel était $\frac{x^4 + y^2}{2}$, les seules trajectoires remarquables seraient l'axe des z et les droites $x = 0$, $z = c'$ d'une part et $y = 0$, $z = c'$ d'autre part, mais par chaque point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, $z = c'$ passeraient une infinité de trajectoires singulières

$$y = Ce^{\pm\frac{1}{x}}, \qquad z = c'.$$

Revenons au mouvement général d'un point. Pour que chaque mouvement vrai du point M soit *périodique,* il faut et il suffit qu'une trajectoire vraie prise au hasard soit une trajectoire fermée (c'est-à-dire qu'en la prolongeant régulièrement à partir d'un quelconque de ses points, on revienne au point de départ). Pour qu'un mouvement particulier seulement soit périodique, il faut ou que la trajectoire vraie correspondante soit fermée et ne renferme pas de branche singulière, ou que ce soit une trajectoire mixte admettant deux points d'arrêt entre lesquels le mouvement vrai est réel et régulier, ou enfin que ce soit une trajectoire remarquable (une droite) qui passe par un point d'équilibre P correspondant à un maximum de U sur la droite.

D'une manière générale, un mouvement d'un système quelconque sera périodique chaque fois que la trajectoire correspondante sera une courbe *fermée* qui ne passera ni par un point singulier intrinsèque, ni par un point d'équilibre, pourvu toutefois que la trajectoire ne soit pas une trajectoire remarquable : par trajectoire fermée, j'entends une trajectoire (C) telle que le système (S) partant d'une position quelconque sur (C) et parcourant (C) dans le même sens, revienne à sa position initiale. Mais quand (C) est une trajectoire remarquable, il faut de plus que, dans le mouvement, (S) revienne à la position initiale avec la même force vive, ce qui n'a pas lieu nécessairement. Par exemple, soit un point M de masse 1 mobile sur l'hyperboloïde de révolution $x^2+y^2-z^2=1$ et soumis à la force $X=\frac{y}{x^2+y^2}$, $Y=\frac{x}{x^2+y^2}$, $Z=0$; le cercle de gorge de la surface est une trajectoire remarquable fermée qui ne passe ni par un point d'équilibre ni par un point singulier intrinsèque; sur ce cercle, le mouvement est défini par l'égalité $dt=\frac{d\theta}{\sqrt{\theta+h}}$, et l'on voit que le cercle, quand t croît, est décrit un nombre indéfini de fois avec une vitesse toujours croissante.

Remarques sur les théorèmes précédents. — La proposition fondamentale sur laquelle repose toute la discussion précédente, c'est que les vitesses d'un système restent déterminées, finies et continues tant que le système occupe à chaque instant une position déterminée qui n'est pas une position singulière; mais nous n'avons rien dit du cas où le système traverse une position singulière, non plus que du cas où le système, quand t tend vers t_1, ne tend pas vers une position déterminée à distance finie.

Quand (S) atteint une position *singulière non intrinsèque,* la difficulté n'est pas sérieuse, puisqu'on la tourne à l'aide d'un simple changement de variables. Mais, si la singularité N est intrinsèque, deux circonstances sont possibles suivant que les vitesses tendent ou non vers une limite quand le système tend vers la position N. Dans la première hypothèse, il faut avoir recours aux méthodes de M. Poincaré qui permettent, dans des cas très étendus, de discuter les intégrales correspondant à des valeurs initiales singulières [1].

Mais une difficulté bien plus grave réside dans cette circonstance que les vitesses peuvent être indéterminées quand (S) tend vers N, ainsi que dans le fait que, t tendant vers t_1, (S) peut ne pas tendre vers une position limite. Dans un autre travail, nous ferons voir que ni l'une ni l'autre de ces singularités ne saurait se présenter *quand les équations du mouvement satisfont à certaines conditions*. Ces conditions remplies, il est *théoriquement* possible de représenter les fonctions $q_i(t)$ à l'aide de développements qui convergent pour *toutes* les valeurs réelles de t; la difficulté consiste à choisir un mode de développement adapté aux équations étudiées; c'est ici que les nouvelles méthodes d'approximation de M. Picard semblent appelées à jouer un rôle considérable.

---

[1] Lors même que cette discussion analytique peut être menée à bonne fin, on sait qu'elle ne permet pas en général de déterminer *sans ambiguïté* le mouvement ultérieur du système. Par exemple, soit M un point de masse 1 mobile dans le plan des xy et soumis à la force $X = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, $Y = 0$, force bien définie et continue en chaque point, mais pour laquelle $\frac{\partial X}{\partial x}$ est discontinue le long de l'axe des y. Chaque fois que le mobile atteint l'axe des y avec une vitesse dirigée selon cet axe, on a le choix entre trois mouvements ultérieurs possibles, à savoir le mouvement défini par l'égalité $y = at + b$ jointe à l'une des égalités

$$x \equiv 0, \qquad x = \tfrac{1}{9}(t - t_0)^3, \qquad x = -\tfrac{1}{9}(t - t_0)^3.$$

Le mobile peut d'ailleurs arriver au point d'équilibre $x = 0$, $y = b$ en un temps fini, avec une vitesse nulle. Dans d'autres cas, on a le choix entre une infinité de mouvements.