BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. CARONNET

Sur des couples de surfaces applicables

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 134-140

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__134_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur des couples de surfaces applicables;

par M. Th. Caronnet.

1. Étant données deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la distance $M_1 M_2$ des points correspondants varie en général avec la position de ces points sur les surfaces qu'ils décrivent.

Nous nous sommes demandé s'il existait des couples de surfaces applicables pour lesquelles cette distance fût constante. La solution de cette question, que nous donnons ici, montre que notre hypothèse était plausible; il existe, en effet, des surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants est invariable.

Ces surfaces peuvent se diviser en deux groupes. Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une surface du premier groupe dépendent de deux fonctions arbitraires d'arguments différents.

Les surfaces du second groupe sont réglées et se correspondent par génératrices parallèles et de même sens; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même argument.

Au point de vue de la déformation, ce dernier résultat n'est pas nouveau; M. Beltrami a montré effectivement qu'*il existe toujours deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre et dans lesquelles les génératrices correspondantes sont parallèles et de même sens* (1).

2. Soient deux surfaces (M_1), (M_2) applicables l'une sur l'autre et telles que la distance $M_1 M_2$ des points correspondants soit constante et égale à l.

Appelons $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ les coordonnées des points M_1, M_2; x, y, z celles du milieu O de la droite qui les joint, et ξ, η, ζ les cosinus directeurs de cette droite.

Nous aurons

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1,\ y_1,\ z_1 = x,\ y,\ z + (\xi, \eta, \zeta)\dfrac{l}{2}, \\ x_2,\ y_2,\ z_2 = x,\ y,\ z - (\xi, \eta, \zeta)\dfrac{l}{2}. \end{cases}$$

Les deux surfaces en question étant applicables l'une sur l'autre, il vient

$$\mathrm{S}\, dx_1^2 = \mathrm{S}\, dx_2^2,$$

ou bien

$$(2)\qquad \mathrm{S}\, dx\, d\xi = 0.$$

(1) *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Troisième Partie, p. 298.

Par conséquent, la surface lieu du milieu O correspond à la sphère par orthogonalité des éléments; et, après avoir posé

$$\xi = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad \eta = i\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad \zeta = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta},$$

nous aurons

$$(3) \qquad \mathrm{S}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\alpha} = 0,$$

$$(4) \qquad \mathrm{S}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0,$$

$$(5) \qquad \mathrm{S}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \mathrm{S}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\frac{\partial x}{\partial\alpha} = 0.$$

Les équations (3) et (4) s'écrivent encore

$$(1 - \beta^2)\frac{\partial x}{\partial\alpha} + i(1 + \beta^2)\frac{\partial y}{\partial\alpha} - 2\beta\frac{\partial z}{\partial\alpha} = 0,$$

$$(1 - \alpha^2)\frac{\partial x}{\partial\beta} - i(1 + \alpha^2)\frac{\partial y}{\partial\beta} - 2\alpha\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0,$$

et nous donnent après intégration

$$(3)' \qquad (1 - \beta^2)x + i(1 + \beta^2)y - 2\beta z = \mathrm{B}(\beta),$$

$$(4)' \qquad (1 - \alpha^2)x - i(1 + \alpha^2)y - 2\alpha z = \mathrm{A}(\alpha).$$

Quant à l'équation (5), on peut l'écrire

$$\mathrm{S}\frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha\,\partial\beta}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathrm{S}x\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\mathrm{S}x\frac{\partial\xi}{\partial\alpha},$$

ou bien, en tenant compte des équations (3)′ et (4)′ qui permettent d'exprimer le second membre exclusivement en fonction de α et de β,

$$(5)' \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - \beta)x + i(\beta - \alpha)y - (1 - \alpha\beta)z \\ &\quad = \frac{(1 + \alpha\beta)}{4}(\mathrm{A}' + \mathrm{B}') - \frac{\beta}{2}\mathrm{A} - \frac{\alpha}{2}\mathrm{B}. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées x, y, z de tout point de la surface (O) seront donc fournies par les trois équations linéaires (3)′, (4)′ et (5)′.

Les formules (1) feront connaître ensuite les surfaces (M_1) et (M_2).

La recherche des surfaces focales de la congruence rectiligne

$(M_1 M_2)$ présente quelque intérêt. Examinons donc comment sont distribués les points focaux sur la droite $M_1 M_2$.

Nous avons pour les coordonnées d'un point quelconque de la droite $M_1 M_2$

$$X, Y, Z = x, y, z + (\xi, \eta, \zeta)\rho.$$

Les développables de la congruence sont définies par l'équation qu'on obtient en éliminant ρ entre les équations

$$\frac{dx + \rho\, d\xi}{\xi} = \frac{dy + \rho\, d\eta}{\eta} = \frac{dz + \rho\, d\zeta}{\zeta},$$

ce qui donne, en ayant égard à l'identité (2),

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0$$

ou

$$d\alpha\, d\beta = 0.$$

Les développables en question correspondent donc aux génératrices rectilignes de la sphère, et nous avons pour les ρ des points focaux

$$\rho_1 = -\frac{S\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \xi}{\partial \beta}}{S\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial \xi}{\partial \beta}}, \qquad \rho_2 = -\frac{S\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}}{S\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{\partial \xi}{\partial \beta}}.$$

L'équation (5) nous montre d'ailleurs que l'on a

$$\rho_2 = -\rho_1;$$

par conséquent, les points focaux sont équidistants du milieu O.

3. Dans l'analyse précédente, nous avons supposé dès le début, en partant de l'identité (2), que les droites $M_1 M_2$ étaient susceptibles d'avoir une direction quelconque, c'est-à-dire que le point (ξ, η, ζ) pouvait occuper toute position sur la sphère de rayon unité; il convient maintenant d'étudier le cas où ce point décrit seulement une courbe sphérique $\beta = f(\alpha)$. La surface (O) qui correspond à cette courbe par orthogonalité des éléments sera nécessairement une développable.

D'ailleurs, l'équation (2) nous donne

$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta'\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0,$$
$$S\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \beta'\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

et, en reprenant le calcul indiqué plus haut pour la recherche des développables de la congruence $(M_1 M_2)$, on voit que les développables d'une famille sont données par $\beta = \text{const.}$ Elles correspondent donc aux génératrices de la développable (O). On reconnaît en outre aisément que les points focaux relatifs à ces développables coïncident avec les milieux O des segments $M_1 M_2$.

Pour achever la question, considérons la surface (O) et rapportons-la aux courbes enveloppes ($v = \text{const.}$) des droites $M_1 M_2$, et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$). Son élément linéaire sera de la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2. \tag{6}$$

Les coordonnées des points M_1 et M_2 s'écriront

$$(M_1) \qquad x_1, y_1, z_1 = x, y, z + \frac{l}{2A} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u},$$

$$(M_2) \qquad x_2, y_2, z_2 = x, y, z - \frac{l}{2A} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial u}.$$

D'après l'hypothèse, les surfaces (M_1), (M_2) étant applicables l'une sur l'autre, nous devrons avoir l'identité

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2 + dz_2^2,$$

qui s'écrit, après substitutions,

$$\mathrm{S}\, dx\, d\left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0.$$

Développons et annulons les coefficients de du^2, de $du\,dv$ et de dv^2; nous obtiendrons

$$\mathrm{S} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0,$$

$$\mathrm{S} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u}\right) + \mathrm{S} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0,$$

ou finalement, après réductions,

$$\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 0.$$

Par conséquent, l'élément linéaire (6) pourra s'écrire

$$ds^2 = du^2 + dv^2. \tag{7}$$

La surface focale (O) est donc une développable, comme nous l'indiquions plus haut, et les développables de la congruence $(M_1 M_2)$ sont constituées par les plans tangents d'une part et les tangentes aux géodésiques $v =$ const. de cette surface d'autre part.

Remarquons que ces géodésiques coupent une même génératrice (g) de la surface (O) suivant le même angle; quand le point milieu (O) décrira la droite (g), les points M_1 et M_2 décriront dans le même sens deux droites (G_1) et (G_2) parallèles à (g) et équidistantes de cette dernière.

Il suit de là que les surfaces (M_1) et (M_2) sont réglées, qu'elles se correspondent par génératrices parallèles et de même sens.

Mais, comme le fait prévoir leur mode de génération, les surfaces réglées (M_1) et (M_2) ne sont pas quelconques; pour plus de précision, nous allons calculer les expressions de leurs coordonnées rectangulaires.

Soient

$$\begin{aligned} x &= a_1 u + b_1, \\ y &= a_2 u + b_2, \\ z &= a_3 u + b_3 \end{aligned}$$

les coordonnées d'un point quelconque de la développable (O).

Nous pouvons toujours supposer

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 &= 1, \\ a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' &= 0; \end{aligned}$$

et la surface étant développable, nous aurons

$$\frac{a_1'}{b_1'} = \frac{a_2'}{b_2'} = \frac{a_3'}{b_3'} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Pour ramener l'élément linéaire de la surface (O) à la forme (7) il faut effectuer les substitutions suivantes :

$$u' = u\cos(v+m) + \int \alpha \sin(v+m)\,dv,$$

$$v' = u\sin(v+m) - \int \alpha \cos(v+m)\,dv,$$

où m désigne une constante arbitraire.

Ceci posé, nous aurons pour les coordonnées du point M_1

$$x_1 = a_1 u + b_1 + \frac{\partial x}{\partial u'},$$

$$y_1 = a_2 u + b_2 + \frac{\partial y}{\partial u'},$$

$$z_1 = a_3 u + b_3 + \frac{\partial z}{\partial u'},$$

ou bien

$$(M_1)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a_1 u + b_1 + \frac{l}{2}[a_1\cos(v+m) - a'_1\sin(v+m)],\\ y_1 &= a_2 u + b_2 + \frac{l}{2}[a_2\cos(v+m) - a'_2\sin(v+m)],\\ z_1 &= a_3 u + b_3 + \frac{l}{2}[a_3\cos(v+m) - a'_3\sin(v+m)].\end{aligned}\right.$$

Les coordonnées du point M_2 s'obtiendront en changeant l en $-l$ dans les expressions des coordonnées de M_1.

Les surfaces réglées (M_1) et (M_2) dépendent donc des deux fonctions arbitraires qui définissent la développable (O).