BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

Rayon de courbure d’une conique

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 155-160
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__155_0>

Rayon de courbure d'une conique ; par M. A. Mannheim.

(Séance du 7 mai 1890.)

Dans une intéressante Communication, qu'il a faite à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 avril 1890, M. Fouret est revenu sur ce problème :

Déterminer le rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points.

Les curieuses applications qu'il a faites de la solution de cette question en montrent l'intérêt. Ce n'est qu'incidemment, et à propos d'une de ses applications, que j'ai donné jadis une formule (1) résolvant le même problème. Je vais faire connaître aujourd'hui la marche que j'avais suivie pour y arriver. Je déduirai de ma formule celle de M. Fouret et une construction extrêmement simple.

Soient (*fig.* 1) m, a, b, c les points donnés de la conique C et mt la tangente en m à cette conique. Désignons par s et t les points de rencontre de cette tangente avec ba et bc. Appelons u le point de rencontre de ab et de mc.

Menons $s't'$ parallèlement à st et à une distance infiniment petite de cette droite.

En vertu du théorème de Carnot appliqué à la conique C coupée par les côtés du triangle $s'hu$, on a

$$s'e.s'l.hm.hc.ub.ua = s'a.s'b.uc.um.hl.he.$$

Par les points infiniment voisins e, m, l faisons passer une circonférence de cercle qui est alors le cercle osculateur de C pour le point m.

Désignons par i le point où cette circonférence rencontre mc, on a

$$he.hl = hm.hi.$$

Tenant compte de cette égalité et supposant que la droite $s't'$

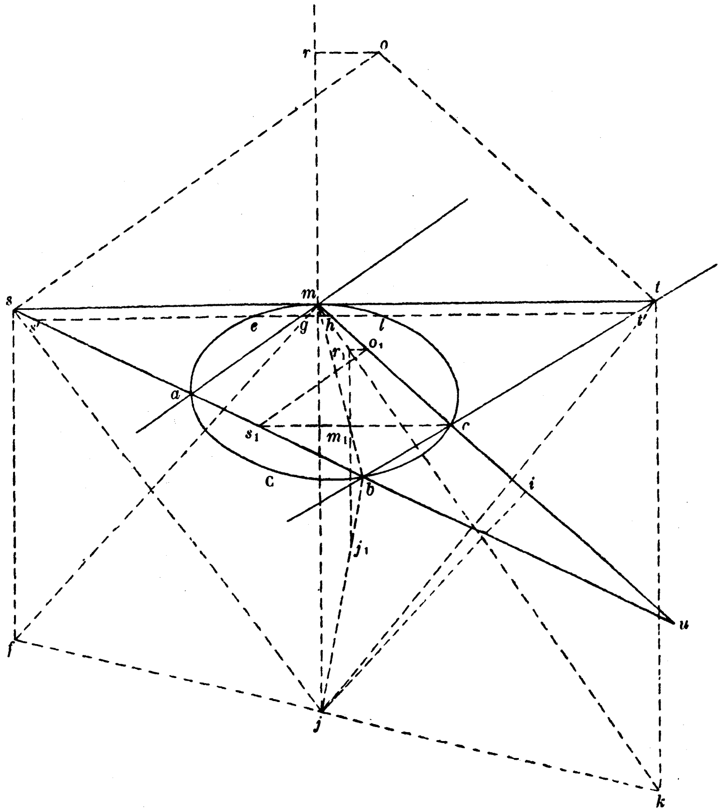
(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Séance du 15 mars 1875.

soit confondue avec st, la relation précédente devient

(1) $$\overline{sm}^{2}.mc.ub.ua = sa.sb.uc.um.mi.$$

Le même triangle $s'hu$ rencontre l'ensemble des droites am, bc

Fig. 1.



et donne, en vertu du théorème de Carnot,

$$s'g.s't'.hm.hc.ub.ua = s'a.s'b.uc.um.hg.ht'.$$

Remplaçant $\frac{hm}{hg}$ par $\frac{\sin sma}{\sin amc}$, et supposant que la droite $s't'$ soit confondue avec st, cette dernière relation devient

(2) $$sm.st \sin sma.mc.ub.ua = sa.sb.uc.um \sin amc.mt.$$

Divisant terme à terme la relation (1) par la relation (2), il vient

$$\frac{1}{mi} = \frac{st}{sm.mt}\,\frac{\sin amt}{\sin amc}.$$

Appelons ρ le rayon de courbure de C en m, on a

$$mi = 2\rho \sin cmt,$$

portant cette valeur dans la relation précédente, on obtient

$$(3)\qquad \frac{1}{2\rho} = \frac{st}{sm.mt}\,\frac{\sin amt \sin cmt}{\sin amc},$$

que l'on peut écrire

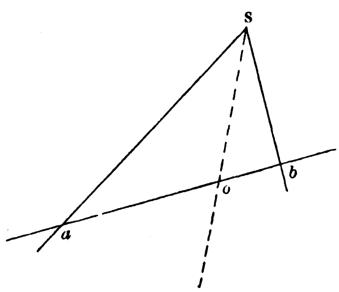
$$(4)\qquad 2\rho = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tang} cmt} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} amt}}{\dfrac{1}{sm} + \dfrac{1}{mt}}.$$

C'est la relation que j'ai donnée en 1875.

Il est facile de transformer cette expression de 2ρ en faisant usage du théorème suivant, que j'ai souvent appliqué et que je considère comme primordial.

On donne (fig. 2) un angle de sommet s et un point o; on

Fig. 2.



mène de ce point une transversale quelconque qui rencontre les côtés de l'angle aux points a et b, quelle que soit cette transversale, on a

$$\left(\frac{1}{ao} + \frac{1}{ob}\right)\frac{1}{\sin.bos} = \text{const. (1).}$$

(1) *Voir* mon *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition, p. 177.

Prenons (*fig.* 1) l'angle abc coupé par les deux transversales st et mu, on a

$$\left(\frac{1}{sm}+\frac{1}{mt}\right)\frac{1}{\sin bmt}=\left(\frac{1}{mc}-\frac{1}{mu}\right)\frac{1}{\sin bmc},$$

ou

$$\frac{1}{sm}+\frac{1}{mt}=\left(\frac{1}{mc}-\frac{1}{mu}\right)\frac{\sin bmt}{\sin bmc}.$$

Portons cette valeur dans la relation (4) et rétablissons les sinus au lieu des tangentes, on a

$$2\rho=\frac{\sin amc \sin bmc}{\sin amt \sin bmt \sin cmt\left(\frac{1}{mc}-\frac{1}{mu}\right)},$$

qui n'est autre que la relation de M. Fouret et d'où il a déduit pour ρ différentes expressions remarquables par leur symétrie.

Construisons 2ρ. Pour cela reprenons la relation (3), que l'on peut écrire

$$2\rho . st=\frac{sm}{\sin cmt}\times\frac{mt}{\sin amt}\sin amc.$$

Élevons au point m la perpendiculaire mf à mc. Cette droite coupe au point f la perpendiculaire sf à st. On a

$$mf=\frac{sm}{\sin mfs}=\frac{sm}{\sin cmt}.$$

De même, en élevant respectivement à ma et mt les perpendiculaires mk et tk, on a

$$mk=\frac{mt}{\sin amt}.$$

La relation précédente peut alors s'écrire

$$2\rho . st=mf.mk \sin amc=mf.mk \sin fmk,$$

puisque les angles amc, fmk sont supplémentaires.

Le deuxième membre de cette égalité donne le double de l'aire du triangle fmk. Comme ce triangle est équivalent à sjt dont le double de l'aire est égal à $st \times mj$, on a alors

$$2\rho . st=st.mj,$$

ainsi

$$2\rho=mj.$$

Il suffit donc de *mener la droite fk pour avoir à sa rencontre avec la normale en m à C le point j qui est l'extrémité du segment mj, dont la longueur est double de celle du rayon de courbure de C en m.*

De là résulte cette propriété : *quelle que soit la position des points a, b, c sur C, les droites telles que fk passent par le même point j.*

Voici comment on peut arriver à une autre construction de 2ρ :

Par les points s et t menons respectivement des parallèles à am et cm ; soit o le point de rencontre de ces droites ; on a

$$st = \frac{\sin sot.ot}{\sin tso} = \frac{\sin amc.ot}{\sin amt}.$$

Mais, en abaissant du point o la perpendiculaire or sur mj, on a

$$mr = ot \sin mto = ot \sin cmt,$$

donc

$$st = \frac{\sin amc.mr}{\sin amt.\sin cmt}.$$

Portant cette valeur de st dans la relation (3), on obtient

$$sm.mt = 2\rho.mr.$$

Ainsi *les points j, s, r, t appartiennent à une même circonférence de cercle.*

D'après cela, *le point j est sur la perpendiculaire abaissée du point s sur la droite qui joint le point m au milieu du segment rt.*

Cette construction, appliquée au cas où l'*on donne le point m d'une hyperbole, la tangente en ce point, un second point o et les directions asymptotiques ma, mc* fait retrouver la construction donnée par M. Fouret (1).

Comme cela arrive souvent, une construction obtenue pour un cas particulier conduit à une construction générale ; c'est, en effet, la construction donnée par M. Fouret pour une hyperbole qui m'a suggéré cette seconde construction de 2ρ pour une conique quelconque.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* Séance du 21 avril 1890.

Comme les points s et t peuvent être trop éloignés, on effectue alors la seconde construction de 2ρ en employant une figure semblable à celle qu'il faudrait tracer.

Par le point c on mène la parallèle cs_1 à la tangente donnée mt. Du point s_1 on mène $s_1 o_1$ parallèlement à am. On obtient m_1 à la rencontre de bm et de cs_1 et r_1 au pied de la perpendiculaire abaissée de o_1 sur la parallèle $m_1 r_1$ à mr. Au moyen des points s_1, r_1, c et m_1, on détermine j_1, comme précédemment on a construit j à l'aide des points s, r, t, m : la droite bj_1 rencontre la normale en m à C au point j.

Le point b est ici, en effet, le centre de similitude de deux figures homothétiques.

Il est inutile de faire remarquer que la relation (3) peut donner lieu à des constructions très diverses du point j et que le rapprochement de ces constructions peut conduire à des propriétés géométriques nouvelles.