BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Sur la transformation continue

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 136-141
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__136_0>

Sur la transformation continue; par M. E. Lemoine.

A la séance du 15 juillet dernier, j'ai fait connaître ici un mode de transformation des formules du triangle et des théorèmes s'y rapportant, qui me paraît fécond et fort utile; voici de quelle idée cette transformation dérive.

Je suppose qu'un triangle ABC se transforme d'une façon continue par la rotation de CA autour du point C; on aura deux états de la figure :

1° Le point A est au-dessus de CB et y restera jusqu'à ce que, dans le mouvement de CA, il passe à l'infini sur AB.

2° Le point A, CA ayant continué son mouvement de rotation, est au-dessous de CB.

Soit une propriété quelconque de la première figure, propriété générale d'un triangle ABC, je la considère dans sa *continuité* et je vois qu'elle devient *souvent,* dans la deuxième figure, une propriété générale du triangle qui s'exprime autrement que la propriété générale considérée.

En effet, les éléments de ABC (premier état de la figure) changent souvent de nom par rapport à ABC du deuxième état; ainsi, par exemple, ce qui est le cercle inscrit au triangle ABC dans le premier état de la figure devient le cercle ex-inscrit tangent à BC dans le second état, etc.; il suit de là qu'un théorème où entrera le cercle inscrit donnera, par continuité, un autre théorème où entrera le cercle ex-inscrit tangent au côté BC. En étudiant la question, on reconnaît que :

Dans une formule générale relative au triangle, si l'on remplace les quantités a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, S, R, r, r_a, r_b, r_c, A, B, C, ..., *respectivement par* a, $-b$, $-c$, $-(p-a)$, $-p$, $p-c$, $p-b$, $-$S, $-$R, r_a, r, $-r_c$, $-r_b$, $-$A, $\pi-$B, $\pi-$C, ..., *on obtient une nouvelle formule relative au triangle.*

Je dirai que cette nouvelle formule dérive de la première par *transformation continue en* A; il y a évidemment de même les formules obtenues par transformation continue en B et en C.

Le mode de démonstration que nous venons d'indiquer, n'est pas, *si l'on veut une entière rigueur,* sans présenter quelques points assez délicats à propos de la valeur des angles, lorsque le point A a passé à l'infini; il vaut mieux raisonner synthétiquement de la manière suivante; on verra de plus, par cette méthode, que la *transformation continue* n'est qu'un cas particulier, mais celui qui paraît le plus fécond, d'un système de transformation très général.

Toute formule M relative au triangle n'est, au fond, qu'une relation d'identité entre trois angles A, B, C dont la somme est égale à π; car cette formule ne contient que ces angles et des éléments linéaires du triangle qui peuvent s'exprimer tous au moyen de ces angles et d'*un* élément linéaire arbitraire, lequel disparaît de la formule à cause de l'homogénéité.

Dans la formule M, je puis évidemment remplacer les angles A, B, C par trois autres, A', B', C', dont la somme soit π; si je prends pour A', B', C' des fonctions de A, B, C, les éléments du triangle qui entrent dans la formule M deviennent d'autres éléments de ce triangle, et la nouvelle formule M donne une relation entre les nouveaux éléments.

Si je prends pour A', B', C' les angles $-A$, $\pi = B$, $\pi - C$, j'ai la transformation continue en A.

En effet, soit $BC = a$ l'élément linéaire qui reste fixe. La formule

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

donne

$$\frac{a}{\sin(-A)} = \frac{(\text{ce que devient } b)}{\sin(\pi - B)} = \frac{(\text{ce que devient } c)}{\sin(\pi - C)} = (\text{ce que devient } 2R);$$

donc b doit être changé en $-b$, c en $-c$, R en $-R$. La formule

$$S = \tfrac{1}{2} ab \sin C$$

donne

$$(\text{ce que devient S}) = \tfrac{1}{2} a(-b) \sin(\pi - C);$$

donc S doit être changé en $-S$, ...

Mais il est clair que j'aurai également une transformation par chaque système de valeurs que je prendrai pour A', B', C'; si je prends, par exemple, pour A', B', C' les valeurs $180 - A$, $90 - B$,

$90 - C$, avec a pour élément linéaire fixe, on pourra, dans toute formule relative au triangle, changer

$$a, \ b, \ c, \ R, \ S, \ A, \ B, \ C, \ \ldots$$

respectivement en

$$a, \quad 2R\cos B, \quad 2R\cos C, \quad R, \quad 2R^2\cos B\cos C\sin A,$$
$$\pi - A, \quad \frac{\pi}{2} - B, \quad \frac{\pi}{2} - C, \quad \ldots,$$

et l'on aura une nouvelle formule.

Mais ces transformations ne conduisent évidemment pas toutes à des résultats nouveaux simples et élégants, et c'est la transformation continue qui me paraît la plus féconde ; elle montre le lien entre presque toutes les formules connues où entrent des éléments analogues, elle en donne de nouvelles, et, une formule étant établie, cette transformation indique la forme et fournit, sans recherche, la démonstration de formules analogues ; ainsi la distance d entre le centre du cercle inscrit et celle du cercle circonscrit étant donnée par la formule $d^2 = R(R - 2r)$, celle du centre du cercle ex-inscrit o_a et du centre du cercle circonscrit sera

$$d_a^2 = R(R + 2r_a).$$

La distance oo_a étant $\dfrac{a}{\sin\frac{A}{2}}$, une transformation continue en A, reproduirait le même résultat, mais la transformation continue en B donne $\dfrac{a}{\cos\frac{A}{2}}$ pour la distance $o_b o_c$, ...

On démontre facilement :

1° Que, si les coordonnées normales d'un point M sont l, m, n, l, m, n désignant des fonctions des éléments du triangle, le transformé continu en A, M_a de M a pour coordonnées $-l_a$, m_a, n_a, l_a, m_a, n_a désignant ce que deviennent l, m, n quand on y fait la transformation continue en A.

Remarquons qu'un point simplement *marqué* sur le plan n'a pas de transformé continu ; cela ne signifie plus rien, il faut qu'on donne la loi qui lie la position de M aux éléments du triangle et il n'y a pas de construction *générale* pour passer d'un point à son transformé continu, d'une ligne à sa transformée continue.

2° Que, si $f(x, y, z, m, m', m'', \ldots) = 0$ est l'équation d'une ligne, celle de sa transformée continue en A sera

$$f(-x, y, z, m_a, m'_a, m''_a, \ldots) = 0,$$

m_a, m'_a, m''_a désignant ce que deviennent m, m', m'' par transformation continue.

3° Que, si λ, μ, ν sont les coordonnées barycentriques de M, celles de M_a seront λ_a, μ_a, ν_a; que, si

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mu, \mu', \mu'', \ldots) = 0$$

est l'équation, en coordonnées barycentriques, d'une ligne, celle de sa transformée continue sera

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mu_a, \mu'_a, \mu''_a, \ldots) = 0.$$

4° Pour les coordonnées cartésiennes, les coordonnées de M étant X, Y, celles de M_a seront X_a, $-Y_a$; l'équation d'une ligne étant

$$f(X, Y, M, M', M'', \ldots) = 0,$$

celle de sa transformée continue sera

$$f(X, -Y, M_a, M'_a, M''_a, \ldots) = 0.$$

Remarquons encore que, au lieu de partir des angles pour une transformation, on pourrait aussi partir des lignes, et, par exemple, changer dans une formule a, b, c en des fonctions f_1, f_2, f_3 des éléments du triangle, puis déterminer les angles et les autres éléments en fonction de $f_1, f_2, f_3, \ldots$; il faudrait que f_1, f_2, f_3 satisfissent aux conditions

$$f_1 < f_2 + f_3, \qquad f_2 < f_3 + f_1, \qquad f_3 < f_1 + f_2,$$

qui expriment que f_1, f_2, f_3 sont les côtés d'un triangle, mais cette transformation serait *ordinairement* plus compliquée.

Donnons, pour terminer, comme exemple de la transformation continue, quelques formules probablement nouvelles; il y en a de beaucoup plus simples, mais nous les avons déjà publiées ailleurs à propos d'autres sujets; rappelons que, en plus des notations ordinaires, nous désignons les quantités $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$ par δ, δ_a, δ_b, δ_c. La formule

$$\Sigma a(r_b+r_c-r)=2p(2R+r)$$

donne

$$\begin{aligned}&-a(r_b+r_c+r_a)+b(r_b+r_a-r)\\&\qquad\qquad+c(r_c+r_a-r)=2(p-a)(2R-r_a);\end{aligned}$$

$$\Sigma a(r_a-r)(r_b+r_c-2r)=2p(p^2+r^2-10Rr)$$

donne

$$\begin{aligned}&-a(r_a-r)(r_b+r_c-2r_a)\\&+b(r_c+r_a)(2r_a+r_b-r)\\&+c(r_b+r_a)(2r_a+r_c-r)=2(p-a)[(p-a)^2+r_a^2+10Rr_a];\end{aligned}$$

$$\Sigma a(r_b-r)(r_c-r)=4RS$$

donne

$$a(r_a+r_b)(r_a+r_c)-b(r_a-r)(r_a+r_b)-c(r_a-r)(r_a+r_c)=4RS;$$

$$\Sigma a(r_a-r)[(r_b-r)^2+(r_c-r)^2]=4Rp(p^2+r^2-12Rr)$$

donne

$$\begin{aligned}&-a(r_a-r)[(r_a+r_b)^2+(r_a+r_c)^2]\\&+b(r_a+r_c)[(r_a+r_b)^2+(r_a-r)^2]\\&+c(r_a+r_b)[(r_a+r_c)^2+(r_a-r)^2]=4R(p-a)[(p-a)^2+r_a^2+12Rr_a];\end{aligned}$$

$$\Sigma a^2r_br_c=4pS(R+r)$$

donne

$$-a^2r_br_c+b^2rr_b+c^2rr_c=4(p-a)S(R-r_a);$$

$$\Sigma r_a\cos^2 A=\delta-\frac{p^2(R-r)}{R^2}$$

donne

$$-r\cos^2 A+r_c\cos^2 B+r_b\cos^2 C=\delta_a-\frac{(p-a)^2(R+r_a)}{R^2};$$

$$\Sigma bcr_a\cos A=r(5p^2-\delta^2)$$

donne

$$bcr\cos A-car_c\cos B-bar_b\cos C=r_a[5(p-a)^2-\delta_a^2];$$

Appelons H l'orthocentre, O le centre du cercle inscrit, points qui ne changent pas par transformation continue; N, N_a, ... le point de *Nagel* et ses transformés; λ, λ_a, ... le point de *Gergonne* et ses transformés.

$$\overline{H\lambda}^2 = 4R^2 - \frac{8Rp^2(2R-r)}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{H\lambda_a}^2 = 4R^2 - \frac{8R(p-a)^2(2R+r_a)}{\delta_2^a};$$

$$\overline{O\lambda}^2 = R^2 - \frac{4pS(R+r)}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{O\lambda_a}^2 = R^2 + \frac{4(p-a)S(R-r_a)}{\delta_a^2};$$

$$\overline{o\lambda}^2 = r^2 - \frac{3S^2}{\delta^2}$$

donne

$$\overline{o_a\lambda_a}^2 = r_b^2 - \frac{3S^2}{\delta_a^2};$$

$$ON = R - 2r$$

donne

$$ON_a = R + 2r_a;$$

$$\overline{oN}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$$

donne

$$\overline{O_aN_a}^2 = (p-a)^2 + 5r_a^2 + 16Rr_a;$$

$$\overline{N\lambda}^2 = 16R\left[\frac{p^2(R+r)}{\delta^2} - r\right]$$

donne

$$\overline{N_a\lambda_x}^2 = 16R\left[\frac{(p-a)(R-r_a)}{\delta_a^2} + r_a\right], \quad \ldots.$$