BULLETIN DE LA S. M. F.

R. PERRIN

Essai de théorie complète du système de deux formes ternaires quadratiques

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 1-80

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Essai de théorie complète du système de deux formes ternaires quadratiques; par M. R. Perrin.

La théorie du système simultané de deux formes ternaires quadratiques, au point de vue des propriétés des formations invariantes qui s'y rattachent, équivaut à celle des propriétés projectives du système de deux coniques; elle n'est pas d'une moindre utilité lorsqu'on s'occupe des propriétés de toute nature d'une seule conique, puisqu'il suffit alors de particulariser convenablement une des deux formes fondamentales. L'importance de cette théorie est donc incontestable, au point de vue des applications géométriques, et cependant elle ne peut être considérée comme achevée. Si M. Gordan a établi [1] le système complet des formations invariantes distinctes, au nombre de vingt, avec leur expression symbolique; si l'on sait ramener à ces formations celles qui se présentent dans un certain nombre de questions géométriques; si, enfin, on connaît la signification géométrique de l'évanouissement des invariants, ainsi que des covariants principaux et de quelques-unes des expressions composées avec ces

[1] *Voir* Clebsch, *Leçons de Géométrie*, Tome I.

diverses formations, on ignore, d'autre part, quelles relations (syzygies) peuvent exister entre les vingt formations distinctes, et à plus forte raison quelles conclusions peuvent être tirées de telles syzygies; on ne possède pas de formule simple pour passer de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle des courbes covariantes du système, ou inversement, etc. L'objet du présent travail est de contribuer à combler ces lacunes, en adoptant une marche systématique dont j'ai indiqué le principe dans une série de Notes (¹); c'est-à-dire en partant du système de quatre formes binaires (deux linéaires et deux quadratiques) dont les invariants, ainsi que je l'ai montré, fournissent *exclusivement* et *complètement*, par un traitement convenablement dirigé, les sources de toutes les formations invariantes distinctes que possède le système de deux formes ternaires quadratiques. En suivant cette marche, les syzygies qui relient les invariants dans le domaine binaire fournissent *ipso facto* entre les formations ternaires obtenues un égal nombre de syzygies, que l'on peut alors prendre comme point de départ pour en établir de nouvelles.

Entre autres résultats qui ressortiront de cette étude, je signalerai notamment :

1° L'existence d'une symétrie croisée particulièrement simple entre les éléments ponctuels et tangentiels relatifs aux deux coniques fondamentales;

2° La possibilité de représenter *toutes* les formations en employant comme seules variables (lesquelles figurent des coordonnées tantôt ponctuelles, tantôt tangentielles, et quelquefois l'un ou l'autre à volonté dans une même formule) trois covariants mixtes linéo-linéaires (dont l'un est le covariant identique), avec des coefficients où n'entrent que les invariants et les contrevariants, si ces variables spéciales fonctionnent comme coordonnées ponctuelles; que les invariants et les covariants purs, si elles fonctionnent comme coordonnées tangentielles; enfin que les invariants seuls, si elles peuvent fonctionner des deux manières : de telle sorte que ces covariants mixtes jouent dans la théorie dont il s'agit le même rôle que les covariants linéaires dans celle des

---

(¹) *Comptes rendus*, 10, 24 et 31 janvier 1887.

formes binaires d'ordre impair, et y apportent un genre analogue de simplifications;

3° L'existence d'une curieuse formule mixte, doublement symétrique, qui fournit l'équation de tous les groupes possibles de droites ou de points liés symétriquement aux deux coniques par une condition projective donnée, d'ailleurs quelconque; savoir, d'une manière immédiate lorsque ces droites ou ces points sont au nombre de *quatre* seulement, et par l'intermédiaire d'un calcul d'élimination facile, lorsque le nombre en est supérieur à quatre.

Le premier Chapitre de ce travail sera purement algébrique et consacré à établir le système complet des formations ternaires invariantes, avec les syzygies qui les relient, le tout en partant des théories du domaine binaire, comme il a été dit ci-dessus. Dans le second Chapitre, je déduirai des résultats ainsi obtenus un certain nombre de relations nouvelles, dont j'étudierai, chemin faisant, la signification et les applications les plus immédiates au point de vue géométrique.

I.

1. Soient deux formes ternaires quadratiques simultanées

$$s = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy,$$
$$s' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2g'zx + 2h'xy.$$

Proposons-nous tout d'abord d'obtenir le système complet des invariants et covariants purs de ces deux formes.

Il suffira pour cela, ainsi que je l'ai démontré dans le travail cité plus haut : 1° d'effectuer la substitution

$$x = \mathrm{X} - h\mathrm{Y} - g\mathrm{Z}, \qquad y = a\mathrm{Y},$$

ce qui donne pour s et s' les expressions

$$s = a(\mathrm{X}^2 + \mathrm{V}),$$
$$s' = a'(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{UX} + \mathrm{V}'),$$

U, V, V′ étant trois formes binaires aux variables Y, Z (savoir une linéaire U, et deux quadratiques, V et V′); 2° de construire les invariants du système des trois formes binaires simultanées U, V, V′; 3° de combiner ces invariants entre eux et avec a, a', traités comme invariants auxiliaires, de manière à diviser par a le plus possible : les expressions ainsi obtenues qui ne seront plus réductibles par le même procédé à d'autres plus simples, seront, soit des invariants du système ternaire (s, s'), soit des péninvariants purs (coefficients de la plus haute puissance de x dans des covariants purs) de ce système, et fourniront la *totalité* des invariants et péninvariants purs distincts qui lui appartiennent.

Or on a immédiatement

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= (ah' - ha')\mathrm{Y} + (ag' - ga')\mathrm{Z},\\
\mathrm{V} &= (ab - h^2)\mathrm{Y}^2 + 2(af - gh)\mathrm{YZ} + (ac - g^2)\mathrm{Z}^2,\\
\mathrm{V}' &= (a^2b' - 2ahh' + h^2a')\mathrm{Y}^2 + 2(a^2f' - ahg' - agh' + gha')\mathrm{YZ}\\
&\quad + (a^2c' - 2agg' + g^2a')\mathrm{Z}^2,
\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U} &= au' - a'u,\\
\mathrm{V} &= av - u^2,\\
\mathrm{V}' &= a^2v' - 2auu' + a'u^2,
\end{aligned}\right.$$

en désignant par u, u', v, v' les quatre formes binaires suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
u &= h\,\mathrm{Y} + g\,\mathrm{Z},\\
u' &= h'\mathrm{Y} + g'\mathrm{Z},\\
v &= b\,\mathrm{Y}^2 + 2f\,\mathrm{YZ} + c\,\mathrm{Z}^2,\\
v' &= b'\mathrm{Y}^2 + 2f'\mathrm{YZ} + c'\mathrm{Z}^2.
\end{aligned}\right.$$

Il s'agit de former les invariants du système binaire triple $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{V}')$; rien n'empêche de prendre U, V, V′ sous la forme (1), et d'exprimer les invariants cherchés en fonction explicite de a, a', et des invariants du système quadruple (u, u', v, v'). Comme les coefficients des formes u, u', v, v' sont indépendants les uns des autres ainsi que de a, a', ces deux dernières lettres se trouveront mises en évidence, et les calculs ultérieurs en seront notablement simplifiés.

Mais le problème qui consiste à former les invariants du système binaire quadruple (u, u', v, v'), et à exprimer en fonction de ces invariants ceux du système triple $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{V}')$, a été traité et complètement résolu dans un travail antérieur [*Sur le système de quatre formes binaires simultanées, etc.* (*Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. XV, p. 45)]. J'ai établi dans ce Mémoire : 1° que le système quadruple (u, u', v, v') possède

13 invariants, dont les expressions, données par les formules (68) du Mémoire, deviennent, quand on prend pour formes fondamentales celles que définissent les équations (2) ci-dessus :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{c}
\mathrm{A} = bg^2 - 2fgh + ch^2, \qquad \mathrm{A}' = b'g^2 - 2f'gh + c'h^2,\\
\mathrm{C} = bg'^2 - 2fg'h' + ch'^2, \qquad \mathrm{C}' = b'g'^2 - 2fg'h' + c'h'^2,\\
\mathrm{B} = bgg' - f(gh' + hg') + chh',\\
\mathrm{B}' = b'gg' - f'(gh' + hg') + c'hh',\\
\mathrm{D} = bc - f^2, \qquad \mathrm{I} = bc' - 2ff' + cb', \qquad \mathrm{D}' = b'c' - f'^2,\\
\Gamma = h^2(fc' - cf') + gh(cb' - bc') + g^2(bf' - fb'),\\
\Gamma' = h'^2(fc' - cf') + g'h'(cb' - bc') + g'^2(bf' - fb'),\\
\Lambda = hg' - gh',\\
\Lambda' = 2hh'(fc' - cf') + (gh' + hg')(cb' - bc') + 2gg'(bf' - fb').
\end{array}\right.$$

2° Que le système triple (U, V, V′) possède six invariants, dont les expressions en fonction des précédents, données par les formules (72) du Mémoire, deviennent, quand on définit U, V, V′, par les équations (1) ci-dessus :

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{A} = a\,(a^2\mathrm{C} - 2aa'\mathrm{B} + a'^2\mathrm{A} - a\,\Lambda^2),\\
\mathcal{A}' = a^2(a^2\mathrm{C}' - 2aa'\mathrm{B}' + a'^2\mathrm{A}' - a'\Lambda^2),\\
\mathcal{D} = a(a\mathrm{D} - \mathrm{A}),\\
\mathfrak{I} = a[a^2\mathrm{I} - a(\mathrm{A}' + 2\mathrm{B}) + a'\mathrm{A}],\\
\mathcal{D}' = a^2(a^2\mathrm{D}' - 2a\mathrm{B}' + a'\mathrm{A}' - \Lambda^2),\\
\mathcal{G} = a^3[a^2\Gamma' - aa'\Lambda' + a'^2\Gamma + a(\mathrm{B}' - \mathrm{C})\Lambda + a'(\mathrm{B} - \mathrm{A}')\Lambda + \Lambda^3].
\end{array}\right.$$

Ces formules (4) fournissent donc immédiatement une série de six invariants ou péninvariants du système ternaire (s, s'), savoir

$$(5)\qquad \frac{1}{a}\mathcal{A},\quad \frac{1}{a^2}\mathcal{A}',\quad \frac{1}{a}\mathcal{D},\quad \frac{1}{a}\mathfrak{I},\quad \frac{1}{a^2}\mathcal{D}',\quad \frac{1}{a^3}\mathcal{G}.$$

On sait d'ailleurs que, pour un système de formes ternaires respectivement d'ordres n, n', n'', ..., l'ordre du covariant pur ayant pour source un péninvariant donné de poids π et de degrés θ, θ', θ'', ... par rapport aux coefficients des diverses formes, a pour valeur $n\theta + n'\theta' + n''\theta'' + \ldots - \frac{3}{2}\pi$. Pour le système (s, s'), l'ordre du covariant pur ayant pour source un péninvariant donné de degré total θ et de poids π est donc $2\theta - \frac{3}{2}\pi$ (les coefficients a, a', devant d'ailleurs être regardés, pour le calcul de π, comme de poids o ; g, h, g', h', comme de poids 1 ; b, b', c, c', f, f', comme de poids 2). En tenant compte de cette règle et des formules (3) et (4), on trouve dès lors que, des six péninvariants de la série (5), les deux premiers sont les sources des deux covariants biquadratiques, le troisième est un invariant, le quatrième et le cinquième sont les sources de deux covariants quadratiques, le sixième la source d'un covariant cubique. En ce qui concerne l'invariant, il n'y a évidemment aucune réduction ultérieure à chercher ; désignons-le par (D), nous aurons

$$(6) \qquad (\mathrm{D}) = \frac{\mathcal{D}}{a} = a\mathrm{D} - \mathrm{A} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

Pour réduire les autres péninvariants aux formes les plus simples possibles, écrivons la série des résidus des péninvariants (5) pour $a = 0$

$$a'^2\mathrm{A}; \quad a'(a'\mathrm{A}' - \mathrm{A}^2); \quad -\mathrm{A}; \quad a'\mathrm{A}; \quad a'\mathrm{A}' - \mathrm{A}^2; \quad a'^2\Gamma + a'(\mathrm{B} - \mathrm{A}')\mathrm{A} + \mathrm{A}^3;$$

A l'inspection de ces résidus, on aperçoit qu'il suffit d'ajouter au premier et au quatrième péninvariant le troisième multiplié par a'^2 et a', et au second le cinquième multiplié par $-a'$, pour pouvoir diviser par a ; la série (5) peut donc être remplacée par la série plus simple

$$(7) \qquad \frac{\mathcal{A} + a'^2\mathcal{D}}{a^2}, \quad \frac{\mathcal{A}' - a'\mathcal{D}'}{a^4}, \quad \frac{\mathcal{D}}{a}, \quad \frac{\mathcal{J} + a'\mathcal{D}}{a^2}, \quad \frac{\mathcal{D}'}{a^2}, \quad \frac{\mathcal{G}}{a^3}.$$

La seconde de ces expressions (7) fournit un invariant symétrique de (D), et que j'appellerai (D'),

$$(8) \quad (\mathrm{D}') = \frac{a'\mathcal{D}' - \mathcal{A}'}{a^4} = a'\mathrm{D}' - \mathrm{C}' = a'b'c' + 2f'g'h' - a'f'^2 - b'g'^2 - c'h'^2.$$

La quatrième fournit aussi un invariant, que je désignerai par (I), savoir

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathrm{I}) &= \frac{\mathcal{J} + a'\mathcal{D}}{a^2} = a\mathrm{I} + a'\mathrm{D} - \mathrm{A}' - 2\mathrm{B} \\ &= a'(bc - f^2) + b'(ac - g^2) + c'(ab - h^2) \\ &\quad + 2f'(gh - af) + 2g'(fh - bg) + 2h'(fg - ch). \end{aligned} \right.$$

La première et la cinquième fourniraient des sources de covariants quadratiques ; mais, comme leurs résidus pour $a = 0$ sont respectivement $a'^2 D - 2a'B - \Lambda^2$, $a'\mathrm{A}' - \Lambda^2$, il est évidemment possible de les combiner entre elles et avec la quatrième (dont le résidu est $a'D - \mathrm{A}' - 2B$), de manière à pouvoir diviser encore une fois par a : on obtient ainsi, à la place d'un de ces deux covariants quadratiques, un invariant, savoir le symétrique de l'invariant (I) trouvé ci-dessus

$$(10) \quad (\mathrm{I}') = \frac{\mathfrak{D}' + a'\mathfrak{J} - \mathcal{A}}{a^3} = a'\mathrm{I} + a\mathrm{D}' - \mathrm{C} - 2\mathrm{B}' = a(b'c' - f'^2) + \ldots.$$

Il reste une source de covariant quadratique ; on peut lui donner, en combinant convenablement la première et la quatrième des expressions (7), une forme symétrique par rapport aux coefficients de s et s', et l'écrire

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} w_0 &= \frac{a'\mathfrak{J} - \mathcal{A}}{a^2} = aa'\mathrm{I} - a\mathrm{C} - a'\mathrm{A}' + \Lambda^2 \\ &= (ac - g^2)(a'b' - h'^2) + (ab - h^2)(a'c' - g'^2) \\ &\qquad - 2(gh - af)(g'h' - a'f'). \end{aligned} \right.$$

w_0 sera la source d'un covariant quadratique w.

Je désignerai enfin par t le covariant cubique irréductible qui a pour source $\frac{1}{a^3}\mathcal{G}$; on aura donc

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{a_3}\mathcal{G} = a^2\Gamma' - aa'\Lambda' + a'^2\Gamma + a(\mathrm{B}' - \mathrm{C})\Lambda + a'(\mathrm{B} - \mathrm{A}')\Lambda + \Lambda^3 \\ &= (hg' - gh')^3 + (hg' - gh')(ag' - ga')(gb' - bg' + fh' - hf') \\ &\quad + (bf' - fb')(ag' - ga')^2 \\ &\quad + (hg' - gh')(ah' - ha')(hc' - ch' + fg' - gf') \\ &\quad + (fc' - cf')(ah' - ha')^2 + (cb' - bc')(ah' - ha')(ag' - ga'). \end{aligned} \right.$$

Les résidus, pour $a = 0$, des six invariants ou péninvariants définis par les formules (6), (8), (9), (10), (11) et (12) sont respectivement

$$-\mathrm{A}, \quad a'\mathrm{D}' - \mathrm{C}', \quad a'\mathrm{D} - \mathrm{A}' - 2\mathrm{B}, \quad a'\mathrm{I} - \mathrm{C} - 2\mathrm{B}', \quad \Lambda^2 - a'\mathrm{A}',$$
$$\Lambda^3 + a'(\mathrm{B} - \mathrm{A}')\Lambda + a'^2\Gamma.$$

Admettons pour un instant que le système (s, s') possède des invariants ou des péninvariants purs distincts des six déjà trouvés. On devra dès lors pouvoir former des fonctions des six résidus écrits ci-dessus, qui s'évanouissent identiquement lorsqu'on y remplace les invariants binaires par leurs valeurs (3); et, si l'on suppose ces fonctions ordonnées par rapport à a', le coefficient de chacune des puissances de a' devra s'évanouir séparément, soit identiquement par rapport aux invariants binaires qui y entrent, soit en vertu des syzygies qui relient ces invariants (syzygies qui sont au nombre de vingt, comme je l'ai montré dans le Mémoire cité plus haut). Considérons en particulier le terme indépendant de a' : il devra exister, toujours dans l'hypothèse admise, des fonctions de quelques-uns au moins des invariants binaires

$$A,\quad C',\quad A'+2B,\quad C+2B',\quad \Lambda^2,\quad \Lambda^3,$$

qui se réduisent à des identités ou s'évanouissent en vertu de syzygies. La seule identité possible est évidemment

$$(\Lambda^3)^2-(\Lambda^2)^3=0\,;$$

et en effet nous verrons tout à l'heure que $t_0^2-w_0^3$ peut s'exprimer en fonction des autres péninvariants, mais sans avoir besoin d'introduire des formations nouvelles. Quant à former des syzygies entre les six quantités écrites ci-dessus, on vérifie sans peine, en se reportant aux syzygies données dans le Mémoire précité (et que j'aurai d'ailleurs occasion de reproduire plus loin *in extenso*) [1], que la chose n'est pas possible. Le système ternaire (s, s') ne possède donc pas d'autres invariants ou covariants purs distincts que ceux que nous avons obtenus, savoir :

1° Les quatre invariants (D), (I), (I'), (D'), dont les degrés par rapport aux coefficients de s et s' sont respectivement (3,0), (2,1), (1,2), (0,3); je les écrirai désormais D, I, I', D', les invariants binaires précédemment désignés par ces lettres ne devant plus reparaître dans la suite de ce travail;

2° Le covariant quadratique w, de degré (2,2);

3° Le covariant cubique t, de degré (3,3).

J'ai dit que $t_0^2-w_0^3$ peut s'exprimer en fonction des péninvariants du système. En effet, les six invariants binaires $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}$,

---

[1] Formules (32).

$\mathcal{D}'$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{G}$, sont liés (*voir* le Mémoire déjà cité) par une syzygie et une seule, savoir

$$\mathcal{G}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}'\mathcal{I} - \mathcal{A}^2\mathcal{D}' - \mathcal{A}'^2\mathcal{D}.$$

Or, des formules (6), (9), (11), (10), (8), (12), on tire successivement

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= a\mathrm{D},\\
\mathcal{I} &= a^2\mathrm{I} - a'\mathcal{D} = a(a\mathrm{I} - a'\mathrm{D}),\\
\mathcal{A} &= a'\mathcal{I} - a^2 w_0 = a(aa'\mathrm{I} - a'^2\mathrm{D} - a w_0),\\
\mathcal{D}' &= a^3\mathrm{I}' + \mathcal{A} - a'\mathcal{I} = a^2(a\mathrm{I}' - w_0),\\
\mathcal{A}' &= a'\mathcal{D}' - a^4\mathrm{D}' = a^2(aa'\mathrm{I}' - a'w_0 - a^2\mathrm{D}'),\\
\mathcal{G} &= a^3 t_0.
\end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans la syzygie binaire, on trouve, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}
t_0^2 = w_0^3 &- (a\mathrm{I}' + a'\mathrm{I})w_0^2 + [a^2\mathrm{ID}' + aa'(\mathrm{II}' - 3\mathrm{DD}') + a'^2\mathrm{I}'\mathrm{D}]w_0\\
&- a^3\mathrm{DD}'^2 + a^2a'\mathrm{D}'(2\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2) + aa'^2\mathrm{D}(2\mathrm{ID}' - \mathrm{I}'^2) - a'^3\mathrm{D}^2\mathrm{D}'.
\end{aligned}$$

De cette relation entre les péninvariants et invariants ternaires, on conclut immédiatement qu'il existe entre les invariants et covariants purs du système (s, s') la syzygie suivante :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
t^2 = w^3 &- (\mathrm{I}'s + \mathrm{I}s')w^2 + [\mathrm{ID}'s^2 + (\mathrm{II}' - 3\mathrm{DD}')ss' + \mathrm{I}'\mathrm{D}s'^2]w\\
&- \mathrm{DD}'^2s^3 + \mathrm{D}'(2\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2)s^2s' + \mathrm{D}(2\mathrm{ID}' - \mathrm{I}'^2)ss'^2 - \mathrm{D}^2\mathrm{D}'s'^3.
\end{aligned}\right.$$

Cette syzygie, d'ailleurs bien connue, est la seule qui relie ces formations, puisque les invariants binaires dont elles dérivent n'étaient liés eux-mêmes que par une seule syzygie : elle est bien de la forme prévue plus haut d'après la considération des résidus.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir n'ont évidemment rien de neuf; mais il était utile, ne fût-ce que pour légitimer plus complètement la méthode employée dans tout le cours de ce travail, de montrer comment cette méthode permet d'y arriver en utilisant exclusivement les données fournies par les théories du domaine binaire, sans faire intervenir aucune considération de variables ternaires contragrédientes.

2. Occupons-nous maintenant de la recherche des contrevariants et des covariants mixtes appartenant au système (s, s').

Nous avons, pour cela, d'après les principes rappelés au début de ce travail, à adjoindre aux trois formes binaires U, V, V', définies par les formules (1), une quatrième forme, savoir

$$(14) \qquad U' = (a\eta - h\xi)Y + (a\zeta - g\xi)Z,$$

où ξ, η, ζ sont trois variables contragrédientes à x, y, z; à former les invariants communs à la forme U', traitée comme si ses coefficients étaient des constantes, et au système (U, V, V'); enfin, à combiner ces invariants entre eux et avec a, a', ξ, traités comme invariants auxiliaires, de manière à diviser par a le plus possible : toutes les expressions ainsi obtenues, qui ne seront plus réductibles par le même procédé à d'autres plus simples, seront soit des contrevariants, soit des sources de covariants mixtes du système (s, s'), et fourniront la *totalité* des contrevariants et péninvariants mixtes distincts que possède ce système.

Ainsi qu'il a été dit plus haut, le système binaire (U, U', V, V') possède treize invariants, dont six, où n'entrent pas les coefficients de U', ont déjà été écrits [formules (4)], et ont servi à trouver les invariants et péninvariants purs du système ternaire (s, s'). Les sept autres sont les analogues, pour le système ternaire (U, U', V, V'), de ceux que j'ai appelés B, B', C, C', Γ', Λ, Λ' [formules (3)], pour le système (u, u', v, v') : je les désignerai respectivement par les lettres $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$: et je les calculerai successivement au moyen des formules (68) du Mémoire déjà cité, en faisant simplement dans ces formules

$$\begin{aligned}
a_0 &= ah' - ha', & a'_0 &= a\eta - h\xi,\\
a_1 &= ag' - ga' & a'_1 &= a\zeta - g\xi,\\
b_0 &= ab - h^2, & b'_0 &= a^2b' - 2ahh' + h^2a',\\
b_1 &= af - gh, & b'_1 &= a^2f' - a(gh' + hg') + gha',\\
b_2 &= ac - g^2, & b'_2 &= a^2c' - 2agg' + g^2a'.
\end{aligned}$$

Il est avantageux, dans ces calculs, de prendre a comme lettre ordonnatrice, afin d'apercevoir immédiatement les réductions possibles, et de calculer au préalable les quatre quantités auxiliaires

$$\begin{aligned}
\theta &= a_0a'_1 + a_1a'_0, & \lambda &= b_2b'_0 - b_0b'_2,\\
\lambda' &= b_1b'_2 - b_2b'_1, & \lambda'' &= b_0b'_1 - b_1b'_0.
\end{aligned}$$

dont l'introduction permet d'écrire ainsi les expressions des sept invariants à calculer

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= a_1 a'_1 b_0 + a_0 a'_0 b_2 - \theta b_1,\\
\mathcal{B}' &= a_1 a'_1 b'_0 + a_0 a'_0 b'_2 - \theta b'_1,\\
\mathcal{C} &= a'^2_1 b_0 - 2 a'_0 a'_1 b_1 + a'^2_0 b_2,\\
\mathcal{C}' &= a'^2_1 b'_0 - 2 a'_0 a'_1 b'_1 + a'^2_0 b'_2,\\
\mathcal{G}' &= a'^2_0 \lambda' + a'_0 a'_1 \lambda + a'^2_1 \lambda'',\\
\mathcal{L} &= a_0 a'_1 - a_1 a'_0,\\
\mathcal{L}' &= 2 a_0 a'_0 \lambda' + \theta\lambda + 2 a_1 a'_1 \lambda''.
\end{aligned}
$$

Je poserai, en outre, pour abréger l'écriture

$$
(15) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A &= bc - f^2, & F &= gh - af,\\
B &= ac - g^2, & G &= fh - bg,\\
C &= ab - h^2, & H &= fg - ch;
\end{aligned}
\right.
$$

et de même A′, B′, C′, F′, G′, H′, avec les lettres accentuées ; ce qui permet d'écrire ainsi les invariants et péninvariants déjà trouvés

$$
(16) \qquad \left\{
\begin{aligned}
D &= Aa + Gg + Hh = Bb + Ff + Hh = Cc + Gg + Ff,\\
I &= Aa' + Bb' + Cc' + 2Ff' + 2Gg' + 2Hh',\\
w_0 &= BC' + CB' - 2FF',\\
t_0 &= (B'h + H'a + F'g)(Cg' + Fh' + Ga')\\
&\quad - (Bh' + Ha' + Fg')(C'g + F'h + G'a),
\end{aligned}
\right.
$$

et d'écrire les identités

$$
(17) \qquad \left\{
\begin{aligned}
Ag + Gc + Hf &= 0, & Ah + Gf + Hb &= 0,\\
Bf + Fc + Hg &= 0, & Bh + Fg + Ha &= 0,\\
Cf + Fb + Gg &= 0, & Cg + Fh + Ga &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

ainsi que celles qui s'en déduisent en accentuant toutes les lettres.

Il convient enfin de rappeler qu'étant donné un péninvariant mixte du système (s, s'), de degré total θ par rapport aux coefficients de s et de s', de classe θ' (degré par rapport aux variables ξ, η, ζ), et de poids π par rapport à x (en considérant ξ comme de poids o, η et ζ comme de poids 1), l'ordre du covariant mixte correspondant sera $2\theta + \theta' - \frac{3}{2}\pi$.

Cela posé, calculons d'abord l'invariant le plus simple, $\mathfrak{L}$. On trouve

$$\mathfrak{L} = a[a(h'\zeta - g'\eta) + (hg' - gh')\xi + a'(g\eta - h\zeta],$$

$\frac{1}{a}\mathfrak{L}$ est donc la source d'un covariant mixte de classe 1, que la règle rappelée ci-dessus nous apprend être du second ordre en x, y, z. Je le désignerai par δ; sa source δ_0 s'écrira plus symétriquement

$$(18) \qquad \delta_0 = \frac{\mathfrak{L}}{a} = (hg' - gh')\xi + (ga' - ag')\eta + (ah' - ha')\zeta.$$

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{M}$ donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = a\Big\{ & a^2[ch' - fg')\eta + (bg' - fh')\zeta] \\ & + a[(Hh' + Gg')\xi + Ha'\eta + Ga'\zeta + (hg' - gh')(g\eta - h\zeta)] \\ & + a'\xi(bg^2 + ch^2 - 2fgh)\Big\}.\end{aligned}$$

Si l'on ajoute au péninvariant mixte $\frac{1}{a}\mathfrak{M}$ le péninvariant mixte composé $a'\xi D$, il est clair qu'on pourra diviser par a, et remplacer $\frac{1}{a}\mathfrak{M}$ par un péninvariant plus simple, que je désignerai par α_0, et dont l'expression est

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{a^2}(\mathfrak{M} + aa'\xi D) \\ &= (Aa' + Gg' + Hh')\xi + (Ha' + Fg' + Bh')\eta \\ &\quad + (Ga' + Cg' + Fh')\zeta.\end{aligned}\right.$$

Ce péninvariant étant de degré (2, 1), de classe 1 et de poids 4, le covariant mixte correspondant α est linéaire en x, y, z, comme en ξ, η, ζ.

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{S}$ donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} = a\Big\{ & a^2(b\zeta^2 - 2f\eta\zeta + c\eta^2) + a[2G\xi\zeta + 2H\xi\eta - (g\eta - h\zeta)^2] \\ & + (bg^2 + ch^2 - 2fgh)\xi^2\Big\}.\end{aligned}$$

En ajoutant au péninvariant mixte $\frac{1}{a}\mathfrak{S}$ le péninvariant mixte composé $D\xi^2$, on pourra évidemment diviser encore par a, ce qui donnera un péninvariant mixte plus simple, de degré (2, o), de classe 2, de poids 4, et correspondant, par suite, à un covariant d'ordre o en x, y, z ; ce sera donc un contrevariant, que je désignerai par σ, savoir

$$(20)\qquad \sigma = \frac{\mathfrak{C} + a\mathrm{D}\xi^2}{a^2} = \mathrm{A}\xi^2 + \mathrm{B}\eta^2 + \mathrm{C}\zeta^2 + 2\mathrm{F}\eta\zeta + 2\mathrm{G}\xi\zeta + 2\mathrm{H}\xi\eta.$$

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{B}'$ donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}' = a^2 \Big\{ -a^2(\mathrm{H}'\eta + \mathrm{G}'\zeta) + a[(\mathrm{G}'g + \mathrm{H}'h)\xi - (\mathrm{F}'g + \mathrm{B}'h)\eta - (\mathrm{F}'h + \mathrm{C}'g)\zeta] \\ + \xi(\mathrm{C}'g^2 + \mathrm{B}'h^2 + 2\mathrm{F}'gh)\Big\}.\end{aligned}$$

Si l'on ajoute au péninvariant mixte $\frac{1}{a^2}\mathfrak{B}'$ le péninvariant mixte composé $\xi\varpi_0$, on pourra évidemment diviser encore par a, ce qui donnera un péninvariant mixte de degré (1, 2), classe 1, de poids 4, et, par conséquent, un covariant mixte linéaire en x, y, z comme en ξ, η, ζ. Pour que l'expression de ce péninvariant corresponde exactement à α_0 [formule (19)] par simple permutation des accents, il suffit, comme on le vérifie sans peine, de le prendre en signe contraire et d'ajouter le péninvariant composé $\mathrm{I}'\xi$. On peut donc poser

$$\begin{aligned}(21)\qquad \alpha'_0 &= \mathrm{I}'\xi - \frac{\mathfrak{B}' + a^2\varpi_0\xi}{a^3} \\ &= (\mathrm{A}'a + \mathrm{G}'g + \mathrm{H}'h)\xi + (\mathrm{H}'a + \mathrm{F}'g + \mathrm{B}'h)\eta + (\mathrm{G}'a + \mathrm{C}'g + \mathrm{F}'h)\zeta;\end{aligned}$$

α' sera un covariant mixte linéo-linéaire, symétrique de α.

Le calcul de l'invariant $\mathfrak{C}'$ donne

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}' = a^2\Big\{ a^2(c'\eta^2 - 2f'\eta\zeta + b'\zeta^2) + 2a[(gf' - hc')\xi\eta + (hf' - gb')\xi\zeta - (g\eta - h\zeta)(g'\eta - h'\zeta)] \\ + (g^2b' - 2ghf' + h^2c')\xi^2 + 2(gh' - hg')(h\zeta - g\eta)\xi + a'(g\eta - h\zeta)^2\Big\}.\end{aligned}$$

Pour simplifier le péninvariant mixte fourni par $\frac{1}{a^2}\mathfrak{C}'$, on peut tout d'abord y ajouter $a'\sigma$, ce qui rend tous les termes divisibles soit par a, soit par ξ; puis ajouter le péninvariant composé $-2\alpha_0\xi$, ce qui ne laisse subsister que des termes divisibles par a ou par ξ^2. Le coefficient de ξ^2 devenant ainsi

$$b'g^2 + c'h^2 - 2f'gh - \mathrm{A}a' - 2\mathrm{G}g' - 2\mathrm{H}h',$$

on voit, en se reportant à la formule (9), qu'il suffit d'ajouter encore $\mathrm{I}\xi^2$ pour ne plus laisser subsister que des termes divisibles par a. Effectuant la division, on arrive à un péninvariant de degré (1, 1), de classe 2, de poids 4, correspondant, par suite, à un covariant mixte d'ordre 0 ; c'est donc un contrevariant de classe 2, que je désignerai par φ. On trouve, pour son expression qui est symétrique par rapport aux coefficients de s et de s',

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Theta' + a^2(a'\sigma - 2\alpha_0\xi + \mathrm{I}\xi^2)}{a^3} \\ &= [(bc' + cb' - 2ff')\xi^2 + (ca' + ac' - 2gg')\eta^2 \\ &\quad + (ba' + ab' - 2hh')\zeta^2 + 2(gh' + hg' - af' - fa')\eta\zeta \\ &\quad + 2(fg' + gf' - ch' - hc')\xi\eta + 2(fh' + hf' - bg' - gb')\xi\zeta]. \end{aligned}\right.$$

Le calcul de l'invariant $\mathcal{G}'$ donne

$$\begin{aligned} \mathcal{G}' = a^2 \Big\{ & a^3[(fc' - cf')\eta^2 + (cb' - bc')\eta\zeta + (bf' - fb')\zeta^2] \\ & + a^2[(cgh' + chg' + g^2f' - ghc' - 2fgg')\eta^2 \\ & \qquad + (h^2c' - g^2b' + 2bgg' - 2chh')\eta\zeta \\ & \qquad + (ghb' + 2fhh' - bgh' - bhg' - h^2f')\zeta^2 \\ & \qquad + (2chf' - 2fhc' + bgc' - cgb')\xi\eta \\ & \qquad\qquad + (2fgb' - 2bgf' + bhc' - chb')\xi\zeta] \\ & + a[(fh^2c' - ch^2f' + cghb' - bghc' + bg^2f' - fg^2b')\xi^2 \\ & \qquad + (fg^2a' - cgha' + g^2hg' - g^3h')\eta^2 \\ & \qquad + (bgha' - fh^2a' + h^3g' - gh^2h')\zeta^2 \\ & \qquad + (gh^2c' + g^3b' - 2bg^2g' - 2ch^2g' - 2g^2hf' + 4fghg')\xi\eta \\ & \qquad + (2bg^2h' + 2gh^2f' + 2ch^2h' - g^2hb' - h^3c' - 4fghh')\xi\zeta \\ & \qquad\qquad + (ch^2a' - bg^2a' + 2g^2hh' - 2gh^2g')\eta\zeta] \\ & + (hg' - gh')(bg^2 + ch^2 - 2fgh)\xi^2 + a'\xi(bg^2 + ch^2 - 2fgh)(g\eta - h\xi) \Big\}. \end{aligned}$$

A l'inspection des termes de $\frac{1}{a^2}\mathcal{G}'$, qui ne sont pas divisibles par a, on voit immédiatement qu'il suffit d'ajouter le péninvariant $\mathrm{D}\delta_0\xi$, pour les faire disparaître en totalité. Divisant alors par a, on obtient un péninvariant de degré (3, 1), de classe 2, de poids 6, correspondant, par conséquent, à un covariant mixte linéaire en x, y, z. Comme il n'est pas possible de construire, avec les formations déjà trouvées, un péninvariant composé de même degré et de même classe, il est inutile de chercher une réduction plus complète. Je désignerai donc par β le covariant mixte linéaire dont il s'agit; sa source β_0 aura pour expression, tous calculs faits,

$$
(23)\left\{\begin{aligned}
\beta_0 = {} & \frac{\mathcal{G}' + a^2 \mathrm{D}\delta_0 \xi}{a^3} \\
= {} & \big\{ [\mathrm{A}(hg' - gh') + \mathrm{G}(hc' - gf') + \mathrm{H}(hf' - gb')]\xi^2 \\
& + [\mathrm{B}(gh' - af') + \mathrm{F}(gg' - ac') + \mathrm{H}(ga' - ag')]\eta^2 \\
& + [\mathrm{C}(af' - hg') + \mathrm{F}(ab' - hh') + \mathrm{G}(ah' - ha')]\zeta^2 \\
& + [\mathrm{B}(ab' + ba' - 2hh') - \mathrm{C}(ac' + ca' - 2gg')]\eta\zeta \\
& + [\mathrm{B}(hf' - gb') + \mathrm{A}(ga' - ag') + \mathrm{G}(gg' - ac') \\
& \qquad + \mathrm{H}(hg' - af') + \mathrm{F}(hc' - gf')]\xi\eta \\
& + [\mathrm{C}(hc' - gf') + \mathrm{A}(ah' - ha') + \mathrm{H}(ab' - hh') \\
& \qquad + \mathrm{G}(af' - hg') + \mathrm{F}(hf' - gb')]\xi\zeta.
\end{aligned}\right.
$$

Enfin le calcul de l'invariant $\mathcal{L}'$ donne

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' = a^2 \big(& a^3[(cb'g' - bc'g' + 2fc'h' - 2cf'h')\eta \\
& \qquad + (cb'h' - bc'h' + 2bf'g' - 2fb'g')\zeta] \\
& + a^2 \big\{ (bhc'g' - cgb'h' + bgc'h' - 2fhc'h' \\
& \qquad + 2chf'h' - chb'g' + 2fgb'g' - 2bgf'g')\xi \\
& \quad + [cg(2h'^2 - a'b') + bg(2g'^2 + a'c') - 2fha'c' + 2cha'f' \\
& \qquad + h^2c'g' - 2ghc'h' - 4fgg'h' + g^2(2f'h' - b'g')]\eta \\
& \quad + [bh(a'c' - 2g'^2) - ch(a'b' + 2h'^2) + 2fga'b' - 2bga'f' \\
& \qquad + h^2(c'h' - 2f'g') - g^2b'h' + 2ghb'g' + 4fhg'h']\zeta \big\}. \\
& + a \big\{ [-2\mathrm{H}ga'b' + 2\mathrm{G}ha'c' + 2(bg^2 - ch^2)a'f' - g^2h(b'g' + 2f'h') \\
& \qquad + gh^2(c'h' + 2f'g') + g^3b'h' - h^3c'g']\xi \\
& \quad + [2\mathrm{H}ga'h' + g^3(a'b' - 2h'^2) + gh^2(a'c' - 2g'^2) \\
& \qquad + (4fgh - ch^2 - 3bg^2)a'g' + 2g^2h(2g'h' - a'f')]\eta \\
& \quad + [-2\mathrm{G}ha'g' + h^3(2g'^2 - a'c') + g^2h(2h'^2 - a'b') \\
& \qquad + (bg^2 + 3ch^2 - 4fgh)a'h' + 2gh^2(a'f' - 2g'h')]\zeta \big\} \\
& \qquad + a'(ch^2 + bg^2 - 2fgh)[(hg' - gh')\xi + ga'\eta - ha'\zeta] \big).
\end{aligned}
$$

A l'inspection de cette formule, on voit immédiatement qu'en ajoutant au péninvariant $\frac{\mathcal{L}'}{a^2}$ le péninvariant composé $\mathrm{D}a'\delta_0$, le résultat sera divisible par a, ce qui donnera un péninvariant mixte de degré (3, 2), de classe 1, de poids 6, correspondant, par suite, à un covariant mixte d'ordre 2 en x, y, z. Pour obtenir une expression plus simple, j'ajouterai encore $-\mathrm{I}\delta_0$, ce qui permettra de diviser par 2. Désignant ce nouveau covariant mixte par ε, nous aurons, pour l'expression de sa source ε_0, tous calculs faits,

$$
(24)\left\{\begin{aligned}
\varepsilon_0 = \frac{\mathcal{L}' + \mathrm{D}a^2a'\delta_0 - \mathrm{I}a^3\delta_0}{2a^3} = {} & [(\mathrm{H}'a + \mathrm{F}'g + \mathrm{B}'h)(\mathrm{G}\xi + \mathrm{F}\eta + \mathrm{C}\zeta) \\
& - (\mathrm{G}'a + \mathrm{C}'g + \mathrm{F}'h)(\mathrm{H}\xi + \mathrm{B}\eta + \mathrm{F}\zeta)].
\end{aligned}\right.
$$

3. En résumé, les treize invariants du système binaire (U, U', V, V') nous ont fourni, pour le système ternaire (s, s'), quatre invariants, deux covariants purs, deux contrevariants et cinq covariants mixtes. Les sept dernières de ces formations se répartissent comme suit, au point de vue de leur degré, classe et ordre respectifs :

		Degré par rapport aux coefficients de s.	Degré par rapport aux coefficients de s'.	Classe.	Ordre.
Contrevariants	σ	2	0	2	0
	φ	1	1	2	0
Covariants mixtes ...	α	2	1	1	1
	α'	1	2	1	1
	β	3	1	2	1
	δ	1	1	1	2
	ε	3	2	1	2

Il ressort immédiatement de ce tableau que le système des contrevariants et des covariants mixtes n'est pas encore complet : car le contrevariant σ et les covariants mixtes β, ε, ne sont pas symétriques par rapport à s et s', et leurs symétriques, que nous pouvons désigner d'avance par σ', β', ε', ne figurent pas dans le tableau. Nous devons donc nous attendre, en poursuivant l'application de notre méthode, c'est-à-dire en combinant convenablement entre elles les formations déjà trouvées, en vue de diviser le plus possible par a, à rencontrer *au moins* les trois formations nouvelles σ', β', ε', reliées chacune aux formations antérieures par une syzygie qui sera la traduction immédiate de la combinaison qui leur aura donné naissance. C'est la recherche que nous allons maintenant aborder.

Pour cela, écrivons, en les distinguant par un astérisque, les résidus pour $a = 0$ des invariants, contrevariants et péninvariants obtenus jusqu'ici :

$$\begin{aligned}
{}^*D &= Gg + Hh,\\
{}^*I &= Aa' + 2Gg' + 2Hh' - (b'g^2 + c'h^2 - 2f'gh),\\
{}^*I' &= B'b + C'c + 2F'f + 2G'g + 2H'h,\\
{}^*D' &= A'a' + G'g' + H'h',\\
{}^*w_0 &= -(C'g^2 + 2F'gh + B'h^2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{\star}t_0 &= a'^2[g^2(bf'-fb')+gh(cb'-bc')+h^2(fc'-cf')]+(hg'-gh')^3\\
&\quad +a'(hg'-gh')(bgg'+chh'+2ghf'-g^2b'-h^2c'-fgh'-fhg'),\\
{}^{\star}\delta_0 &= (hg'-gh')\xi+a'(g\eta-h\zeta),\\
{}^{\star}\alpha_0 &= a'(A\xi+H\eta+G\zeta)+(Gg'+Hh')\xi+(hg'-gh')(g\eta-h\zeta),\\
{}^{\star}\sigma &= A\xi^2+2G\xi\zeta+2H\xi\eta-(g\eta-h\zeta)^2,\\
{}^{\star}\alpha'_0 &= (G'g+H'h)\xi+(F'g+B'h)\eta+(C'g+F'h)\zeta,\\
{}^{\star}\varphi &= (bc'+cb'-2ff')\xi^2+a'(c\eta^2-2f\eta\zeta+b\zeta^2)-2(g\eta-h\zeta)(g'\eta-h'\zeta)\\
&\quad +2(fg'+gf'-hc'-ch')\xi\eta+2(fh'+hf'-bg'-gb')\xi\zeta,\\
{}^{\star}\beta_0 &= \xi^2[A(hg'-gh')+H(hf'-gb')+G(hc'-gf')]+(hg'-gh')(g\eta-h\zeta)^2\\
&\quad +a'[Hg\eta^2-Gh\zeta^2+(Gg-Hh)\eta\zeta+A\xi(g\eta-h\zeta)]\\
&\quad +\xi\eta[h^2(gc'-cg')+g^2(gb'-bg')+2gh(fg'-gf')]\\
&\quad +\xi\zeta[h^2(ch'-hc')+g^2(bh'-hb')+2gh(hf'-fh')],\\
{}^{\star}\varepsilon &= (F'g+B'h)[G\xi+h(g\eta-h\zeta)]-(C'g+F'h)[H\xi-g(g\eta-h\zeta)].
\end{aligned}
$$

En examinant ces expressions, on remarque tout d'abord que, dans le produit ${}^{\star}\delta_0{}^{\star}\alpha_0$, les coefficients de η^2, $\eta\zeta$, ζ^2 ne diffèrent que par le facteur a' de leurs valeurs dans ${}^{\star}\beta_0$. Donc

$$a'{}^{\star}\beta_0-{}^{\star}\delta_0{}^{\star}\alpha_0$$

est divisible par ξ. Si l'on effectue la division, on trouve pour quotient ${}^{\star}\varepsilon_0$. Donc

$$a'{}^{\star}\beta_0-{}^{\star}\alpha_0{}^{\star}\delta_0-\xi\,{}^{\star}\varepsilon_0=0,$$

et, par suite,

$$a'\beta_0-\alpha_0\delta_0-\xi\varepsilon_0$$

est divisible par a, ce qui fournit un nouveau péninvariant, de degré (2, 2), de classe 2, de poids 6, correspondant par conséquent à un covariant mixte linéaire en x, y, z, irréductible aux formations précédentes, et que je désignerai par γ. La syzygie qui le définit est, d'après ce qui précède,

$$s\gamma=s'\beta-\alpha\delta-\varepsilon\pi. \tag{25}$$

(Je désignerai désormais par π le covariant identique

$$\xi x+\eta y+\zeta z,$$

dont la source est ξ.) On trouve pour expression de sa source γ_0, tous calculs faits,

$$
(26)\quad\left\{
\begin{aligned}
\gamma_0 &= (HG'-GH')\xi^2+(BF'-FB')\eta^2+(FC'-CF')\zeta^2\\
&\quad +(HC'-CH'+FG'-GF')\xi\zeta\\
&\quad +(HF'-FH'+BG'-GB)\xi\eta+(BC'-CB')\eta\zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit que γ_0 ne fait que changer de signe (comme δ_0 et t_0) quand on permute les coefficients de s et ceux de s'. La même opération laisse évidemment π invariable, et change α, β, ε en leurs symétriques α', β', ε'; si donc on l'applique à la syzygie (25), ce qui doit donner encore une syzygie en raison de la symétrie évidente du système par rapport aux deux formes fondamentales s, s', on obtient cette nouvelle syzygie

$$s\beta' = -s'\gamma - \alpha'\delta + \varepsilon'\pi, \tag{27}$$

laquelle renferme les deux covariants non encore rencontrés β' et ε', et nous apprend, dès à présent, comment β'_0 pourra être obtenu par l'application de notre méthode, lorsque nous aurons obtenu ε'_0.

Pour obtenir ε'_0, il suffit de remarquer que, si l'on forme

$$a'{}^*\varepsilon_0 + {}^*w_0{}^*\delta_0,$$

les coefficients de η et ζ s'évanouissent, et celui de ξ se réduit à ${}^*t_0$. Donc $a'\varepsilon_0 + w_0\delta_0 - t_0\xi$ est divisible par a, et, en effectuant cette opération, on trouve précisément ε'_0, c'est-à-dire ce qui devient ε_0 quand on y permute les coefficients de s et ceux de s'. On a donc, pour rattacher ε' aux formations déjà rencontrées, la syzygie

$$s\varepsilon' = s'\varepsilon + w\delta - t\pi, \tag{28}$$

qui est symétrique par rapport à s et s'.

On voit encore immédiatement que ${}^*\delta_0^2 + a'^2{}^*\sigma$ est divisible par ξ, et qu'en y ajoutant $-2a'\xi{}^*\alpha_0$, il ne subsiste plus que des termes en ξ^2; on vérifie sans peine que l'ensemble de ces termes se réduit à $({}^*w_0 - a'{}^*\mathrm{I})\xi^2$; par conséquent

$$\delta_0^2 + a'^2\sigma - 2a'\alpha_0\xi + (\mathrm{I}a' - w_0)\xi^2$$

est divisible par a. En effectuant la division, on trouve, pour expression du quotient,

$$\begin{aligned}
&bg'^2 + ch'^2 - 2fg'h')\xi^2 + (ag'^2 + ca'^2 - 2ga'g')\eta^2 \\
&+ (ah'^2 + ba'^2 - 2ha'h')\zeta^2 + 2(ga'h' + ha'g' - ag'h' - fa'^2)\eta\zeta \\
&+ 2(gg'h' - hg'^2 - ca'h' + fa'g')\xi\eta \\
&+ 2(hg'h' - gh'^2 - ba'g' + fa'h')\xi\zeta.
\end{aligned}$$

En y ajoutant $-a'\varphi$, il ne subsistera évidemment plus dans cette expression que des termes divisibles soit par a, soit par ξ, et l'on reconnaît sans peine qu'en y ajoutant encore $I'\xi^2$ elle se réduit à $2\alpha'_0\xi - a\sigma'$, en appelant comme ci-dessus σ' le contrevariant symétrique de σ. Ce contrevariant, dont il est inutile d'écrire l'expression, est donc relié aux formations antérieures par la syzygie

$$(29)\quad \delta^2 + s^2\sigma' + s'^2\sigma - ss'\varphi - 2\pi(s\alpha' + s'\alpha) + \pi^2(Is' + I's - w) = 0.$$

Nous avons ainsi obtenu, en appliquant notre méthode générale, les formations β', ε', σ', dont l'existence était prévue, et de plus la formation γ, symétrique (au signe près), par rapport aux deux séries de coefficients. Pour avoir le système complet, tel que l'a établi M. Gordan, il ne nous reste plus à obtenir qu'un contrevariant de degré (3,3) et de classe 3, qui corresponde dualistiquement au covariant cubique pur désigné ci-dessus par t.

Pour obtenir ce contrevariant, que j'appellerai τ, il suffit de remarquer que si l'on forme $^*\alpha'_0\,{}^*\beta_0 + {}^*\alpha_0\,{}^*\gamma_0$, les termes en η^3, $\eta^2\zeta$, $\eta\zeta^2$, ζ^3 disparaissent d'eux-mêmes ; en divisant par ξ, on trouve $^*I\,{}^*\gamma_0 + {}^*D\,{}^*\beta'_0$; de telle sorte que

$$\alpha'_0\beta_0 + \alpha_0\gamma_0 - \xi(I\gamma_0 + D\beta'_0)$$

est divisible par a, ce qui donne un péninvariant de degré (3,3), de classe 3, de poids 10, correspondant par suite à un covariant mixte d'ordre 0 ; en d'autres termes, un contrevariant précisément de même degré et classe que τ et qui ne peut être que τ lui-même, car les contrevariants déjà trouvés étant tous de classe paire, aucune combinaison formée avec eux ne pourrait fournir un contrevariant de classe impaire. Nous avons donc, pour relier τ aux autres formations, la syzygie

$$(30)\qquad s\tau = \alpha\gamma + \alpha'\beta - \pi(I\gamma + D\beta').$$

Il est inutile de donner l'expression complète de τ [1] ; elle change de signe quand on permute s et s'. En effectuant cette permutation dans la syzygie (30), on obtient la nouvelle sy-

---

[1] On l'obtiendrait d'ailleurs en permutant les lettres majuscules avec les minuscules dans l'expression de t, dont la source t_0 a été donnée ci-dessus [formule (16)].

zygie

$$s'\tau = \alpha'\gamma - \alpha\beta' - \pi(I'\gamma - D'\beta). \tag{31}$$

4. Nous sommes maintenant en possession du système complet des formations invariantes, avec les sept syzygies (13), (25), (27), (28), (29), (30) et (31) qui les relient entre elles. Voici le Tableau de ces formations, avec la notation de Clebsch en regard :

		Degré dans les coefficients. de s.	Degré dans les coefficients. de s'.	Classe.	Ordre.	Notation de Clebsch.
4 invariants	D.......	3	0	0	0	A_{111}
	I........	2	1	0	0	A_{112}
	I'........	1	2	0	0	A_{122}
	D'......	0	3	0	0	A_{222}
4 covariants purs	s........	1	0	0	2	f
	w.......	2	2	0	2	Φ_{12}
	s'.......	0	1	0	2	f'
	t........	3	3	0	3	Δ
4 contrevariants	σ.......	2	0	2	0	F_{11}
	φ.......	1	1	2	0	F_{12}
	σ'.......	0	2	2	0	F_{22}
	τ.......	3	3	3	0	D
9 covariants mixtes	π.......	0	0	1	1	u_x
	α.......	2	1	1	1	B_1
	α'.......	1	2	1	1	B_2
	β.......	3	1	2	1	C_1
	γ.......	2	2	2	1	$\mathfrak{N}$
	β'.......	1	3	2	1	C_2
	ε........	3	2	1	2	Γ_1
	ε'.......	2	3	1	2	Γ_2
	δ.......	1	1	1	2	N

Les formations t, τ, β, β', γ, δ, ε, ε' sont gauches, c'est-à-dire changent de signe par une substitution de déterminant -1, comme les invariants binaires dont elles dérivent.

Proposons-nous de former de nouvelles syzygies, en transportant dans le domaine ternaire celles qui existent entre les treize invariants binaires dont nous sommes partis.

D'après les résultats obtenus dans le Mémoire déjà cité plusieurs fois, ces treize invariants binaires sont reliés par vingt syzygies distinctes, dont voici le Tableau :

$$
(32)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{I.} & \left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{G}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}'\mathcal{J} - \mathcal{A}^2\mathcal{D}' - \mathcal{A}'^2\mathcal{D},\\
\mathcal{G}'^2 = \mathcal{C}\mathcal{C}'\mathcal{J} - \mathcal{C}^2\mathcal{D}' - \mathcal{C}'^2\mathcal{D},\\
\mathcal{L}'^2 = \mathcal{J}(\mathcal{A}\mathcal{C}' + \mathcal{C}\mathcal{A}' + 2\mathcal{B}\mathcal{B}') - 4(\mathcal{A}'\mathcal{C}'\mathcal{D} + \mathcal{B}^2\mathcal{D}'),\\
\mathcal{G}\mathcal{G}' = \mathcal{B}\mathcal{B}'\mathcal{J} - \mathcal{B}^2\mathcal{D}' - \mathcal{B}'^2\mathcal{D},\\
\mathcal{G}\mathcal{L} = \mathcal{A}\mathcal{B}' - \mathcal{B}\mathcal{A}',\\
\mathcal{G}'\mathcal{L} = \mathcal{B}\mathcal{C}' - \mathcal{C}\mathcal{B}',\\
\mathcal{G}\mathcal{L}' = \mathcal{J}(\mathcal{B}\mathcal{A}' + \mathcal{A}\mathcal{B}') - 2(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{D}' + \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{D}),\\
\mathcal{G}'\mathcal{L}' = \mathcal{J}(\mathcal{B}\mathcal{C}' + \mathcal{C}\mathcal{B}') - 2(\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}' + \mathcal{B}'\mathcal{C}'\mathcal{D}),\\
\mathcal{L}\mathcal{L}' = \mathcal{A}\mathcal{C}' - \mathcal{C}\mathcal{A}';
\end{array}\right.\\[2ex]
\mathrm{II.} & \left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{D}\mathcal{L}^2 = \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2,\\
\mathcal{D}'\mathcal{L}^2 = \mathcal{A}'\mathcal{C}' - \mathcal{B}'^2,\\
\mathcal{J}\mathcal{L}^2 = \mathcal{A}\mathcal{C}' + \mathcal{C}\mathcal{A}' - 2\mathcal{B}\mathcal{B}';
\end{array}\right.\\[2ex]
\mathrm{III.} & \left\{
\begin{array}{r}
\mathcal{A}\mathcal{G}' + \mathcal{C}\mathcal{G} - \mathcal{B}\mathcal{L}' = 0,\\
\mathcal{A}'\mathcal{G}' + \mathcal{C}'\mathcal{G} - \mathcal{B}'\mathcal{L}' = 0,\\
\mathcal{A}\mathcal{G}' - \mathcal{C}\mathcal{G} + (2\mathcal{B}'\mathcal{D} - \mathcal{J}\mathcal{B})\mathcal{L} = 0,\\
\mathcal{A}'\mathcal{G}' - \mathcal{C}'\mathcal{G} + (\mathcal{J}\mathcal{B}' - 2\mathcal{B}\mathcal{D}')\mathcal{L} = 0,\\
\mathcal{A}(\mathcal{L}' - \mathcal{J}\mathcal{L}) + 2(\mathcal{A}'\mathcal{D}\mathcal{L} - \mathcal{B}\mathcal{G}) = 0,\\
\mathcal{A}'(\mathcal{L}' + \mathcal{J}\mathcal{L}) - 2(\mathcal{A}\mathcal{D}'\mathcal{L} + \mathcal{B}'\mathcal{G}) = 0,\\
\mathcal{C}(\mathcal{L}' + \mathcal{J}\mathcal{L}) - 2(\mathcal{C}'\mathcal{D}\mathcal{L} + \mathcal{B}\mathcal{G}') = 0,\\
\mathcal{C}'(\mathcal{L}' - \mathcal{J}\mathcal{L}) + 2(\mathcal{C}\mathcal{D}'\mathcal{L} - \mathcal{B}'\mathcal{G}') = 0.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Le groupe I donne l'expression des carrés et produits deux à deux des invariants binaires gauches (à l'exception du seul carré $\mathcal{L}^2$) en fonction des invariants droits; nous pouvons donc nous attendre à obtenir les expressions des carrés et produits deux à deux des formations ternaires gauches t, δ, β, ε, à l'exception de δ^2, en fonction des formations droites : il n'y aura même plus d'exception pour δ^2, que la syzygie (29) exprime précisément de cette manière. Le groupe II ne contenant que $\mathcal{L}^2$ comme invariant gauche nous donnera des syzygies entre formes droites. Enfin le groupe III fournira des syzygies gauches, c'est-à-dire dans chaque terme desquelles entre une formation gauche, et une seule.

Pour transporter toutes ces syzygies dans le domaine ternaire, il suffit d'y remplacer chaque invariant binaire par son expression en fonction des péninvariants ternaires, d'effectuer les simplifications qui se présentent par la suppression des puissances de a qui apparaissent en facteur commun ou par l'emploi de syzygies déjà connues, enfin de remplacer les péninvariants ternaires par les covariants dont ils sont respectivement les sources. Les expressions de $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{G}$ ont déjà été données plus haut; celles des sept autres invariants binaires se déduisent facilement de proche en proche des formules (18), (19), (20), (21), (22), (23) et (24). Je les écris toutes ci-dessous, en y remplaçant d'avance, pour plus de commodité, les péninvariants ternaires par les covariants correspondants :

$$\mathfrak{D} = \mathrm{D}s, \qquad \mathfrak{D}' = s^2(\mathrm{I}'s - w), \qquad \mathfrak{J} = s(\mathrm{I}s - \mathrm{D}s'),$$
$$\mathfrak{A} = s(\mathrm{I}ss' - sw - \mathrm{D}s'^2), \qquad \mathfrak{A}' = s^2(\mathrm{I}'ss' - s'w - \mathrm{D}'s^2),$$
$$\mathfrak{G} = s^3 t, \qquad \mathfrak{L} = s\delta, \qquad \mathfrak{M} = s(s\alpha - \mathrm{D}s'\pi),$$
$$\mathfrak{S} = s(s\sigma - \mathrm{D}\pi^2), \qquad \mathfrak{M}' = s^2(-s\alpha' + \mathrm{I}'s\pi - w\pi),$$
$$\mathfrak{S}' = s^2(s\varphi - s'\sigma + 2\alpha\pi - \mathrm{I}\pi^2), \qquad \mathfrak{G}' = s^2(s\beta - \mathrm{D}\delta\pi),$$
$$\mathfrak{L}' = s^2(2s\varepsilon - \mathrm{D}s'\delta + \mathrm{I}s\delta).$$

Commençons par les syzygies du groupe I. La première a déjà été utilisée et nous a donné la syzygie (13). La cinquième donne la relation symétrique que voici :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} t\delta = {} & (\mathrm{D}'s^2 - \mathrm{I}'ss' + ws')\alpha + (\mathrm{D}s'^2 - \mathrm{I}ss' + ws)\alpha' \\ & + [(\mathrm{I}\mathrm{I}' - \mathrm{D}\mathrm{D}')ss' - w(\mathrm{I}s' + \mathrm{I}'s) + w^2]\pi. \end{aligned}\right.$$

La sixième donne, en tenant compte de (29),

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \beta\delta = {} & (s\varphi - s'\sigma)\alpha + s\sigma\alpha' \\ & + [2\alpha^2 + w\sigma - s(\mathrm{D}\sigma' + \mathrm{I}'\sigma)]\pi + (\mathrm{D}\alpha' - \mathrm{I}\alpha)\pi^2; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut, par symétrie,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \beta'\delta = {} & -s'\sigma'\alpha + (s\sigma' - s'\varphi)\alpha' \\ & - [2\alpha'^2 + w\sigma' - s'(\mathrm{D}'\sigma + \mathrm{I}\sigma')]\pi + (\mathrm{I}'\alpha' - \mathrm{D}'\alpha)\pi^2. \end{aligned}\right.$$

La neuvième peut s'écrire, à cause de la troisième du groupe II,

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L}' - \mathfrak{J}\mathfrak{L}) = 2(\mathfrak{M}\mathfrak{M}' - \mathfrak{S}\mathfrak{A}').$$

et donne par suite

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\varepsilon = {} & (\mathrm{D}'s^2 + s'w - \mathrm{I}'ss')\sigma - s\alpha\alpha' \\ & + [(\mathrm{I}'s - w)\alpha + \mathrm{D}s'\alpha']\pi - \mathrm{D}\mathrm{D}'s\pi^2; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut, par symétrie,

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\varepsilon' = {} & (\mathrm{I}ss' - \mathrm{D}s'^2 - s\varpi)\sigma' + s'\alpha\alpha' \\ & + [(\varpi - \mathrm{I}s')\alpha' - \mathrm{D}'s\alpha]\pi + \mathrm{DD}'s'\pi^2. \end{aligned}\right.$$

La deuxième donne, en tenant compte de (29) et de (34),

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta^2 = {} & (\varpi - \mathrm{I}s' - \mathrm{I}'s)\sigma^2 + (\mathrm{I}s + \mathrm{D}s')\varphi\sigma - \mathrm{D}s\varphi^2 \\ & + 2\pi[(\mathrm{I}\sigma - \mathrm{D}\varphi)\alpha + \mathrm{D}\sigma\alpha'] + \pi^2(\mathrm{ID}\varphi - \mathrm{I}^2\sigma - \mathrm{D}^2\sigma'); \end{aligned}\right.$$

d'où, par symétrie,

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta'^2 = {} & (\varpi - \mathrm{I}s' - \mathrm{I}'s)\sigma'^2 + (\mathrm{I}'s' + \mathrm{D}'s)\varphi\sigma' - \mathrm{D}'s'\varphi^2 \\ & + 2\pi[(\mathrm{I}'\sigma' - \mathrm{D}'\varphi)\alpha' + \mathrm{D}'\sigma'\alpha] + \pi^2(\mathrm{I}'\mathrm{D}'\varphi - \mathrm{I}'^2\sigma' - \mathrm{D}'^2\sigma). \end{aligned}\right.$$

La quatrième donne, en tenant compte de (33),

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} t\beta = {} & (\varpi - \mathrm{I}'s)\alpha^2 + (\mathrm{D}s' - \mathrm{I}s)\alpha\alpha' - \mathrm{D}s\alpha'^2 + [(\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')s - \mathrm{I}\varpi]\alpha\pi \\ & + \mathrm{D}(2\mathrm{I}'s - \varpi)\alpha'\pi + \mathrm{D}(\mathrm{I}'\varpi - \mathrm{DD}'s' - \mathrm{I}'^2 s)\pi^2; \end{aligned}\right.$$

d'où, par symétrie,

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} t\beta' = {} & (\mathrm{I}s' - \varpi)\alpha'^2 + (\mathrm{I}'s' - \mathrm{D}'s)\alpha\alpha' + \mathrm{D}'s'\alpha^2 \\ & + [\mathrm{I}'\varpi - (\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')s']\alpha'\pi + \mathrm{D}'(\varpi - 2\mathrm{I}s')\alpha\pi \\ & + \mathrm{D}'(\mathrm{I}^2 s' + \mathrm{DD}'s - \mathrm{I}\varpi)\pi^2. \end{aligned}\right.$$

La septième donne, en tenant compte de (33),

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} t\varepsilon = {} & (-\mathrm{ID}'s^2 + \mathrm{DD}'ss' + \mathrm{I}'s\varpi - \varpi^2)\alpha + (-\mathrm{DD}'s^2 + \mathrm{I}'\mathrm{D}ss' - \mathrm{D}s'\varpi]\alpha' \\ & + [\mathrm{I}'\mathrm{DD}'s^2 + \mathrm{D}(\mathrm{ID}' - \mathrm{I}'^2)ss' + \mathrm{D}^2\mathrm{D}'s'^2 - \mathrm{DD}'s\varpi + \mathrm{I}'\mathrm{D}s'\varpi]\pi; \end{aligned}\right.$$

d'où, par symétrie,

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} t\varepsilon' = {} & (\mathrm{DD}'s'^2 - \mathrm{ID}'ss' + \mathrm{D}'s\varpi)\alpha + (\mathrm{I}'\mathrm{D}s'^2 - \mathrm{DD}'ss' - \mathrm{I}s'\varpi + \varpi^2)\alpha \\ & + [-\mathrm{IDD}'s'^2 - \mathrm{D}'(\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2)ss' + \mathrm{DD}'^2 s^2 + \mathrm{DD}'s'\varpi - \mathrm{ID}'s\varpi]\pi. \end{aligned}\right.$$

La huitième peut s'écrire, en tenant compte de la sixième,

$$\mathcal{G}'(\mathcal{L}' - \mathcal{I}\mathcal{L}) = 2(\mathcal{I}\mathcal{E}\mathcal{A}' - \mathcal{A}\mathcal{E}\mathcal{D}' + \mathcal{A}'\mathcal{E}'\mathcal{D}),$$

et donne par suite, en tenant compte de (36),

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta\varepsilon = {} & (\varpi - \mathrm{I}'s)\sigma\alpha + (\mathrm{D}\varphi - \mathrm{I}\sigma)s\alpha' \\ & + [\mathrm{D}\alpha\alpha' + (\varpi - \mathrm{I}'s)(\mathrm{D}\varphi - \mathrm{I}\sigma) + \mathrm{DD}'s\sigma]\pi - \mathrm{D}^2\mathrm{D}'\pi^3; \end{aligned}\right.$$

d'où, par symétrie,

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} \beta'\varepsilon' = {} & (\varpi - \mathrm{I}'s')\sigma'\alpha' + (\mathrm{D}'\varphi - \mathrm{I}'\sigma')s'\alpha \\ & + [\mathrm{D}'\alpha\alpha' + (\varpi - \mathrm{I}s')(\mathrm{D}'\varphi - \mathrm{I}'\sigma') + \mathrm{DD}'s'\sigma']\pi - \mathrm{DD}'^2\pi^3. \end{aligned}\right.$$

Enfin la troisième peut s'écrire, en tenant compte de la dernière du groupe II,

$$(\mathcal{L}' + \mathcal{I}\mathcal{L})(\mathcal{L}' - \mathcal{I}\mathcal{L}) = 4[\mathcal{B}(\mathcal{I}\mathcal{B}' - \mathcal{B}\mathcal{D}') - \mathcal{D}\mathcal{A}'\mathcal{E}'],$$

et donne alors, en tenant compte de (36),

$$(46)\quad \varepsilon^2 = (w - \mathrm{I}'s)(\alpha^2 + \mathrm{D}s'\varphi - \mathrm{I}s'\sigma) + \mathrm{D}'s^2(\mathrm{D}\varphi - \mathrm{I}\sigma) + \mathrm{DD}'\pi(2s\alpha - \mathrm{D}s'\pi);$$

d'où, par symétrie,

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon'^2 = {} & (w - \mathrm{I}s')(\alpha'^2 + \mathrm{D}'s\varphi - \mathrm{I}'s\sigma') \\ & + \mathrm{D}s'^2(\mathrm{D}'\varphi - \mathrm{I}'\sigma') + \mathrm{DD}'\pi(2s'\alpha' - \mathrm{D}'s\pi). \end{aligned} \right.$$

Passons maintenant aux syzygies binaires du groupe II. En les transportant dans le domaine ternaire, avec le secours de (29), on obtient les trois importantes relations

$$(48)\quad \alpha^2 = \mathrm{D}\sigma's + (\mathrm{I}\sigma - \mathrm{D}\varphi)s' - \sigma w - 2\mathrm{D}\alpha'\pi + \mathrm{I}'\mathrm{D}\pi^2,$$

$$(49)\quad \alpha'^2 = \mathrm{D}'\sigma s' + (\mathrm{I}'\sigma' - \mathrm{D}'\varphi)s - \sigma' w - 2\mathrm{D}'\alpha\pi + \mathrm{ID}'\pi^2,$$

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} 2\alpha\alpha' = {} & (\mathrm{D}'\sigma - \mathrm{I}\sigma')s + (\mathrm{D}\sigma' - \mathrm{I}'\sigma)s' + \varphi w \\ & + 2(\mathrm{I}'\alpha + \mathrm{I}\alpha')\pi - (\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\pi^2, \end{aligned} \right.$$

dont les deux premières sont symétriques l'une de l'autre; la troisième est sa propre symétrique. Ces trois syzygies ne renferment, comme il avait été prévu, que des formes droites ; elles peuvent servir à ramener toutes les expressions à ne contenir α et α' qu'au premier degré.

Transportons enfin dans le domaine ternaire les huit syzygies binaires du groupe III. Le calcul ne présente aucune difficulté, en s'aidant des syzygies (25), (27), (28), (30) et (31). Voici le groupe de syzygies gauches auxquelles on est finalement conduit :

$$(51)\quad (\mathrm{I}s' - w)\beta - \mathrm{D}s'\gamma - \mathrm{I}\alpha\delta - 2\alpha\varepsilon + \mathrm{D}\pi\varepsilon' + \sigma t = 0,$$

$$(52)\quad \left\{ \begin{aligned} & (\mathrm{I}'s' - \mathrm{D}'s)\beta + (\mathrm{D}s' - \mathrm{I}s)\beta' - 2w\gamma \\ & + 2(\alpha' - \mathrm{I}'\pi)\varepsilon + (\mathrm{DD}' - \mathrm{II}')\pi\delta + 2(\mathrm{I}\pi - \alpha)\varepsilon' + \varphi t = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(53)\quad \mathrm{D}(\mathrm{D}'s - \mathrm{I}'s')\delta + (w - \mathrm{I}s')\varepsilon + \mathrm{D}s'\varepsilon' + \alpha t = 0,$$

$$(54)\quad \alpha' - \mathrm{I}'\pi)\beta + \mathrm{D}\pi\beta' + \mathrm{I}\pi\gamma + \mathrm{I}'\sigma\delta + \varphi\varepsilon - \sigma\varepsilon' = 0,$$

$$(55)\quad \alpha\beta - \mathrm{D}\pi\gamma + (\mathrm{D}\varphi - \mathrm{I}\sigma)\delta - \sigma\varepsilon = 0,$$

$$(56)\quad \mathrm{D}'(\mathrm{D}s' - \mathrm{I}s)\delta - \mathrm{D}'s\varepsilon + (\mathrm{I}'s - w)\varepsilon' + \alpha' t = 0,$$

$$(57)\quad \mathrm{D}(\alpha' - \mathrm{I}'\pi)\delta - \alpha\varepsilon + \mathrm{D}\pi\varepsilon' + \sigma t = 0,$$

$$(58)\quad [(\mathrm{DD}' + \mathrm{II}')\pi - \mathrm{I}\alpha' - \mathrm{I}'\alpha]\delta + (\mathrm{I}'\pi - \alpha')\varepsilon - (\mathrm{I}\pi - \alpha)\varepsilon' - \varphi t = 0.$$

$$(59)\qquad Ds'\beta' + (Is' - w)\gamma + DD'\pi\delta - \alpha\varepsilon' = 0,$$

$$(60)\qquad (I's - w)\beta' + D's\gamma + I'\alpha'\delta - 2\alpha'\varepsilon' + D'\pi\varepsilon - \sigma' t = 0,$$

$$(61)\qquad (\alpha - I\pi)\beta' + D'\pi\beta - I'\pi\gamma - I\sigma'\delta + \varphi\varepsilon' - \sigma'\varepsilon = 0,$$

$$(62)\qquad \alpha'\beta' + D'\pi\gamma + (I'\sigma' - D'\varphi)\delta - \sigma'\varepsilon' = 0,$$

$$(63)\qquad D'(\alpha - I\pi)\delta + \alpha'\varepsilon' - D'\pi\varepsilon + \sigma' t = 0,$$

$$(64)\qquad D's\beta + (w - I's)\gamma - DD'\pi\delta - \alpha'\varepsilon = 0.$$

Les huit premières de ces syzygies [(51) à (58)] proviennent respectivement des première, deuxième, cinquième, huitième, septième, sixième, troisième et quatrième syzygies binaires du groupe III (32). La syzygie (59) s'obtient en divisant par s la combinaison suivante des syzygies (25), (27), (28), (51), (53), (57), où tous les termes non divisibles par s disparaissent d'eux-mêmes,

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} (w - Is')[s\gamma - s'\beta + \alpha\delta + \pi\varepsilon] - Ds'[s\beta' + s'\gamma + \alpha'\delta - \pi\varepsilon'] \\ \quad + \alpha[s\varepsilon' - s'\varepsilon - w\delta + \pi t] \\ \quad - s'[(Is' - w)\beta - Ds'\gamma - I\alpha\delta - 2\alpha\varepsilon + D\pi\varepsilon' + \sigma t] \\ \quad - \pi[D(D's - I's')\delta + (w - Is')\varepsilon + Ds'\varepsilon' + \alpha t] \\ \quad + s'[D(\alpha' - I'\pi)\delta - \alpha\varepsilon + D\pi\varepsilon' + \sigma t]. \end{array} \right.$$

Enfin les syzygies (60) à (64) se déduisent respectivement par symétrie des syzygies (51), (54), (55), (57), (59). Les syzygies (52) et (58) sont leurs propres symétriques ; (53) a pour symétrique (56).

5. Nous avons obtenu précédemment dix-sept syzygies donnant l'expression de carrés ou de doubles produits de formes gauches en fonction des formes droites, savoir (13), (29) et (33) à (47). Je vais maintenant calculer les expressions analogues pour tous les autres carrés ou doubles produits de formes gauches, en formant méthodiquement dix-neuf syzygies nouvelles par le procédé suivant.

Je multiplie la syzygie (25) successivement par t, δ, β, ε ; je remplace dans le second membre les doubles produits ou carrés de formes gauches par leurs expressions en fonction des formes droites, connues en vertu des syzygies antérieures ; en utilisant au besoin les syzygies (48), (49) et (50), il est facile de faire disparaître les termes non divisibles par s; effectuant la division, j'obtiens dans le premier membre γt, $\gamma\delta$, $\gamma\beta$, $\gamma\varepsilon$, et le second membre donne, pour ce double produit, l'expression demandée. Connaissant ainsi $\gamma\delta$, $\gamma\beta$, $\gamma\varepsilon$, il suffit de multiplier (25) par γ et d'opérer de la même manière pour obtenir l'expression de γ^2. J'opère ensuite de même sur la syzygie (28), puis sur (27), enfin sur (30); en profitant d'ailleurs de la loi de symétrie pour éviter quelques-uns de ces calculs. Les résultats que fournit cette méthode sont donnés par le Tableau ci-dessous, dans l'ordre même où on les obtient :

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} t\gamma &= -D's\alpha^2 - \varpi\alpha\alpha' - Ds'\alpha'^2 + D'(Is + Ds')\alpha\pi \\ &\quad + D(I's' + D's)\alpha'\pi + DD'(\varpi - Is' - I's)\pi^2, \end{aligned}\right.$$

$$(66)\quad \gamma\delta = s\sigma'\alpha + s'\sigma\alpha' - (\alpha\alpha' + Ds'\sigma' + D's\sigma)\pi + DD'\pi^3,$$

$$(67)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta\gamma &= -I's'\sigma^2 + Ds'\sigma\sigma' - Ds\sigma'\varphi + \varpi\sigma\varphi - \sigma\alpha\alpha' + (I\sigma + D\varphi)\alpha'\pi \\ &\quad + (2I'\sigma - D\sigma')\alpha\pi - II'\sigma\pi^2, \end{aligned}\right.$$

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta'\gamma &= Is\sigma'^2 - D's\sigma\sigma' + D's'\sigma\varphi - \varpi\sigma'\varphi + \sigma'\alpha\alpha' - (I'\sigma' + D'\varphi)\alpha\pi \\ &\quad + (D'\sigma - 2I\sigma')\alpha'\pi + II'\sigma'\pi^2, \end{aligned}\right.$$

$$(69)\quad \left\{ \begin{aligned} \gamma\varepsilon &= s(D\sigma'\alpha' - D'\sigma\alpha) - \varpi\sigma\alpha' + \pi[(ID'\sigma - 2I'D\sigma' + DD'\varphi)s - DD's'\sigma + 2D\varpi\sigma'] \\ &\quad + D\pi^2(I'\alpha' + 3D'\alpha) - 2IDD'\pi^3, \end{aligned}\right.$$

$$(70)\quad \left\{ \begin{aligned} \gamma\varepsilon' &= s'(D\sigma'\alpha' - D'\sigma\alpha) + \varpi\sigma'\alpha - \pi[(I'D\sigma' - 2ID'\sigma + DD'\varphi)s' - DD's\sigma' + 2D'\varpi\sigma] \\ &\quad - D'\pi^2(I\alpha + 3D\alpha') + 2I'DD'\pi^3, \end{aligned}\right.$$

$$(71)\quad \left\{ \begin{aligned} \gamma^2 &= -Ds\sigma'^2 - D's'\sigma^2 + \varpi\sigma\sigma' + 2\pi(D'\sigma\alpha + D\sigma'\alpha') \\ &\quad + \pi^2(DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma'), \end{aligned}\right.$$

$$(72)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta\varepsilon' &= -\alpha^2\alpha' + (\varpi\varphi - I's'\sigma)\alpha + Ds\sigma'\alpha' \\ &\quad + \pi(2I'\alpha^2 + I\alpha\alpha' - D\alpha'^2 + DD's'\sigma - I'Ds\sigma') \\ &\quad + \pi^2[I'D\alpha' - (II' + DD')\alpha], \end{aligned}\right.$$

$$(73)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta'\varepsilon &= -\alpha\alpha'^2 + (\varpi\varphi - Is\sigma')\alpha' + D's'\sigma\alpha \\ &\quad + \pi(2I\alpha'^2 + I'\alpha\alpha' - D'\alpha^2 + DD's\sigma' - ID's'\sigma) \\ &\quad + \pi^2[ID'\alpha - (II' + DD')\alpha'], \end{aligned}\right.$$

$$(74)\quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon\varepsilon' &= ss'(DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma') + \varpi(D's\sigma + Ds'\sigma' - \alpha\alpha') \\ &\quad + \pi[D'\alpha(Is + Ds') + D\alpha'(I's' + D's)] - DD'\pi^2(I's + Is'), \end{aligned}\right.$$

$$(75)\quad \left\{ \begin{aligned} \beta\beta' &= \sigma\sigma'(\varpi - Is' - I's) + \varphi(D's\sigma + Ds'\sigma' - \alpha\alpha') \\ &\quad + \pi[(I\sigma' + D'\sigma)\alpha + (I'\sigma + D\sigma')\alpha'] - \pi^2(I'D\sigma' + ID'\sigma), \end{aligned}\right.$$

$$(76)\quad \left\{ \begin{aligned} t\tau &= -D'\alpha^3 - I'\alpha^2\alpha' - I\alpha\alpha'^2 - D\alpha'^3 + \pi[2ID'\alpha^2 + (II' + 3DD')\alpha\alpha' + 2I'D\alpha'^2] \\ &\quad - \pi^2[D'(I^2 + I'D)\alpha + D(I'^2 + ID')\alpha'] + DD'(II' - DD')\pi^3. \end{aligned}\right.$$

(Cette importante syzygie, dont la signification sera étudiée plus loin, présente à première vue ce caractère remarquable, que le second membre ne renferme que les quatre invariants et les trois covariants mixtes linéo-linéaires π, α, α'.)

$$(77)\quad \begin{cases} \tau\delta = \sigma'\alpha^2 + \varphi\alpha\alpha' + \sigma\alpha'^2 - \pi[(D'\sigma + I\sigma')\alpha + (D\sigma' + I'\sigma)\alpha'] \\ \qquad + \pi^2[ID'\sigma + I'D\sigma' - DD'\varphi], \end{cases}$$

$$(78)\quad \begin{cases} \tau\beta = (-D'\sigma^2 + I\sigma\sigma' - D\sigma'\varphi)\alpha + (-I'\sigma^2 + D\sigma\sigma' + I\sigma\varphi - D\varphi^2)\alpha' \\ \qquad + [ID'\sigma^2 + (I'D - I^2)\sigma\sigma' - D^2\sigma'^2 - DD'\sigma\varphi + ID\sigma'\varphi]\pi, \end{cases}$$

$$(79)\quad \begin{cases} \tau\beta' = (I\sigma'^2 - D'\sigma\sigma' - I'\sigma'\varphi + D'\varphi^2)\alpha + (D\sigma'^2 - I'\sigma\sigma' + D'\sigma\varphi)\alpha' \\ \qquad + [D'^2\sigma^2 + (I'^2 - ID')\sigma\sigma' - I'D\sigma'^2 + DD'\sigma'\varphi - I'D'\sigma\varphi]\pi, \end{cases}$$

$$(80)\quad \begin{cases} \tau\varepsilon = -D'\sigma\alpha^2 + (D\sigma' - I'\sigma)\alpha\alpha' + (D\varphi - I\sigma)\alpha'^2 + D'(2I\sigma - D\varphi)\alpha\pi \\ \qquad + [(II' + DD')\sigma - I'D\varphi]\alpha'\pi + D'(-I^2\sigma - D^2\sigma' + ID\varphi)\pi^2, \end{cases}$$

$$(81)\quad \begin{cases} \tau\varepsilon' = (I'\sigma' - D'\varphi)\alpha^2 + (I\sigma' - D'\sigma)\alpha\alpha' + D\sigma'\alpha'^2 \\ \qquad + [ID'\varphi - (II' + DD')\sigma']\alpha\pi + D(D'\varphi - 2I'\sigma')\alpha'\pi \\ \qquad + D(D'^2\sigma + I'^2\sigma' - I'D'\varphi)\pi^2, \end{cases}$$

$$(82)\quad \begin{cases} \tau\gamma = (-D\sigma'^2 + I'\sigma\sigma' - D'\sigma\varphi)\alpha + (-D'\sigma^2 + I\sigma\sigma' - D\sigma'\varphi)\alpha' \\ \qquad + [(ID'\sigma + I'D\sigma')\varphi + (DD' - II')\sigma\sigma' - DD'\varphi^2]\pi, \end{cases}$$

$$(83)\quad \begin{cases} \tau^2 = DD'\varphi^3 - (ID'\sigma + I'D\sigma')\varphi^2 + [I'D'\sigma^2 + (II' - 3DD')\sigma\sigma' + ID\sigma'^2]\varphi - D'^2\sigma^3 \\ \qquad - (I'^2 - 2ID')\sigma^2\sigma' - (I^2 - 2I'D)\sigma\sigma'^2 - D^2\sigma'^3. \end{cases}$$

Pour faciliter l'emploi de tous ces résultats, je donnerai ici une Table à double entrée, au moyen de laquelle on peut retrouver immédiatement, par son numéro d'ordre, la syzygie qui fournit le carré d'une forme gauche donnée ou le produit de deux formes gauches données :

t.	δ.	β.	β'.	ε.	ε'.	γ.	τ.	
(13)	(33)	(40)	(41)	(42)	(43)	(65)	(76)	*t*.
	(29)	(34)	(35)	(36)	(37)	(66)	(77)	δ.
		(38)	(75)	(44)	(72)	(67)	(78)	β.
			(39)	(73)	(45)	(68)	(79)	β'.
				(46)	(74)	(69)	(80)	ε.
					(47)	(70)	(81)	ε'.
						(71)	(82)	γ.
							(83)	τ.

6. En examinant attentivement les syzygies obtenues, on re-

connaît l'existence (indépendamment de la symétrie, évidente *a priori,* relative à l'échange des coefficients de s et de s') d'un genre particulier de symétrie croisée, qui peut être défini comme suit :

« Si, dans une quelconque des syzygies, on remplace s, s', w, t, ε, ε', γ, respectivement par $D\sigma'$, $D'\sigma$, $DD'\varphi$, $-DD'\tau$, $D\beta'$, $D'\beta$, δ, et en même temps, inversement, σ, σ', φ, τ, β, β', δ, par $\frac{s'}{D'}$, $\frac{s}{D}$, $\frac{w}{DD'}$, $-\frac{t}{DD'}$, $\frac{\varepsilon'}{D'}$, $\frac{\varepsilon}{D}$, γ, en conservant sans modification α, α', π, et les invariants D, D', I, I', on obtient encore une syzygie. »

Je dirai que deux syzygies sont *réciproques* quand elles se déduisent l'une de l'autre par le procédé que je viens d'indiquer. Ainsi chacune des trois syzygies fondamentales entre formes droites (48), (49) et (50) est sa propre réciproque, comme il est aisé de le vérifier. Dans la Table à double entrée donnée ci-dessus, les quatre syzygies (76), (66), (72), (73), placées sur la diagonale, sont aussi leurs propres réciproques ; et chacune des autres a pour réciproque celle qui occupe la position symétrique par rapport à cette même diagonale. La vérification de cette curieuse propriété, lorsqu'elle n'est pas immédiate, n'exige que l'emploi convenablement dirigé des trois syzygies droites (48), (49) et (50).

En ce qui concerne les syzygies gauches, on reconnaît que les syzygies (30), (31), (55), (62) ont respectivement pour réciproques (63), (57), (59), (64). La réciproque de (25) serait

$$D\sigma'\delta - \sigma\varepsilon' + \alpha\gamma + D\pi\beta' = 0\,; \tag{84}$$

cette syzygie, que nous n'avons pas encore rencontrée, est néanmoins exacte ; car on l'obtient en divisant par s la combinaison suivante de syzygies connues :

$$\alpha(25) + D\pi(27) - \sigma(28) - \delta(48) + s'(55) + \pi(57) = 0.$$

La réciproque de (27) est évidemment exacte aussi comme étant la symétrique de (84), savoir

$$D'\sigma\delta + \sigma'\varepsilon + \alpha'\gamma - D'\pi\beta = 0. \tag{85}$$

La réciproque de (28) serait

$$\beta'\sigma - \beta\sigma' + \varphi\gamma + \pi\tau = 0. \tag{86}$$

Cette syzygie symétrique, que nous n'avons pas encore rencontrée, est néanmoins exacte ; car elle s'obtiendrait en divisant par s^2 la combinaison suivante de syzygies connues :

$$o = \left\{ \begin{array}{l} (s\varphi + 2\alpha\pi - s'\sigma)(25) + (s\sigma + D\pi^2)(27) - \pi\sigma(28) - \beta(29) \\ \quad + s\pi[(30) - (54) - (84)] + \delta(34) + \pi^2(51). \end{array} \right.$$

On peut d'ailleurs en vérifier plus rapidement l'exactitude en la multipliant par τ, et remplaçant $\beta'\tau$, $\beta\tau$, $\gamma\tau$, τ^2 par leurs expressions (79), (78), (82), (83) : les coefficients de α, α', π s'évanouissent d'eux-mêmes séparément.

La réciproque de (51) serait

$$(I\sigma - D\varphi)\varepsilon' - DD'\sigma\delta - I\alpha\gamma - 2D\alpha\beta' + DD'\pi\beta - Ds'\tau = o ;$$

mais ce n'est que la combinaison suivante de syzygies déjà connues

$$D[(31) + (61) + (85)] + I(84) = o.$$

Les réciproques de (52), (53), (54), (56), (58), (61) seraient respectivement

$$(87) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I'\sigma - D\sigma')\varepsilon' + (D'\sigma - I\sigma')\varepsilon + 2(I\pi - \alpha)D'\beta \\ \quad + 2(\alpha' - I'\pi)D\beta' - 2DD'\varphi\delta + (DD' - II')\pi\gamma - \varpi\tau = o, \end{array} \right.$$

$$(88) \quad (D\sigma' - I'\sigma)\gamma + (D\varphi - I\sigma)\beta' + D'\sigma\beta - \alpha\tau = o,$$

$$(89) \quad (\alpha' - I'\pi)\varepsilon' + D'\pi\varepsilon + ID'\pi\delta + I's'\gamma + \varpi\beta' - D's'\beta = o,$$

$$(90) \quad (D'\sigma - I\sigma')\gamma - D\sigma'\beta' + (I'\sigma' - D'\varphi)\beta - \alpha'\tau = o,$$

$$(91) \quad (I'\pi - \alpha')D\beta' - (I\pi - \alpha)D'\beta + [(DD' + II')\pi - I\alpha' - I'\alpha]\gamma + \varpi\tau = o,$$

$$(92) \quad (\alpha - I\pi)\varepsilon + D\pi\varepsilon' - I'D\pi\delta - Is\gamma + \varpi\beta - Ds\beta' = o,$$

syzygies dont l'exactitude pourrait sans doute être vérifiée assez facilement. Quant à (60), symétrique de (51), elle donnerait évidemment par réciprocité, comme celle-ci, une combinaison de syzygies connues.

On pourrait chercher à obtenir encore d'autres syzygies gauches, en combinant celles que nous avons obtenues de manière à pouvoir diviser par un facteur commun, comme il a été procédé ci-dessus pour vérifier l'exactitude des syzygies (84) et (86) : je m'abstiendrai de poursuivre cette recherche, qui ne paraît présenter actuellement que peu d'intérêt au point de vue des applications géométriques, point de vue auquel je vais maintenant me placer.

II.

7. Avant d'aborder les applications géométriques qui font plus particulièrement l'objet de ce second Chapitre, il ne sera pas inutile de résumer en quelques mots les résultats purement algébriques obtenus dans le premier.

En partant des deux formes ternaires quadratiques s, s', j'ai établi l'existence des dix-huit formations concomitantes qui constituent, avec s, s' et le covariant identique π, le système complet de ces deux formes ; savoir :

4 invariants, D, I, I′, D′ ;

2 covariants purs, w, t, d'ordres 2 et 3 ;

4 contrevariants, σ, φ, σ', τ, de classes 2, 2, 2 et 3 ;

8 covariants mixtes... $\begin{cases} \text{2 linéo-linéaires } \alpha,\ \alpha', \\ \text{3 de classe 2 et d'ordre 1, } \beta,\ \beta',\ \gamma, \\ \text{3 de classe 1 et d'ordre 2, } \varepsilon,\ \varepsilon',\ \delta. \end{cases}$

J'ai calculé les expressions, en fonction des coefficients de s et de s', des invariants, contrevariants et péninvariants (sources par rapport à x des covariants) purs et mixtes.

J'ai obtenu 67 syzygies distinctes reliant ces diverses formations, savoir : 36 qui fournissent les expressions des 8 carrés et des 28 produits deux à deux des 8 formes gauches t, τ, γ, δ, β, β', ε, ε', en fonction des formes droites ; 28 syzygies gauches, c'est-à-dire dans chaque terme desquelles entre une forme gauche, et une seule ; enfin 3 syzygies, (48), (49), (50), où ne figurent que les formes droites.

J'ai enfin montré qu'outre la symétrie relative à l'échange des coefficients de s et s', il se manifeste entre les diverses formations, dans toutes les syzygies, une symétrie croisée particulière, que j'ai désignée sous le nom de *réciprocité*.

Au point de vue géométrique, on peut regarder s et s', égalées à zéro, comme les équations ponctuelles de deux coniques ; w et t comme celles d'une certaine conique et d'une certaine cubique dépendant des deux premières coniques ; σ, σ', φ comme les équations tangentielles de trois autres coniques dépendant toujours des deux premières ; τ comme celle d'une courbe de troisième classe ; enfin α, α', β, β', γ, δ, ε, ε' comme les équations de huit connexes liés aux deux coniques fondamentales ; π représente le connexe identique.

A ce point de vue général, les syzygies obtenues dans le Chapitre I fourniraient évidemment le moyen d'étudier les particularités que peuvent présenter ces divers connexes. Toutefois, je n'entreprendrai pas ici cette étude, et je considérerai les formations mixtes comme représentant les équations tantôt ponctuelles, tantôt tangentielles, suivant le cas, de droites ou de coniques définies par une droite donnée ou par un point donné, dont les coordonnées y sont introduites de manière à n'y laisser subsister comme variables effectives que les variables de l'une ou de l'autre série.

8. La première question géométrique qui se présente naturellement est de former les équations tangentielles des coniques s, s'. La syzygie (29) fournit immédiatement la réponse. Soient en effet x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque M de la conique s, mais que nous supposerons n'être pas en même temps sur s'. En introduisant ces valeurs de x, y, z, s s'annule ; s' et w prennent des valeurs déterminées s'_1, w_1 ; δ, α, α', π deviennent des fonctions déterminées δ_1, α_1, α'_1, π_1 des seules variables ξ, η, ζ, comme sont déjà σ, σ', φ. La syzygie (29) prend la forme

$$\delta_1^2 + s_1'^2 \sigma - \pi_1 [2 s'_1 \alpha_1 + (w_1 - \mathrm{I} s'_1) \pi_1] = 0,$$

et elle exprime que l'équation tangentielle $\sigma = 0$ est exactement équivalente à celle-ci :

$$\delta_1^2 - \pi_1 \Pi_1,$$

où π_1 est le point M, δ_1 et Π_1 sont deux autres points dépendant de la position de M. Mais cette dernière représente, comme on sait, une conique passant par les deux points π_1, Π_1, les tangentes en ces points allant concourir au point δ_1 ; donc M est sur σ, et, par suite, σ est l'équation tangentielle de s.

Par le même raisonnement, appliqué toujours à la syzygie (29), on voit que $\sigma + k\varphi + k^2\sigma'$ est l'équation tangentielle de $s + ks'$.

De même la syzygie (71), réciproque de (29), fait connaître l'équation ponctuelle de la conique $\sigma + k\sigma'$; car, soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'une tangente T de cette conique, elles annulent $\sigma + k\sigma'$, donnent à σ, σ', φ les valeurs déterminées $-k\sigma'_1$, σ'_1,

φ_1 et font de π, γ, α, α' des fonctions déterminées π_1, γ_1, α_1, α'_1 des seules variables x, y, z. La syzygie (71) devient

$$\gamma_1^2+\sigma_1'^2(\mathrm{D}s+k\,w+k^2\mathrm{D}'s')-\pi_1\left\{2\sigma'_1(\mathrm{D}\alpha'_1-k\mathrm{D}'\alpha_1)-\pi_1[\mathrm{D}\mathrm{D}'\varphi_1+\sigma'_1(k\mathrm{I}\mathrm{D}'-\mathrm{I}'\mathrm{D})]\right\}=0,$$

et montre que l'équation de la conique $\mathrm{D}s+kw+k^2\mathrm{D}'s'$ peut se mettre sous la forme

$$\gamma_1^2-\pi_1\Pi_1=0,$$

et que, par suite, cette conique est tangente à la droite π_1, qui n'est autre quc T. Donc $\sigma+k\sigma'$ a pour équation ponctuelle

$$\mathrm{D}s+kw+k^2\mathrm{D}'s'.$$

La signification géométrique des invariants D, D′ est immédiatement donnée par les syzygies droites (48), (49).

Si dans (48), par exemple, on suppose $\mathrm{D}=0$, il vient

$$\alpha^2=\sigma(\mathrm{I}s'-w),$$

et, comme chacun des facteurs du second membre ne contient qu'une des séries de variables, chacun d'eux doit être un carré parfait ; donc σ se réduit à deux points coïncidents. Mais, d'autre part, la syzygie (47) devient, pour $\mathrm{D}=0$,

$$\varepsilon'^2=(w-\mathrm{I}s')[\alpha'^2+s(\mathrm{D}'\varphi-\mathrm{I}'\sigma')];$$

$w-\mathrm{I}s'$ étant carré parfait, comme nous venons de le voir, il faut qu'il en soit de même du second facteur du second membre. On peut donc, en désignant par θ une certaine forme linéaire par rapport aux deux séries de variables, poser

$$\alpha'^2+s(\mathrm{D}'\varphi-\mathrm{I}'\sigma')=\theta^2$$

ou encore

$$s(\mathrm{D}'\varphi-\mathrm{I}'\sigma')=(\theta+\alpha')(\theta-\alpha').$$

Chacun des facteurs du premier membre ne contenant qu'une des séries de variables doit se décomposer en deux facteurs linéaires : donc s représente deux droites, et $\mathrm{D}'\varphi-\mathrm{I}'\sigma'$ deux points.

9. Proposons-nous d'exprimer, au moyen des formations que nous avons obtenues, les invariants, contrevariants et covariants purs ou mixtes du système où σ et σ' seraient les deux formes fondamentales, au lieu de s et de s', le rôle des deux séries de

coordonnées se trouvant renversé. Nous savons déjà que Ds, w, $D's'$ correspondent respectivement dans cette hypothèse à σ, φ, σ'. Le covariant identique π n'est évidemment pas affecté. Désignons par D_1, D'_1, I_1, I'_1, α_1, ... les formations qui correspondraient respectivement à D, D', I, ... La syzygie (29) devant subsister entre ces nouvelles formations, on peut poser

$$\delta_1^2 = - D's'\sigma^2 - Ds\sigma'^2 + w\sigma\sigma' + 2\pi(\sigma\alpha'_1 + \sigma'\alpha_1) + \pi^2(- I_1\sigma' - I'_1\sigma + w_1).$$

Comparant avec (71), on conclut

$$\delta_1 = \pm\gamma, \quad \alpha'_1 = D'\alpha, \quad \alpha_1 = D\alpha', \quad I_1 = I'D, \quad I'_1 = ID', \quad w_1 = DD'\varphi.$$

D'ailleurs, si l'on compare les coefficients de ξx^2 dans δ et de $x\xi^2$ dans γ [formules (18) et (26)], on voit que le second se déduit du premier en remplaçant g, h, g', h', par G, H, G', H', comme pour passer de s, s' à σ, σ'; donc c'est bien $+\gamma$ qui correspond à δ.

Portons les valeurs ci-dessus dans la syzygie (47); elle donne

$$D^2\alpha'^2 = D^2(I'\sigma' - D'\varphi)s + D_1(D'\sigma s' - \sigma' w - 2D'\alpha\pi + ID'\pi^2).$$

Comparant avec (48), on obtient immédiatement

$$D_1 = D^2, \qquad \text{d'où} \qquad D'_1 = D'^2.$$

De même, la comparaison de la transformée de (34) avec (69) donne $\beta_1 = - D\varepsilon$, d'où $\beta'_1 = - D'\varepsilon'$. Par l'emploi des autres syzygies, on trouve de même successivement

$$\varepsilon_1 = - DD'\beta, \quad \varepsilon'_1 = - DD'\beta', \quad \gamma_1 = DD'\delta, \quad t_1 = - DD'\tau, \quad \tau_1 = - DD't.$$

La symétrie dualistique entre les formations est donc représentée dans les formules par ce fait, que les syzygies restent invariables ou se changent les unes dans les autres, quand on y remplace respectivement

$$s, \quad w, \quad t, \quad D, \quad I, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon, \quad \sigma, \quad \varphi, \quad \tau$$

par

$$\sigma, \quad DD'\varphi, \quad -DD'\tau, \quad D^2, \quad I'D, \quad D\alpha', \quad -D\varepsilon, \quad DD'\delta, \quad \gamma, \quad -DD'\beta, \quad Ds, \quad w, \quad -DD't,$$

et de même pour les lettres accentuées, en laissant π invariable.

En combinant la symétrie dualistique avec la symétrie relative aux accents, on retrouve, à des puissances près de D et D', la symétrie croisée spéciale que j'ai désignée sous le nom de *réciprocité;* toutefois cette dernière, dont la signification géométrique est ainsi rendue évidente, se présente plus simplement pour les applications que la superposition pure et simple des deux symétries géométriques.

10. La syzygie (29), considérée à un autre point de vue, fournit aussi la solution immédiate du problème suivant :

Former l'équation des coniques passant par les quatre points communs à s et s', et tangentes à une droite donnée, qui ne passe par aucun de ces quatre points.

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de la droite donnée, $\sigma_1, \sigma'_1, \varphi_1, \pi_1, \ldots$ ce que deviennent $\sigma, \sigma', \varphi, \pi, \ldots$ quand on y introduit ces valeurs pour ξ, η, ζ. La syzygie (29) ne renferme plus que les variables ponctuelles x, y, z ; et elle nous apprend que les valeurs de ces variables, qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$\pi_1 = 0, \qquad \sigma'_1 s^2 - \varphi_1 ss' + \sigma_1 s'^2 = 0,$$

satisfont par cela même à la condition

$$\delta_1^2 = 0,$$

autrement dit, que les quatre points où la droite donnée π_1 coupe le système de deux coniques Γ, Γ' (passant par les points communs à s et s') que représente $\sigma'_1 s^2 - \varphi_1 ss' + \sigma_1 s'^2$, sont situés sur la conique δ_1 comptée deux fois, c'est-à-dire se réduisent à deux. Il faut donc ou que les deux coniques Γ, Γ' se coupent sur la droite donnée, ce qui est impossible puisqu'elles ont déjà quatre points communs, savoir ceux qui sont communs à s et s', ou qu'elles soient tangentes à la droite donnée, auquel cas elles fournissent la solution du problème. Il y a donc deux coniques répondant à la question, et leur équation est

$$(93) \qquad 2\sigma_1 s' - \left(\varphi_1 \pm \sqrt{\varphi_1^2 - 4\sigma_1\sigma'_1}\right)s = 0.$$

La syzygie (46) fournit la solution du problème analogue où il s'agit de trouver les coniques tangentes à une droite donnée et passant par les quatre points communs à s et w.

On peut, en effet, l'écrire, en tenant compte de (48),

$$\varepsilon^2 = (\mathrm{DD'}\varphi - \mathrm{ID'}\sigma - \mathrm{I'D}\sigma')s^2 + (\mathrm{D}\sigma' + \mathrm{I'}\sigma)ws - \sigma w^2 + \pi\mathrm{E},$$

E étant un covariant mixte composé, de classe 1 et d'ordre 4.

Donc, par le même raisonnement que plus haut, l'équation des deux coniques demandées sera

$$(94)\qquad 2\sigma_1 w - \left[\mathrm{D}\sigma'_1 + \mathrm{I'}\sigma_1 \pm \sqrt{(\mathrm{D'}\sigma'_1 - \mathrm{I'}\sigma_1)^2 + 4\mathrm{D'}\sigma_1(\mathrm{D}\varphi_1 - \mathrm{I}\sigma_1)}\right]s = 0.$$

Pour les problèmes réciproques, où l'on demanderait les équations des coniques passant par un point donné et tangentes aux quatre tangentes communes à σ et σ', ou à σ et φ, on peut recourir aux syzygies réciproques de (29) et de (47), c'est-à-dire aux syzygies (71) et (39); ou plus simplement transformer par réciprocité les formules (93) et (94), ce qui donne, pour le premier cas,

$$(95)\qquad 2\mathrm{D'}s'_1\sigma - \left(w_1 \pm \sqrt{w_1^2 - 4\mathrm{DD'}s_1 s_1}\right)\sigma' = 0$$

et, pour le second,

$$(96)\qquad 2\mathrm{D}s_1\varphi - \left[\mathrm{D}s'_1 + \mathrm{I}s_1 \pm \sqrt{(\mathrm{D}s'_1 - \mathrm{I}s_1)^2 + 4s_1(w_1 - \mathrm{I'}s_1)}\right]\sigma = 0.$$

Nous verrons plus loin que les formules (93) à (96) ne sont que des cas particuliers d'une formule donnant la solution d'un problème beaucoup plus général que ceux que nous venons de traiter.

11. Examinons maintenant de près la syzygie (76), dont j'ai signalé précédemment l'importance :

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} t\tau = {} & \mathrm{DD'}(\mathrm{II'} - \mathrm{DD'})\pi^3 - \mathrm{D'}(\mathrm{I}^2 + \mathrm{I'D})\alpha\pi^2 - \mathrm{D}(\mathrm{I'}^2 + \mathrm{ID'})\alpha'\pi^2 + 2\mathrm{ID'}\alpha^2\pi \\ & + (\mathrm{II'} + 3\mathrm{DD'})\alpha\alpha'\pi + 2\mathrm{I'D}\alpha'^2\pi - \mathrm{D'}\alpha^3 - \mathrm{I'}\alpha^2\alpha' - \mathrm{I}\alpha\alpha'^2 - \mathrm{D}\alpha'^3. \end{aligned}\right.$$

Le premier membre est le produit d'un covariant pur de troisième ordre par un contrevariant de troisième classe, et représente par conséquent le produit de l'équation ponctuelle d'une cubique par l'équation tangentielle d'une courbe de troisième classe. Le second membre est une forme ternaire cubique aux variables π, α, α', avec tous les coefficients invariants.

Si donc on introduit dans π, α, α', qui sont des covariants mixtes linéaires par rapport aux deux séries de variables, les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 d'une droite Δ qui ne soit pas tangente à la courbe τ, cette forme ternaire donnera l'équation de t exprimée au moyen de trois coordonnées ponctuelles, c'est-à-dire rapportée à trois droites dont l'une est la droite arbitraire Δ, et les deux autres dépendent, d'une manière déterminée, de la position de Δ. Si, au contraire, on introduit dans π, α, α' les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point arbitraire P non situé sur la cubique t, la même forme ternaire représentera en coordonnées tangentielles la courbe de troisième classe τ, un des sommets du triangle de référence étant le point P, et les deux autres étant déterminés par la position assignée à ce point.

Mais, si l'on calcule le covariant hessien de la forme ternaire cubique aux variables π, α, α', on trouve sans peine, en employant les formules connues, qu'il se réduit, à un facteur numérique près, à la forme elle-même multipliée par l'invariant composé

$$\text{(97)} \qquad E = 27 D^2 D'^2 - I^2 I'^2 - 18 I I' D D' + 4 I^3 D' + 4 I'^3 D.$$

Par conséquent, la forme ternaire en π, α, α' est toujours décomposable en trois facteurs linéaires par rapport à ces variables, qui elles-mêmes sont linéaires par rapport à x, y, z, comme par rapport à ξ, η, ζ. Donc le covariant t représente trois droites, et le contrevariant τ trois points. Si E est nul, deux au moins de ces droites et deux au moins de ces points coïncident, puisque la théorie des formes ternaires cubiques apprend que dans ce cas la forme en π, α, α' admet au moins un facteur carré.

Plaçons-nous pour le moment dans le cas général où E n'est pas nul. Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'une droite quelconque Δ, assujettie *seulement* à ne pas passer par un des trois points que représente τ. Alors τ prend une valeur $\tau_1 \gtrless 0$, et les coordonnées des points d'intersection de la droite Δ avec les trois droites que représente t satisferont aux deux conditions

$$t = 0, \qquad \pi = 0$$

et, par suite, en vertu de la syzygie (76), à celle-ci

$$\text{(98)} \qquad D'\alpha^3 + I'\alpha^2\alpha' + I\alpha\alpha'^2 + D\alpha'^3 = 0$$

(où il faut supposer qu'on ait remplacé, dans α et α', ξ, η, ζ par ξ_1, η_1, ζ_1). Le discriminant de cette équation étant précisément E, elle ne peut pas avoir de racines égales, quelle que soit la situation de Δ. Mais il est évident géométriquement que si Δ passait par un des sommets du triangle t, et seulement dans ce cas, deux racines de (98) devraient devenir égales : donc ces deux restrictions imposées à Δ, savoir de ne pas passer par un des trois points τ, ou de ne pas passer par un des sommets du triangle t, sont équivalentes, et les trois points τ ne sont autres que les trois sommets du triangle t. Cette corrélation bien connue est, comme on le voit, une conséquence immédiate de la syzygie (76).

Si l'une s des coniques fondamentales se décompose en deux droites, on a $D = 0$, et la syzygie (76) devient, comme il est aisé de le vérifier,

$$(99)\quad 4D't\tau = -\alpha\left[2D'(\alpha - I\pi) + \alpha'\left(I' + \sqrt{I'^2 - 4ID'}\right)\right]\left[2D'(\alpha - I\pi) + \alpha'\left(I' - \sqrt{I'^2 - 4ID'}\right)\right].$$

Les trois facteurs linéaires sont ainsi mis en évidence, et l'on voit que α est toujours l'un d'eux, et que les deux autres coïncident si $I'^2 = 4ID'$, comme cela devait être d'après (97). Dans la même hypothèse ($D = 0$), nous avons déjà vu que

$$\alpha^2 = \sigma(Is' - w);$$

donc l'intersection σ des deux droites qui composent s est un des sommets du triangle t (ou τ), et la conique dégénérée en deux droites coïncidentes $Is' - w$ est un des côtés du même triangle.

Soient maintenant, dans le cas général où D et E ne sont pas nuls, ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'une droite Δ passant par un des trois points τ. Ces valeurs de ξ, η, ζ, introduites dans toutes les formations, annulent τ et, par conséquent, le second membre de la syzygie (76), *quels que soient* x, y, z; un des facteurs linéaires de la forme ternaire en α, α', π est donc nul identiquement, quels que soient x, y, z, pour ces valeurs particulières de ξ, η, ζ; donc enfin, la droite Δ ainsi choisie et les deux droites α_1, α'_1, qui en dépendent, concourent en un même point. Réciproquement, si l'on détermine ξ, η, ζ par la condition que les trois droites π, α, α' soient concourantes, l'une de ces trois quantités peut s'exprimer, quels que soient x, y, z, en fonction linéaire et homogène des deux autres; il en est donc de même des trois facteurs linéaires du second membre de (76), et, par suite, les trois droites qui constituent la cubique t passent par un même point, savoir le point de concours de π, α et α'. Mais cette conséquence est inadmissible, puisque les trois points τ seraient alors coïncidents, bien que l'on eût $E \lessgtr 0$. Il faut donc que l'un des trois facteurs s'annule identiquement, quels que soient x, y, z, pour les valeurs en question de ξ, η, ζ; dès lors, il en est de même du premier membre de (76), c'est-à-dire de τ; et la droite Δ passe par l'un des trois points τ.

On doit donc retrouver τ en exprimant que $\pi + k\alpha + k'\alpha'$, où k et k' sont deux indéterminées, s'évanouit identiquement quels que soient x, y, z, ce qui fournit trois équations, et en éliminant k et k' entre ces trois équations. On est ainsi conduit à égaler à zéro le déterminant

$$(100) \qquad \begin{vmatrix} m\,\xi + n\,\eta + p\,\zeta & m'\,\xi + n'\,\eta + p'\,\zeta & \xi \\ m_1\xi + n_1\eta + p_1\zeta & m'_1\xi + n'_1\eta + p'_1\zeta & \eta \\ m_2\xi + n_2\eta + p_2\zeta & m'_2\xi + n'_2\eta + p'_2\zeta & \zeta \end{vmatrix},$$

où m, n, p, ... ont les valeurs suivantes

$$(101) \quad \begin{cases} m = Aa' + Gg' + Hh', & n = Ha' + Fg' + Bh', & p = Ga' + Cg' + Fh', \\ m_1 = Hb' + Ah' + Gf', & n_1 = Bb' + Ff' + Hh', & p_1 = Fb' + Gh' + Cf', \\ m_2 = Gc' + Hf' + Ag', & n_2 = Fc' + Bf' + Hg', & p_2 = Cc' + Gg' + Ff', \end{cases}$$

et m', n', p', ..., les valeurs qui se déduisent des précédentes en permutant les lettres accentuées avec les lettres non accentuées. Le déterminant (100) a bien, en effet, le degré, la classe et le poids convenables pour être égal à τ.

Déterminons encore ξ, η, ζ par la condition que α ne diffère de π que par un facteur constant k. Un raisonnement analogue à celui de tout à l'heure montrerait que α' doit aussi être égal à $k'\pi$, k' étant un autre facteur constant, et que τ doit être nul. Mais, en outre, les syzygies (57), (58), (63) montrent que σt, φt, $\sigma' t$ deviennent divisibles par π, c'est-à-dire, puisque, dans ces expressions, t seul contient les variables x, y, z, que t devient divisible par π. Donc π, ou la droite choisie, est un des côtés du triangle t. De là une méthode nouvelle pour trouver les équations des trois côtés du triangle t, ce qui équivaut, comme on sait, à la réduction simultanée de s et s' à la forme canonique (somme de trois carrés). On a

$$\begin{aligned}
\pi &= \xi x + \eta y + \zeta z,\\
\alpha &= (m\xi + n\eta + p\zeta)x + (m_1\xi + n_1\eta + p_1\zeta)y + (m_2\xi + n_2\eta + p_2\zeta)z,
\end{aligned}$$

m, n, p, ... ayant les valeurs (101). Pour que $u = k\pi$ identiquement par rapport à x, y, z, il faut poser

$$(102)\qquad \left\{\begin{aligned}
(m - k)\xi + n\eta + p\zeta &= 0,\\
m_1\xi + (n_1 - k)\eta + p_1\zeta &= 0,\\
m_2\xi + n_2\eta + (p_2 - k)\zeta &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour que ces trois équations soient satisfaites simultanément par un même système de valeurs de ξ, η, ζ, il faut que l'on ait

$$(103)\qquad \begin{vmatrix} m - k & n & p\\ m_1 & n_1 - k & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2 - k \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui détermine k par une équation cubique. Soient k_1, k_2, k_3, les trois racines de cette équation; en les reportant successivement dans les équations (102), on aura trois systèmes de valeurs (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i = 1, 2, 3)$; et

$$(104)\qquad \xi_i x + \eta_i y + \zeta_i z = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

donnera les équations des trois côtés du triangle t. Les mêmes racines k_1, k_2, k_3, introduites dans les trois équations

$$\begin{aligned}
(m - k)x + m_1 y + m_2 z &= 0,\\
nx + (n_1 - k)y + n_2 z &= 0,\\
px + p_1 y + (p_2 - k)z &= 0,
\end{aligned}$$

donneraient d'ailleurs évidemment les trois systèmes de valeurs (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$, qui, portés dans

$$x_i\xi + y_i\eta + z_i\zeta = 0,$$

fourniraient les équations tangentielles des trois sommets de τ.

Comme application, soient

$$\begin{aligned}
s &= 3x^2 + 9y^2 + 4yz - 2xz - 6xy,\\
s' &= 5x^2 + 8y^2 - 2z^2 - 6xz - 14xy.
\end{aligned}$$

Les formules (15) donnent

$$\begin{array}{llllll} A=-4, & B=-1, & C=18, & F=-3, & G=3, & H=-2, \\ A'=-16, & B'=-19, & C'=-9, & F'=21, & G'=24, & H'=-14, \end{array}$$

et les formules (101)

$$\begin{array}{llllll} m=-15, & n=6, & p=-18, & m_1=12, & n_1=6, & p_1=-45, \\ m_2=6, & n_2=12, & p_2=-45. \end{array}$$

L'équation (103) devient

$$k^3+54k^2+891k+4374=0,$$

et ses trois racines sont -9, -18, -27. Les équations (102) donnent alors pour ξ, η, ζ les trois systèmes de valeurs (0, 3, 1); (-2, 1, 0); (1, 1, 1); ce qui donne enfin, pour les trois côtés du triangle t,

$$3y+z=0, \qquad 2x-y=0, \qquad x+y+z=0.$$

12. La syzygie (76), que nous venons d'étudier, nous a donné l'équation de t rapportée, en coordonnées trilinéaires, à trois axes dont un est arbitraire (avec cette seule condition de ne pas passer par l'un des sommets de τ); et aussi l'équation de τ rapportée, en coordonnées tangentielles, à trois points dont un est arbitraire (avec cette seule condition de ne pas être sur l'un des côtés de t).

Les syzygies (77), (78), (79), (80), (81) et (82) nous donnent les équations ponctuelles de δ, β, β', ε, ε', γ, rapportées aux mêmes coordonnées que t dans la syzygie (76); avec cette seule différence que les coefficients ne sont plus des invariants, mais des contrevariants, et que leurs valeurs dépendent, par conséquent, de la position de la droite arbitraire choisie pour l'un des côtés du triangle de référence. De même, les syzygies (33), (40), (41), (42), (43), (65) donnent les équations tangentielles de δ, β, β', ε, ε', γ, rapportées aux mêmes coordonnées que τ dans la syzygie (76), avec cette seule différence que les coefficients sont des covariants purs, dont les valeurs dépendent de la position du point arbitraire choisi pour l'un des sommets du triangle de référence. Dans tous les cas, les coordonnées sont les trois covariants mixtes linéo-linéaires π, α, α'.

Il est facile d'obtenir des expressions analogues pour les équations ponctuelles de s, s', w, et tangentielles de σ, σ', φ, rapportées à ces mêmes coordonnées. Si l'on multiplie les syzygies (30), (31), (87) par τ, et qu'on y remplace $\tau\delta$, $\tau\beta$, $\tau\beta'$, $\tau\varepsilon$, $\tau\varepsilon'$, $\tau\gamma$ par leurs valeurs tirées des syzygies (77) à (82); ou encore si l'on tire des trois équations (48), (49), (50) les expressions de s, s', w, considérées comme seules inconnues, on arrive, en remarquant que le déterminant de (48), (49) et (50) est, dans ce calcul, égal à τ^2, en vertu de (83), aux trois syzygies suivantes

$$(105)\quad \left\{ \begin{aligned} \tau^2 s &= \Theta\alpha^2 + 2\Theta'\alpha\alpha' + \Lambda\alpha'^2 + 2(\mathrm{D}\Theta - \mathrm{I}\Theta')\alpha'\pi \\ &\quad + 2(\mathrm{D}'\Lambda - \mathrm{I}'\Theta')\alpha\pi + [(\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\Theta' - \mathrm{I}'\mathrm{D}\Theta - \mathrm{ID}'\Lambda]\pi^2, \end{aligned} \right.$$

$$(106)\quad \left\{ \begin{aligned} \tau^2 s' &= \Theta'\alpha'^2 + 2\Theta\alpha\alpha' + \Lambda'\alpha^2 + 2(\mathrm{D}'\Theta' - \mathrm{I}'\Theta)\alpha\pi \\ &\quad + 2(\mathrm{D}\Lambda' - \mathrm{I}\Theta)\alpha'\pi + [(\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\Theta - \mathrm{ID}'\Theta' - \mathrm{I}'\mathrm{D}\Lambda']\pi^2, \end{aligned} \right.$$

$$(107)\quad \left\{ \begin{aligned} \tau^2 w &= (\mathrm{I}'\Theta - \mathrm{D}'\Theta')\alpha^2 + 2(\mathrm{I}\Theta - \mathrm{D}\Lambda')\alpha\alpha' + (\mathrm{I}\Theta' - \mathrm{D}\Theta)\alpha'^2 \\ &\quad + 2[(\mathrm{ID}' - \mathrm{I}'^2)\Theta' - \mathrm{DD}'\Theta + \mathrm{I}'\mathrm{D}'\Lambda]\alpha\pi \\ &\quad + 2[(\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2)\Theta - \mathrm{DD}'\Theta' + \mathrm{ID}\Lambda']\alpha'\pi \\ &\quad + [(\mathrm{I}^2\mathrm{I}' + 2\mathrm{IDD}' - \mathrm{I}'^2\mathrm{D})\Theta + \mathrm{D}'(\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2)\Theta' - (\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\mathrm{D}\Lambda']\pi^2, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles j'ai posé, pour abréger,

$$(108)\quad \left\{ \begin{aligned} \Theta &= \mathrm{I}'\sigma\sigma' - \mathrm{D}\sigma'^2 - \mathrm{D}'\sigma\varphi, \\ \Theta' &= \mathrm{I}\sigma\sigma' - \mathrm{D}'\sigma^2 - \mathrm{D}\sigma'\varphi, \\ \Lambda &= \mathrm{D}\sigma\sigma' - \mathrm{I}'\sigma^2 + \mathrm{I}\sigma\varphi - \mathrm{D}\varphi^2, \\ \Lambda' &= \mathrm{D}'\sigma\sigma' - \mathrm{I}\sigma'^2 + \mathrm{I}'\sigma'\varphi - \mathrm{D}'\varphi^2, \end{aligned} \right.$$

ce qui entraîne les relations

$$(109)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{I}\Theta - \mathrm{D}\Lambda' = \mathrm{I}'\Theta' - \mathrm{D}'\Lambda, \\ &\Theta\varphi - \Theta'\sigma' = \Lambda'\sigma, \\ &\Theta'\varphi - \Theta\sigma = \Lambda\sigma', \end{aligned} \right.$$

et aussi les suivantes, d'une grande importance,

$$(110)\quad \left\{ \begin{aligned} \Theta\Lambda - \Theta'^2 &= \tau^2\sigma, \\ \Theta'\Lambda' - \Theta^2 &= \tau^2\sigma', \\ \Lambda\Lambda' - \Theta\Theta' &= \tau^2\varphi. \end{aligned} \right.$$

Les syzygies (105), (106), (107) peuvent être considérées comme donnant pour s, s', w, des expressions canoniques éminemment commodes pour résoudre, avec l'aide des relations (109) et (110), les problèmes dans lesquels il s'agit de trouver l'équation tangentielle d'un lieu quelconque dépendant des deux coniques fondamentales et d'une droite variable.

Tout d'abord, les intersections d'une droite arbitraire π avec s et s' sont évidemment données par les deux équations

$$\Theta\alpha^2 + 2\Theta'\alpha\alpha' + \Lambda\alpha'^2 = 0,$$
$$\Lambda'\alpha^2 + 2\Theta\alpha\alpha' + \Theta'\alpha'^2 = 0,$$

dont les discriminants sont $\tau^2\sigma$ et $\tau^2\sigma'$, comme cela devait être, l'invariant commun $\tau^2\varphi$, et le résultant $\tau^4(\varphi^2 - 4\sigma\sigma')$. Donc $\varphi^2 - 4\sigma\sigma'$ est l'équation tangentielle des quatre points communs à s et s', et φ, d'après la signification connue de l'invariant binaire, est l'enveloppe des droites coupées harmoniquement par s et s'.

Proposons-nous de former l'équation de l'enveloppe des dróites coupées harmoniquement par les deux coniques covariantes

$$\lambda w + \mu s + \nu s', \qquad \lambda' w + \mu' s + \nu' s',$$

qui dépendent chacune de deux arbitraires. Les intersections de ces coniques avec une droite quelconque π seront données, en utilisant les formules (105) à (107), par l'évanouissement simultané de la forme binaire

$$\begin{aligned}&[\lambda(\mathrm{I}'\Theta - \mathrm{D}'\Theta') + \mu\Theta + \nu\Lambda']\alpha^2\\ &\quad + 2[\lambda(\mathrm{I}\Theta - \mathrm{D}\Lambda') + \mu\Theta' + \nu\Theta]\alpha\alpha' + [\lambda(\mathrm{I}\Theta' - \mathrm{D}\Theta) + \mu\Lambda + \nu\Theta']\alpha'^2,\end{aligned}$$

et de celle qui s'en déduirait en remplaçant λ, μ, ν par λ', μ', ν'. Il suffit donc d'égaler à zéro l'invariant commun de ces deux formes, ce qui donne, en tenant compte des relations (109) et (110), et divisant par τ^2, pour l'équation demandée

$$(111)\quad 0 = \left\{\begin{aligned}&2\lambda\lambda'(\mathrm{I}'\mathrm{D}\sigma' + \mathrm{I}\mathrm{D}'\sigma - \mathrm{D}\mathrm{D}'\varphi) + 2\mu\mu'\sigma + 2\nu\nu'\sigma' + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)(\mathrm{I}'\sigma + \mathrm{D}\sigma')\\ &+ (\lambda\nu' + \lambda'\nu)(\mathrm{I}\sigma' + \mathrm{D}'\sigma) + (\mu\nu' + \mu'\nu)\varphi.\end{aligned}\right.$$

C'est donc une conique covariante. Au moyen de (111), on peut résoudre des questions du genre de celle-ci :

Étant donnée une conique V *du faisceau* $s + ks'$, *il existe une autre conique* V', *de la forme* $\lambda' w + \mu' s + \nu' s'$, *qui, réunie à* V, *coupe harmoniquement toutes les tangentes de* s. *Trouver l'enveloppe de* V'.

Il suffit évidemment d'exprimer que l'une des coniques dont on part dans le problème précédent se réduit à $s + ks'$, et que la conique représentée par (111) se réduit à σ, ce qui donne cinq relations entre les six indéterminées, savoir

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = k,$$
$$2k\nu' + D\lambda' + Ik\lambda' = 0, \qquad \nu' + k\mu' = 0.$$

On satisfait à ces conditions en prenant

$$\lambda' = 2k^2, \qquad \mu' = D + Ik, \qquad \nu' = -k(D + Ik);$$

d'où, pour l'équation de la seconde conique initiale,

$$k^2(2w - Is') + k(Is - Ds') + Ds = 0,$$

et pour celle de l'enveloppe cherchée

$$(112) \qquad (Is + Ds')^2 - 8Dws = 0:$$

c'est donc une courbe du quatrième ordre.

Pour obtenir l'équation tangentielle de la conique covariante la plus générale exprimée en coordonnées ponctuelles, savoir :

$$\lambda w + \mu s + \nu s',$$

il suffit évidemment de faire dans la formule (111) $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$; ce qui donne

$$(113) \quad \begin{cases} \lambda^2(I'D\sigma' + ID'\sigma - DD'\varphi) + \mu^2\sigma \\ \quad + \nu^2\sigma' + \lambda\mu(I'\sigma + D\sigma') + \lambda\nu(I\sigma' + D'\sigma) + \mu\nu\varphi = 0. \end{cases}$$

Le discriminant du premier membre de (113), considéré comme forme quadratique ternaire en λ, μ, ν, se réduit à $\frac{1}{4}\tau^2$.

13. Comme cas particulier des équations (105), (106), (107), supposons $\Theta = \Theta' = 0$, ce qui équivaut, d'après (110), à supposer $\sigma = \sigma' = 0$, c'est-à-dire à prendre pour l'un des côtés du triangle de référence une des quatre tangentes communes à s et s'. Alors les équations dont il s'agit deviennent, puisque (83) et (108) donnent, dans ce cas,

$$\tau^2 = DD\varphi^3, \qquad \Lambda = -D\varphi^2, \qquad \Lambda' = -D'\varphi^2,$$

$$(114) \quad \begin{cases} D'\varphi s = -\alpha'^2 - 2D'\alpha\pi + ID'\pi^2, \\ D\varphi s' = -\alpha^2 - 2D\alpha'\pi + I'D\pi^2, \\ \varphi w = 2\alpha\alpha' - 2I'\alpha\pi - 2I\alpha'\pi + (II' + DD')\pi^2. \end{cases}$$

comme on aurait pu d'ailleurs le déduire immédiatement des syzygies (48), (49), (50).

Les formules (114) donnent les équations de s, s', ϖ sous une forme éminemment commode pour les problèmes où il s'agit de calculer des invariants, puisque tous les coefficients y sont déjà des invariants.

Elles montrent, par exemple, que, pour $D = 0$, s se décompose en deux droites $\alpha' \pm \pi\sqrt{ID'}$, et ϖ en deux droites, π et $2\alpha' - I'\pi$, tandis que α est identiquement nul; que, pour $II' - DD' = 0$, ϖ se décompose en deux droites, $\alpha - I\pi$, $\alpha' - I'\pi$. Elles montrent encore, dans le cas général, que si M, M' sont les points de contact respectifs de s et de s' avec la droite π, α passe par M' et α' par M; si N et N' sont les seconds points d'intersection de α' avec s, et de α avec s', la tangente à s en N est $I\pi - 2\alpha$ et passe par M', la tangente à s' en N' est $I'\pi - 2\alpha'$ et passe par M; de telle sorte que M est le pôle de α par rapport à s', et M' le pôle de α' par rapport à s. La signification géométrique des invariants I, I' apparaît alors clairement : si $I = 0$, par exemple, α est tangente à s en N, les trois points M', N, N' sont en ligne droite, et l'on a ce théorème :

Si l'invariant I *des deux coniques s et s' est nul, la polaire, par rapport à s', de l'un quelconque des quatre points de contact de s avec les tangentes communes à s et s' sera tangente à s.*

Au point de vue dualistique, I' correspond à I, comme nous l'avons vu ; on peut donc dire encore :

Si l'invariant I *des deux coniques s et s' est nul, le pôle, par rapport à s, de la tangente à s' en l'un quelconque des quatre points communs à s et s' sera situé sur s'.*

14. Comme exemple d'un calcul d'invariants, proposons-nous de former le discriminant de la conique covariante la plus générale

$$V = \lambda\varpi + \mu s + \nu s'.$$

En prenant s, s', ϖ sous la forme donnée par (114), V peut s'écrire

$$\varphi V = [(II' + DD')\lambda + I\mu + I'\nu]\pi^2 - \frac{\nu}{D}\alpha^2 - \frac{\mu}{D'}\alpha'^2$$
$$+ 2\lambda\alpha\alpha' - 2(I'\lambda + \mu)\alpha\pi - 2(I\lambda + \nu)\alpha'\pi.$$

Et dès lors, en appliquant la formule (6), on trouve, pour le discriminant $D_{\lambda\mu\nu}$ de V, l'expression

$$(115)\quad \left\{\begin{aligned} D_{\lambda\mu\nu} = {} & DD'(II' - DD')\lambda^3 + D(I'^2 + ID')\lambda^2\mu + D'(I^2 + I'D)\lambda^2\nu + 2I'D\lambda\mu^2 \\ & + (II' + 3DD')\lambda\mu\nu + 2ID'\lambda\nu^2 + D\mu^3 + I\mu^2\nu + I'\mu\nu^2 + D'\nu^3. \end{aligned}\right.$$

Cette expression de $D_{\lambda\mu\nu}$ devient identique à celle de $t\tau$ [syzygie (76)], si l'on y remplace λ, μ, ν par π, $-\alpha'$, $-\alpha$. On en conclut que $D_{\lambda\mu\nu}$ est décomposable en trois facteurs linéaires par rapport à λ, μ, ν, et que les systèmes de valeurs de λ, μ, ν, pour lesquels V se décompose en deux droites, sont précisément les systèmes de valeurs de π, $-\alpha'$, $-\alpha$ qui annulent $t\tau$. En d'autres termes, si l'on introduit dans π, α, α' les coordonnées tangentielles d'une droite arbitraire Δ et les coordonnées ponctuelles d'un point M appartenant à l'un des côtés du triangle t (ou encore celles d'un point M arbitraire et d'une droite Δ passant par un des sommets de t) la conique $V = \pi w - \alpha' s - \alpha s'$, que je dirai être *associée* à Δ et M (ou à M et Δ), dégénérera en deux droites. Si, en particulier, Δ restant arbitraire, on prend pour M un des trois points où Δ coupe les côtés de t, on aura $\pi = 0$, et l'on obtiendra les trois coniques du faisceau $\alpha' s + \alpha s'$ qui dégénèrent en deux droites, c'est-à-dire les couples de cordes d'intersection de s et s'; les valeurs correspondantes de α et α' satisfont, comme le montre d'ailleurs immédiatement la formule (115), à l'équation déjà obtenue (98)

$$D\alpha'^3 + I\alpha'^2\alpha + I'\alpha'\alpha^2 + D'\alpha^3 = 0.$$

Si, Δ restant arbitraire, on prend pour M un des sommets de t, il est naturel de prévoir que V dégénérera en deux droites coïncidentes : nous allons voir que c'est en effet ce qui a lieu.

Désignons par ψ la fonction de λ, μ, ν qui constitue le second membre de (115), et par ψ_1, ψ_2, ψ_3 ses trois facteurs linéaires par rapport à λ, μ, ν. Posons en outre

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= ID'\lambda^2 + \mu^2 + I'\lambda\mu + D'\lambda\nu, \\ \rho' &= I'D\lambda^2 + \nu^2 + I\lambda\nu + D\lambda\mu, \\ \chi &= \mu\nu - DD'\lambda^2. \end{aligned}\right.$$

ce qui permet, en vertu de (113), d'écrire ainsi l'équation tangentielle de V :

$$\rho\sigma + \rho'\sigma' + \chi\varphi = 0. \tag{117}$$

On vérifie aisément les trois relations

$$(118)\quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{d\lambda} = 2\,\mathrm{I'D}\rho + 2\,\mathrm{ID'}\rho' + (\mathrm{II'} + 3\,\mathrm{DD'})\chi, \\ \dfrac{d\psi}{d\mu} = 3\,\mathrm{D}\rho + \mathrm{I'}\rho' + 2\,\mathrm{I}\chi, \\ \dfrac{d\psi}{d\nu} = \mathrm{I}\rho + 3\,\mathrm{D'}\rho' + 2\,\mathrm{I'}\chi. \end{cases}$$

Lorsqu'un système de valeurs de λ, μ, ν annule un des facteurs de ψ, ψ_3 par exemple, les valeurs des trois dérivées $\frac{d\psi}{d\lambda}$, $\frac{d\psi}{d\mu}$, $\frac{d\psi}{d\nu}$ deviennent évidemment égales à la valeur du produit $\psi_1\psi_2$ multipliée par les valeurs de certains coefficients qui sont des fonctions irrationnelles des seuls invariants. Il en est donc de même, en vertu de (118), des valeurs de ρ, ρ', χ; par suite, l'équation (117), en supprimant le facteur $\psi_1\psi_2$ commun à ρ, ρ', χ, prend la forme

$$\rho_1\sigma + \rho'_1\sigma' + \chi_1\varphi = 0,$$

où les valeurs de ρ_1, ρ'_1, χ_1 ne dépendent pas de celles de λ, μ, ν, mais uniquement de celles des invariants; seulement ces trois coefficients ont des valeurs numériques différentes, suivant que c'est l'un ou l'autre des trois facteurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 qui s'annule. Donc l'équation tangentielle reste la même, quelle que soit Δ, pour tout point M situé sur un même côté du triangle t; et, comme elle représente le carré de l'équation tangentielle du point double de la conique dégénérée V, on en conclut que ce point double occupe une position fixe.

Si M coïncide avec un des sommets de t, deux des facteurs de ψ s'annulent; il en est donc de même de $\frac{d\psi}{d\lambda}$, $\frac{d\psi}{d\mu}$, $\frac{d\psi}{d\nu}$ et, par suite, aussi de ρ, ρ', χ (1); l'équation (117) est donc satisfaite iden-

(1) A moins que le déterminant E des équations (118) ne soit nul: ce cas sera discuté plus tard.

tiquement, ce qui signifie que la conique associée à Δ et M dégénère en deux droites coïncidentes ; et réciproquement.

Il existe donc trois systèmes de valeurs de π, α, α' qui rendent $\pi w - \alpha' s - \alpha s'$ un carré parfait, et il n'en existe que trois.

Mais, d'autre part, le second membre de la syzygie (13), considéré comme forme ternaire cubique aux variables φ, s, s', se décompose en trois facteurs, car son hessien n'en diffère que par le coefficient $-\frac{1}{108}$E. Chacun de ces facteurs représente donc, soit le carré d'un des côtés de t, soit le produit de deux côtés. Mais cette seconde hypothèse est inadmissible, car un même côté de t entrerait alors en facteur dans deux expressions différentes

$$\lambda_1 w + \mu_1 s + \nu_1 s', \quad \lambda_2 w + \mu_2 s + \nu_2 s',$$

et, par suite, dans leur combinaison

$$(\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) s + (\lambda_2 \nu_1 - \lambda_1 \nu_2) s',$$

et passerait par deux des points communs à s et s' ; tandis que la syzygie (13) montre que t^2 ne peut pas s'annuler pour $s = s' = 0$, à moins que w ne s'annule aussi, ce qui entraîne évidemment une relation invariante (nous verrons plus loin que cette relation est $E = 0$). Donc, si t_1, t_2, t_3 sont les trois côtés du triangle t, les trois coniques de la forme $\lambda w + \mu s + \nu s'$ qui se réduisent à deux droites coïncidentes sont précisément les facteurs du second membre de la syzygie (13) ; et ces trois droites doubles sont précisément t_1, t_2, t_3.

Donc aussi on peut inversement mettre s, s', w sous la forme suivante

$$(119) \qquad \left\{ \begin{aligned} w &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2, \\ s &= k_1 t_1^2 + k_2 t_2^2 + k_3 t_3^2, \\ s' &= k'_1 t_1^2 + k'_2 t_2^2 + k'_3 t_3^2, \end{aligned} \right.$$

avec la relation

$$(120) \qquad t^2 = \theta t_1^2 t_2^2 t_3^2,$$

où θ est un coefficient numérique ; et une conique quelconque du réseau, $V = \pi w - \alpha' s - \alpha s'$, sous la forme analogue

$$(121) \qquad \left\{ \begin{aligned} V = (\pi &- k_1 \alpha' - k'_1 \alpha) t_1^2 \\ &+ (\pi - k_2 \alpha' - k'_2 \alpha) t_2^2 + (\pi - k_3 \alpha' - k'_3 \alpha) t_3^2. \end{aligned} \right.$$

Il est clair que, pour que V dégénère en deux droites, il faut et il suffit que le coefficient de l'un des trois carrés s'évanouisse, auquel cas V se décomposera en deux droites se coupant en un des sommets de t : ce qui concorde bien avec le résultat obtenu ci-dessus relativement à l'invariabilité du point de concours des deux droites composant une conique dégénérée ; et aussi avec un des résultats obtenus au n° **11**, savoir que l'on retrouve les trois points τ en déterminant ξ, η, ζ par la condition que

$$\pi - k\alpha - k'\alpha'$$

s'annule quels que soient x, y, z (ou, en vertu de la réciprocité, les trois côtés du triangle t en déterminant x, y, z par la condition que cette même expression s'annule quels que soient ξ, η, ζ). On voit de plus que les trois systèmes de valeurs de k et de k' que fournit ce dernier calcul sont précisément les coefficients des trois carrés dans s et s' ramenés à la forme canonique (119).

Les coefficients des trois carrés dans le second membre de (121) étant précisément les trois facteurs linéaires en π, α, α', dont le produit est égal à $t\tau$ en vertu de la syzygie (76), et dont chacun, égalé à zéro, représente un des côtés du triangle t ou le sommet opposé, la formule (121) peut s'écrire

$$V = (t\tau)_1 t_1^2 + (t\tau)_2 t_2^2 + (t\tau)_3 t_3^2, \tag{122}$$

en désignant par $(t\tau)_1$, $(t\tau)_2$, $(t\tau)_3$ les valeurs que prennent les trois facteurs linéaires de $t\tau$ quand on y introduit les valeurs x_1, y_1, z_1, ξ_1, η_1, ζ_1, qui définissent le point M et la droite Δ auxquels V est associée.

15. L'analogie signalée plus haut entre les formules (115) et (76) peut être utilisée à un autre point de vue. Puisque le discriminant $D_{\lambda\mu\nu}$ peut être écrit sous forme de déterminant, il en est de même de $t\tau$. On obtient ainsi

$$t\tau = \begin{vmatrix} (II' + DD')\pi - I'\alpha - I\alpha' & \alpha' - I'\pi & \alpha - I\pi \\ D(\alpha' - I'\pi) & \alpha & D\pi \\ D'(\alpha - I\pi) & D'\pi & \alpha' \end{vmatrix}; \tag{123}$$

$t\tau$ est donc le résultant de trois équations linéaires, que l'on peut, en se reportant aux relations (114), écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(124)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi_1 \frac{dw}{d\pi} + \alpha_1 \frac{dw}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{dw}{d\alpha'} = 0,\\ &\pi_1 \frac{ds'}{d\pi} + \alpha_1 \frac{ds'}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{ds'}{d\alpha'} = 0,\\ &\pi_1 \frac{ds}{d\pi} + \alpha_1 \frac{ds}{d\alpha} + \alpha'_1 \frac{ds}{d\alpha'} = 0 \end{aligned}\right.$$

ou

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi_1 \frac{dw}{d\pi} - \alpha_1 \frac{ds'}{d\pi} - \alpha'_1 \frac{ds}{d\pi} = 0,\\ &\pi_1 \frac{dw}{d\alpha} - \alpha_1 \frac{ds'}{d\alpha} - \alpha'_1 \frac{ds}{d\alpha} = 0,\\ &\pi_1 \frac{dw}{d\alpha'} - \alpha_1 \frac{ds'}{d\alpha'} - \alpha'_1 \frac{ds}{d\alpha'} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le groupe d'équations (125) n'est autre que

$$\frac{dV}{d\pi} = 0, \qquad \frac{dV}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{dV}{d\alpha'} = 0,$$

en désignant toujours par V la conique $\pi_1 w - \alpha_1 s' - \alpha'_1 s$; il exprime donc que t est le lieu des points dont les coordonnées, introduites dans V, font dégénérer cette conique en deux droites, et aussi [à cause de la parfaite symétrie des équations (125) par rapport à π et π_1, α et α_1, α' et α'_1] le lieu des points doubles de ces coniques dégénérées, ce que nous savions déjà.

Le groupe (124) exprime que t est le lieu des points dont les polaires par rapport à w, s, s' sont concourantes, et le lieu des points de concours de ces polaires.

D'ailleurs, si l'on écrit explicitement les équations (124), ou les équations (125), en affectant l'indice 1 à l'un des points qui y figurent symétriquement, l'indice 2 à l'autre, on obtient dans les deux cas les trois mêmes relations entre les coordonnées de ces deux points, savoir :

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\pi_1\pi_2 - \mathrm{I}(\pi_1\alpha'_2 + \pi_2\alpha'_1)\\ &\qquad - \mathrm{I}'(\pi_1\alpha_2 + \pi_2\alpha_1) + (\alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\alpha'_1) = 0,\\ &\alpha_1\alpha_2 + \mathrm{D}(\pi_1\alpha'_2 + \pi_2\alpha'_1) - \mathrm{I}'\mathrm{D}\pi_1\pi_2 = 0,\\ &\alpha'_1\alpha'_2 + \mathrm{D}'(\pi_1\alpha_2 + \pi_2\alpha_1) - \mathrm{ID}'\pi_1\pi_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, dans ces relations, on introduit les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 d'une droite quelconque, puis dans π_1, α_1, α'_1 les coordonnées d'un point M pris arbitrairement sur un des côtés de t, elles donneront pour π_2, α_2, α'_2 les valeurs qui conviennent au sommet opposé ; et, si M est un des sommets, elles donneront entre π_2, α_2, α'_2 une seule relation, celle qui convient au côté opposé.

Ainsi la polaire, par rapport à une quelconque V des coniques covariantes, d'un point quelconque pris sur un des côtés du triangle t passe par le sommet opposé, et la polaire d'un sommet est le côté opposé, ce qui constitue la propriété la plus importante du triangle t, comme il est bien connu.

16. De même que nous avons obtenu les expressions [formules (105) à (107)] de $\tau^2 s$, $\tau^2 s'$, $\tau^2 w$ en fonction des trois variables π, α, α', avec des coefficients où n'entrent que les invariants et contrevariants, de même il est facile d'obtenir les expressions de $t^2\sigma$, $t^2\sigma'$, $t^2\varphi$ en fonction des mêmes variables, avec des coefficients où n'entrent que les invariants et covariants purs. Il est d'ailleurs inutile de faire le calcul complet en partant soit des syzygies (57), (63), (58), multipliées par t, soit des syzygies (48), (49), (50), résolues par rapport à σ, σ', φ : il suffit de transformer, en appliquant la loi de réciprocité, les formules (105) et suivantes. Voici les formules auxquelles on est ainsi conduit

$$(127)\quad \left\{\begin{aligned} t^2\sigma = {} & \mathrm{L}'\alpha^2 + 2\,\mathrm{DT}\alpha\alpha' + \mathrm{DT}'\alpha'^2 + 2\,\mathrm{D}(\mathrm{D}'\mathrm{T}' - \mathrm{I}'\mathrm{T})\alpha\pi \\ & + 2\,\mathrm{D}(\mathrm{L}' - \mathrm{IT})\alpha'\pi + \mathrm{D}[(\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\mathrm{T} - \mathrm{ID}'\mathrm{T}' - \mathrm{I}'\mathrm{L}']\pi^2, \end{aligned}\right.$$

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} t^2\sigma' = {} & \mathrm{D}'\mathrm{T}\alpha^2 + 2\,\mathrm{D}'\mathrm{T}'\alpha\alpha' + \mathrm{L}\alpha'^2 + 2\,\mathrm{D}'(\mathrm{L} - \mathrm{I}'\mathrm{T}')\alpha\pi \\ & + 2\,\mathrm{D}'(\mathrm{DT} - \mathrm{IT}')\alpha'\pi + \mathrm{D}'[(\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\mathrm{T}' - \mathrm{I}'\mathrm{DT} - \mathrm{IL}]\pi^2, \end{aligned}\right.$$

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} t^2\varphi = {} & (\mathrm{I}'\mathrm{T} - \mathrm{D}'\mathrm{T}')\alpha^2 + 2(\mathrm{IT} - \mathrm{L}')\alpha\alpha' + (\mathrm{IT}' - \mathrm{DT})\alpha'^2 \\ & + 2[(\mathrm{ID}' - \mathrm{I}'^2)\mathrm{T}' - \mathrm{DD}'\mathrm{T} + \mathrm{I}'\mathrm{L}]\alpha\pi \\ & + 2[(\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2)\mathrm{T} - \mathrm{DD}'\mathrm{T}' + \mathrm{IL}']\alpha'\pi \\ & + [(\mathrm{I}^2\mathrm{I}' + 2\,\mathrm{IDD}' - \mathrm{I}'^2\mathrm{D})\mathrm{T} + \mathrm{D}'(\mathrm{I}'\mathrm{D} - \mathrm{I}^2)\mathrm{T}' - (\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\mathrm{L}']\pi^2, \end{aligned}\right.$$

en posant pour abréger

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} &= \mathrm{I}'ss' - \mathrm{D}'s^2 - ws', \\ \mathrm{T}' &= \mathrm{I}ss' - \mathrm{D}s'^2 - ws, \\ \mathrm{L} &= \mathrm{DD}'ss' - \mathrm{I}'\mathrm{D}s'^2 + \mathrm{I}s'w - w^2, \\ \mathrm{L}' &= \mathrm{DD}'ss' - \mathrm{ID}'s^2 + \mathrm{I}'sw - w^2, \end{aligned}\right.$$

ce qui entraîne les relations

$$(131)\qquad \begin{cases} \mathrm{IT} - \mathrm{L}' = \mathrm{I}'\mathrm{T}' - \mathrm{L}, \\ \mathrm{T}w - \mathrm{D}'\mathrm{T}'s = \mathrm{L}'s', \\ \mathrm{T}'w - \mathrm{DT}s' = \mathrm{L}s, \end{cases}$$

et aussi les relations importantes

$$(132)\qquad \begin{cases} \mathrm{TL} - \mathrm{D}'\mathrm{T}'^2 = t^2 s', \\ \mathrm{T}'\mathrm{L}' - \mathrm{DT}^2 = t^2 s, \\ \mathrm{LL}' - \mathrm{DD}'\mathrm{TT}' = t^2 w. \end{cases}$$

Les formules (127) à (132) permettent de résoudre les problèmes réciproques de ceux auxquels s'appliquaient les formules (105) à (110). On trouve notamment ainsi :

1° Que le lieu des sommets des faisceaux harmoniques tangents aux deux coniques $\lambda\varphi + \mu\sigma + \nu\sigma'$, $\lambda'\varphi + \mu'\sigma + \nu'\sigma'$ a pour équation ponctuelle

$$(133)\qquad \begin{cases} o = 2\lambda\lambda'(\mathrm{I}s' + \mathrm{I}'s - w) + 2\mu\mu'\mathrm{D}s \\ \qquad + 2\nu\nu'\mathrm{D}'s' + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)(\mathrm{I}s + \mathrm{D}s') \\ \qquad + (\lambda\nu' + \lambda'\nu)(\mathrm{I}'s' + \mathrm{D}'s) + (\mu\nu' + \mu'\nu)w; \end{cases}$$

2° Que l'équation ponctuelle de la conique contrevariante la plus générale $\lambda\varphi + \mu\sigma + \nu\sigma'$ est

$$(134)\qquad \begin{cases} \lambda^2(\mathrm{I}s' + \mathrm{I}'s - w) + \mu^2\mathrm{D}s \\ \quad + \nu^2\mathrm{D}'s' + \lambda\mu(\mathrm{I}s + \mathrm{D}s') + \lambda\nu(\mathrm{I}'s' + \mathrm{D}'s) + \mu\nu w = o; \end{cases}$$

3° Que le discriminant de cette dernière équation a pour expression

$$(135)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}'_{\lambda\mu\nu} = (\mathrm{II}' + \mathrm{DD}')\lambda^3 + (\mathrm{I}^2 + \mathrm{I}'\mathrm{D})\lambda^2\mu \\ \qquad + (\mathrm{I}'^2 + \mathrm{ID}')\lambda^2\nu + 2\mathrm{ID}\lambda\mu^2 + (\mathrm{II}' + 3\mathrm{DD}')\lambda\mu\nu \\ \qquad + 2\mathrm{I}'\mathrm{D}'\lambda\nu^2 + \mathrm{D}^2\mu^3 + \mathrm{I}'\mathrm{D}\mu^2\nu + \mathrm{ID}'\mu\nu^2 + \mathrm{D}'^2\nu^3, \end{cases}$$

et devient égal à $\mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2\mathrm{D}_{\lambda\mu\nu}$ [formule (115)], si l'on y écrit $\mathrm{DD}'\lambda$, $\mathrm{D}'\nu$, $\mathrm{D}\mu$ au lieu de λ, μ, ν, respectivement. On en conclut immédiatement :

4° Que, si π, α, α' deviennent π_1, α_1, α'_1, quand on y introduit les coordonnées ponctuelles d'un point M quelconque et tangentielles d'une droite Δ quelconque, il faut et il suffit, pour que la conique contrevariante $\mathrm{V}' = \mathrm{DD}'\pi_1\varphi - \mathrm{D}'\alpha_1\sigma - \mathrm{D}\alpha'_1\sigma'$ dégénère en deux points, que Δ passe par un des sommets du triangle t;

dans ce cas, les deux points dont il s'agit se trouvent sur le côté opposé du triangle, ainsi que les pôles de Δ par rapport à une conique contrevariante quelconque;

5° Que, si Δ coïncide avec un des côtés du triangle t, la conique V' se réduit au sommet opposé compté deux fois, et constitue un des trois facteurs du second membre de la syzygie (83).

17. Je vais maintenant établir une syzygie remarquable, dont les conséquences, au point de vue géométrique, sont nombreuses et importantes.

Posons tout d'abord

$$(136)\quad \begin{cases} P = D\sigma' s + (I\sigma - D\varphi)s' - \sigma w, \\ P' = D'\sigma s' + (I'\sigma' - D'\varphi)s - \sigma' w, \\ Q = (D'\sigma - I\sigma')s + (D\sigma' - I'\sigma)s' + \varphi w. \end{cases}$$

Les trois quantités P, P', Q représentent toujours trois coniques, soit qu'on donne à ξ, η, ζ les valeurs qui définissent une droite Δ, soit qu'on donne à x, y, z les valeurs qui définissent un point M; et elles restent invariables par l'application de la loi de réciprocité. On vérifie d'ailleurs sans peine que les coniques P, P', sont toujours tangentes à Δ, ou passent toujours par M; et qu'il n'en est de même de Q que si Δ passe par un des sommets du triangle t, ou si M est sur un des côtés de ce triangle.

Les syzygies (48), (49), (50) donnent, d'autre part,

$$(137)\quad \begin{cases} P = \alpha^2 + 2D\alpha'\pi - I'D\pi^2, \\ P' = \alpha'^2 + 2D'\alpha\pi - ID'\pi^2, \\ Q = 2\alpha\alpha' - 2(I'\alpha + I\alpha')\pi + (II' + DD')\pi^2. \end{cases}$$

On tire de ces relations

$$(138)\quad \begin{cases} Q^2 - 4PP' = \pi[(II' - DD')^2\pi^3 - 4(II' - DD')(I'\alpha + I\alpha')\pi^2 \\ \qquad + 4(I'^2 + ID')\alpha^2\pi + 12(II' - DD')\alpha\alpha'\pi \\ \qquad + 4(I^2 + I'D)\alpha'^2\pi - 8(D'\alpha^3 + I'\alpha^2\alpha' + I\alpha\alpha'^2 + D\alpha'^3)]. \end{cases}$$

C'est la syzygie que je me proposais d'obtenir. Son premier membre est une fonction des seuls covariants purs et contrevariants droits s, s', w, σ, σ', φ, et des invariants; son second membre est le produit de quatre facteurs mixtes linéaires en π, α, α'. En effet, le facteur π est déjà mis en évidence; et, si l'on considère la parenthèse qui multiplie π comme une forme ternaire cubique aux variables π, α, α', il est facile de vérifier que le hessien de cette forme n'en diffère que par le facteur $-\frac{4}{27}$ E, en désignant toujours par E l'invariant composé [formule (97)], qui revient à chaque instant dans cette théorie. Nous pouvons donc écrire ainsi la syzygie (138) :

$$Q^2 - 4PP' = \pi\pi'\pi''\pi''', \tag{139}$$

en appelant π', π'', π''' les trois facteurs, linéaires par rapport à π, α, α', c'est-à-dire par rapport à chacune des séries de variables, dont le produit constitue la parenthèse du second membre de (138).

Mais on peut mettre cette parenthèse sous une autre forme non moins intéressante. Si l'on en retranche huit fois la valeur de $t\tau$ donnée par la syzygie (76), le reste est divisible par π, et l'on vérifie sans peine que le quotient de cette division est égal à

$$4(I'^2 - 3ID')P + 4(I^2 - 3I'D)P' + 2(II' - 9DD')Q + E\pi^2,$$

de telle sorte que si l'on représente par R la conique

$$R = 2(I'^2 - 3ID')P + 2(I^2 - 3I'D)P' + (II' - 9DD')Q, \tag{140}$$

on a la relation

$$\pi'\pi''\pi''' = 8t\tau + 2\pi R + E\pi^3, \tag{141}$$

et la syzygie (138) ou (139) prend la forme

$$Q^2 - 4PP' = \pi(8t\tau + 2\pi R + E\pi^3). \tag{142}$$

Sous cette forme, elle ne contient plus que les invariants, les covariants purs et les contrevariants [P, P', Q, R étant des fonctions de ces formes définies par les formules (136) et (140)], avec une seule forme mixte, le covariant identique π. Elle est d'ailleurs symétrique par rapport aux coefficients de s et s', et reste invariable quand on lui applique la loi de réciprocité.

18. Comme application géométrique de cette syzygie, nous pouvons, en premier lieu, la regarder comme exprimant que l'enveloppe des coniques comprises dans la formule

$$U_{\lambda\mu} = \lambda^2 P + \lambda\mu Q + \mu^2 P', \tag{143}$$

où $\frac{\lambda}{\mu}$ est un paramètre variable, se réduit à quatre droites, si l'on regarde U comme une équation ponctuelle, ou à quatre points, si on la regarde comme équation tangentielle. L'une de ces droites (ou l'un de ces points) peut être choisie arbitrairement; les trois autres sont alors déterminées par la relation (141), et cette relation montre qu'elles coupent la première sur les côtés du triangle t (ou que les droites, joignant les trois autres points au premier arbitrairement choisi, passent par les trois sommets du triangle t).

L'équation de la conique covariante ou contrevariante la plus générale renferme, comme nous l'avons vu, deux paramètres. Si on l'assujettit à toucher une droite donnée ou à passer par un point donné, un de ces paramètres sera fixé, il n'en restera plus qu'un; (143) représente donc bien l'équation de la conique covariante ou contrevariante la plus générale assujettie à l'une des deux conditions indiquées ci-dessus. Et nous pouvons énoncer ce théorème :

Toutes les coniques contrevariantes qui passent par un point fixe donné (ou covariantes qui touchent une droite fixe donnée) passent aussi par trois autres points fixes (ou touchent trois autres droites fixes); les droites qui joignent deux à deux ces quatre points fixes passent deux à deux par les sommets du triangle t (ou les intersections des quatre droites fixes sont situées deux par deux sur les côtés du triangle t).

L'équation générale de ces coniques covariantes (ou contrevariantes) s'obtiendra par la formule (143), *en introduisant dans* P, P′, Q, *définis par les formules* (136), *les coordonnées* ξ_1, η_1, ζ_1 *de la droite fixe donnée (ou* x_1, y_1, z_1 *du point fixe donné).*

Comme application, reprenons le problème résolu au n° **10** : *Former l'équation des coniques passant par les quatre points communs à s et s', et tangentes à une droite donnée.* Nous n'avons qu'à introduire dans P, Q, P′ les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 de la droite donnée, et à déterminer λ et μ par la condition que $U_{\lambda\mu}$ [formule (143)] s'annule pour $s = s' = 0$; ce qui donne la condition

$$\sigma\lambda^2 - \varphi\lambda\mu + \sigma'\mu^2 = 0.$$

L'expression de U devient, dès lors,

$$(144)\quad U = 2\sigma'^2 P + \sigma'\varphi Q + (\varphi^2 - 2\sigma\sigma')P' \pm (\sigma' Q + \varphi P')\sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}.$$

Les deux coniques représentées par cette équation sont les mêmes que celles que nous avions déjà trouvées, car l'expression du n° 10 (93)

$$2\sigma s' - \varphi s \mp s\sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}$$

se change en l'expression (144), si on la multiplie par le facteur

$$(145)\quad \frac{I\varphi\sigma'^2 - I'\varphi^2\sigma' + D'\varphi^3 - 3D'\varphi\sigma\sigma' - 2D\sigma'^3 + 2I'\sigma\sigma'^2 \pm (I\sigma'^2 - I'\varphi\sigma' + D'\varphi^2 - D'\sigma\sigma')\sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}}{\varphi \pm \sqrt{\varphi^2 - 4\sigma\sigma'}}.$$

Toutefois il est un cas où les deux méthodes ne donnent pas le même résultat. Si l'on cherche la condition pour que le numérateur du facteur (145) s'annule, on trouve, en faisant disparaître le radical, que cette condition est

$$\sigma'^3\tau^2 = 0.$$

L'hypothèse $\sigma' = 0$ annule aussi le dénominateur, et le facteur a pour vraie valeur $D'\varphi^2$, qui n'est pas nul. Mais si $\tau = 0$, c'est-à-dire si la droite donnée passe par un des sommets du triangle t, l'une des deux coniques représentée par (144) disparaît, tandis que l'expression (93) continue à fournir deux coniques distinctes. Cette anomalie provient de ce que toutes les coniques covariantes, tangentes à une droite Δ menée par un des sommets M de t, touchent Δ en un même point, savoir le point d'intersection de Δ avec le côté de t opposé à M, excepté les coniques dégénérées en deux droites et qui ont leur point double en M. La droite Δ n'est donc plus enveloppe, à proprement parler, pour les coniques comprises dans la formule (143), l'enveloppe véritable se compose de deux points situés sur Δ, et effectivement cette droite apparaît alors au carré dans le second membre de (142).

Comme seconde application, soit demandé de former l'équation de la conique qui passe par les quatre points communs à s' et w, et qui touche une tangente commune à σ et $\varphi + k\sigma'$, k étant un paramètre.

Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de la tangente commune : elles annulent σ et donnent à φ la valeur $-k\sigma'$. Faisant donc $\sigma = 0$,

$\varphi = -k\sigma'$ dans les formules (136), il vient

$$\begin{aligned} Q &= \sigma'(-Is + Ds' - kw), \\ P &= D\sigma'(s + ks'), \\ P' &= \sigma'(I's - w + kD's), \end{aligned}$$

et la conique $U_{\lambda\mu}$, tangente à la droite donnée, devient.

$$U_{\lambda\mu} = \sigma'[D\lambda^2(s + ks') + \lambda\mu(Ds' - Is - kw) + \mu^2(I's - w + kD's)].$$

Pour qu'elle passe par les points communs à s' et w, il suffit de déterminer $\frac{\lambda}{\mu}$ par la condition

$$(146) \qquad D\lambda^2 - I\lambda\mu + (I' + kD')\mu^2 = 0.$$

Il y a donc deux coniques qui répondent à la question, et, puisque k subsiste comme seul paramètre, elles touchent l'une et l'autre non pas seulement une des tangentes communes à σ et à $\varphi + k\sigma'$, mais les quatre. Pour obtenir l'équation des deux coniques ensemble, il suffit d'égaler à zéro le résultant de (146) et de $U_{\lambda\mu} = 0$; ce qui donne, tous calculs faits,

$$(147) \quad (D + Ik + I'k^2 + D'k^3)[w^2 - Iws' + D(I' + kD')s'^2] = 0.$$

Si k est égal à l'une des trois racines de l'équation

$$(148) \qquad D'k^3 + I'k^2 + Ik + D = 0,$$

c'est-à-dire, à cause de $k = -\frac{\varphi}{\sigma'}$ et de la syzygie (83), si τ s'annule en même temps que σ et $\varphi + k\sigma'$, c'est-à-dire enfin, si la tangente choisie passe par l'un des sommets du triangle t, l'équation (146) a une racine commune avec $U_{\lambda\mu} = 0$, quels que soient x, y, z; ce qui signifie que l'équation de l'une des coniques $U_{\lambda\mu}$ s'évanouit identiquement. Si k a une valeur quelconque, les deux coniques qui répondent à la question sont données par la formule

$$(149) \qquad 2w - (I \pm \sqrt{I^2 - 4I'D - 4kDD'})s' = 0.$$

Comme vérification, cherchons quelle valeur il faut donner à k pour que l'une de ces deux coniques dégénère en deux droites. D'après la formule (115), le discriminant de (149) a pour valeur

$$-4DD'^2[Ik + 2D \mp k\sqrt{I^2 - 4I'D - 4DD'k}]:$$

si on l'égale à zéro, on retrouve la condition (148) ; et, en effet, lorsque la droite choisie passe par un des sommets du triangle t, il est clair qu'elle coupe en deux points coïncidents la conique dégénérée qui se compose des deux cordes d'intersection de w et s' passant par le sommet considéré : ce couple de cordes d'intersection est donc une des deux coniques fournies par la formule (149), quand on y prend pour k une des racines de (148).

19. A un autre point de vue, la syzygie (139) montre qu'à un point M quelconque, arbitrairement choisi (ou à une droite Δ quelconque), sont associés trois autres points déterminés M_1, M_2, M_3 (ou trois autres droites Δ_1, Δ_2, Δ_3), tels que l'ensemble de ces quatre points (ou de ces quatre droites) peut être représenté en coordonnées tangentielles (ou ponctuelles) par une relation entre les seuls invariants et contrevariants (ou invariants et covariants purs), avec des coefficients numériques ou littéraux dépendant des valeurs numériques ou littérales assignées aux coordonnées ponctuelles de M (ou tangentielles de Δ). Si donc le point M (ou la droite Δ) est défini par une propriété projective, il y aura trois autres points (ou droites) jouissant de la même propriété; l'équation des quatre ensemble s'obtiendra en posant

$$Q^2 - 4PP' = 0, \tag{150}$$

et particularisant les expressions P, P', Q d'après la définition donnée. Si les coordonnées ponctuelles de l'un des points sont connues, on obtiendra l'équation tangentielle des trois autres en introduisant ces coordonnées dans l'équation

$$8t\tau + 2R\pi + E\pi^3 = 0, \tag{151}$$

dont le premier membre est toujours décomposable en trois facteurs linéaires par rapport aux variables conservées.

Enfin la forme de ce premier membre, qui s'évanouit si l'on suppose à la fois $\pi = 0$, t ou $\tau = 0$, permet d'énoncer ce théorème :

Lorsque quatre points (ou quatre droites) répondent à une même définition projective par rapport au système des deux coniques, et y répondent seuls, les six droites qui joignent ces points passent deux par deux par les sommets du triangle t

(*ou les six points d'intersection des quatre droites sont situés deux par deux sur les côtés du même triangle*).

Ainsi le théorème s'applique aux quatre points d'intersection de deux quelconques des coniques covariantes du système, à leurs quatre tangentes communes, aux points de contact de ces tangentes avec une des coniques, aux secondes tangentes (non communes) que l'on peut mener de ces points de contact, aux points de contact de ces secondes tangentes, et ainsi de suite.

Comme application, soit demandé de former l'équation tangentielle des points d'intersection de deux coniques covariantes du système

$$U = \lambda\varpi + \mu s + \nu s', \qquad U' = \lambda'\varpi + \mu' s + \nu' s'.$$

Ces points satisfont aux deux équations $U = 0$, $U' = 0$. On peut donc en tirer ces valeurs de s, s',

$$s = \varpi\,\frac{\lambda'\nu - \lambda\nu'}{\mu\nu' - \mu\nu}, \qquad s' = \varpi\,\frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\mu\nu' - \mu'\nu}.$$

Si on les porte dans les formules (136), il vient

$$\begin{aligned}
(\mu\nu' - \mu'\nu)P &= \varpi[D(\lambda'\nu - \lambda\nu')\sigma' + (\lambda\mu' - \lambda'\mu)(I\sigma - D\varphi) - (\mu\nu' - \mu'\nu)\sigma],\\
(\mu\nu' - \mu'\nu)P' &= \varpi[D'(\lambda\mu' - \lambda'\mu)\sigma + (\lambda'\nu - \lambda\nu')(I'\sigma' - D'\varphi) - (\mu\nu' - \mu'\nu)\sigma'],\\
(\mu\nu' - \mu'\nu)Q &= \varpi[(\lambda'\nu - \lambda\nu')(D'\sigma - I\sigma') + (\lambda\mu' - \lambda'\mu)(D\sigma' - I'\sigma) + (\mu\nu' - \mu'\nu)\varphi].
\end{aligned}$$

Et l'équation (150) donne, en supprimant les facteurs communs $(\mu\nu' - \mu'\nu)^2\varpi^2$,

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = {} & (\mu\nu' - \mu'\nu)^2(\varphi^2 - 4\sigma\sigma')\\
& + (\lambda'\nu - \lambda\nu')^2\,[D'^2\sigma^2 + (I^2 - 4I'D)\sigma'^2 - 2ID'\sigma\sigma' + 4DD'\sigma'\varphi]\\
& + (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2[D^2\sigma'^2 + (I'^2 - 4ID')\sigma^2 - 2I'D\sigma\sigma' + 4DD'\sigma\varphi]\\
& + 2(\mu\nu' - \mu'\nu)(\lambda'\nu - \lambda\nu')[2D\sigma'^2 + 2I'\sigma\sigma' - I\sigma'\varphi - D'\sigma\varphi]\\
& + 2(\mu\nu' - \mu'\nu)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)[2D'\sigma^2 + 2I\sigma\sigma' - I'\sigma\varphi - D\sigma'\varphi]\\
& - 2(\lambda'\nu - \lambda\nu')(\lambda\mu' - \lambda'\mu)[2DD'\varphi^2 + I'D'\sigma^2 + ID\sigma'^2\\
& \qquad + (II' + DD')\sigma\sigma' - 2I'D\sigma'\varphi - 2ID'\sigma\varphi].
\end{aligned}\right.$$

Comme cas particulier, cette formule donne l'équation bien connue des quatre points d'intersection de s et s',

$$(153)\qquad \varphi^2 - 4\sigma\sigma' = 0;$$

celle des quatre points d'intersection de s et ϖ,

$$(154)\qquad D^2\sigma'^2 + (I'^2 - 4ID')\sigma^2 - 2I'D\sigma\sigma' + 4DD'\sigma\varphi = 0;$$

celle des quatre points d'intersection de ϖ et de $s+ks'$,

$$(155)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & D^2\sigma'^2 + (I'^2 - 4ID')\sigma^2 - 2I'D\sigma\sigma' + 4DD'\sigma\varphi \\ & + 2k[2DD'\varphi^2 + I'D'\sigma^2 + ID\sigma'^2 + (II'+DD')\sigma\sigma' - 2I'D\sigma'\varphi - 2ID'\sigma\varphi] \\ & + k^2[D'^2\sigma^2 + (I^2 - 4I'D)\sigma'^2 - 2ID'\sigma\sigma' + 4DD'\sigma'\varphi], \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

Par un calcul analogue, ou en appliquant la loi de réciprocité à la formule (152), on trouve, pour l'équation ponctuelle des quatre tangentes communes à $\lambda\varphi + \mu\sigma + \nu\sigma'$, $\lambda'\varphi + \mu'\sigma + \nu'\sigma'$,

$$(156)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & (\nu\mu' - \mu\nu')^2[\varpi^2 - 4DD'ss'] \\ & + (\lambda'\mu - \lambda\mu')^2[D^2s'^2 + (I^2 - 4I'D)s^2 - 2IDss' + 4D\varpi s] \\ & + (\lambda\nu' - \nu\lambda')^2[D'^2s^2 + (I'^2 - 4ID')s'^2 - 2I'D'ss' + 4D'\varpi s'] \\ & + 2(\nu\mu' - \mu\nu')(\mu\lambda' - \lambda\mu')[2DD's^2 + 2I'Dss' - I\varpi s - D\varpi s'] \\ & + 2(\nu\mu' - \mu\nu')(\lambda\nu' - \nu\lambda')[2DD's'^2 + 2ID'ss' - I'\varpi s' - D'\varpi s] \\ & - 2(\mu\lambda' - \lambda\mu')(\lambda\nu' - \nu\lambda')[2\varpi^2 + I'Ds'^2 + ID's^2 \\ & \qquad + (II' + DD')ss' - 2I'\varpi s - 2I\varpi s']. \end{aligned}\right.$$

Comme cas particulier de cette formule, on retrouve, pour les quatre tangentes communes à s et s', l'équation bien connue

$$(157)\qquad \varpi^2 - 4DD'ss' = 0.$$

Proposons-nous une question un peu plus compliquée, telle que celle-ci :

Par un des points de contact M *de* s *avec les tangentes communes à* s *et* s', *on mène la seconde tangente à* s', *qui touche* s' *en un point* N. *Former l'équation tangentielle des quatre points* N.

Les points M étant à la fois sur s et sur les tangentes communes à s et s', dont l'équation est (157), leurs coordonnées ponctuelles annulent à la fois s et $\varpi^2 - 4DD'ss'$, c'est-à-dire s et ϖ. Faisant $s = \varpi = 0$ dans (150), on obtient, pour l'équation tangentielle des quatre points M, l'équation (154) déjà écrite plus haut. Les tangentes MN menées de ces points à s' ont des coordonnées qui satisfont à la fois à cette équation et à $\sigma' = 0$, par conséquent à celle-ci

$$\sigma[(I'^2 - 4ID')\sigma + 4DD'\varphi] = 0.$$

Cette dernière équation se décompose en deux : $\sigma = 0$, qui correspond aux tangentes communes à s et s', dont nous n'avons pas à nous occuper, et

$$(I'^2 - 4ID')\sigma + 4DD'\varphi = 0,$$

qui convient bien aux secondes tangentes MN. Faisant donc dans (150) $\sigma' = 0$, $\varphi = \dfrac{4ID' - I'^2}{4DD'}\sigma$, nous obtenons, pour l'équation ponctuelle des quatre tangentes MN,

$$\begin{aligned} 0 = {} & (I'^2 - 4ID')^2 w^2 + 8DD'^2(I'^2 - 4ID')ws + 8DD'(2DD'^2 - 4II'D' + I'^3)ws \\ & + 16D^2D'^4 s^2 + 4I'DD'(8DD'^2 + 4II'D' - I'^3)ss'. \end{aligned}$$

Pour $s' = 0$, cette équation se réduit, comme cela devait être, à un carré parfait, savoir

$$[(I'^2 - 4ID')w + 4DD'^2 s]^2 = 0,$$

ce qui montre que les quatre points N sont déterminés par l'intersection de s' avec la conique

$$(I'^2 - 4ID')w + 4DD'^2 s = 0.$$

Pour avoir leur équation tangentielle, il suffit donc de faire dans (150) $s' = 0$, $s = \dfrac{4ID' - I'^2}{4DD'^2}w$, ce qui donne

$$(158)\quad \left\{ \begin{aligned} & [4DD'^2\varphi + (I'^2 - 4ID')(I\sigma' - D'\sigma)]^2 \\ & \quad + 4D[(I'^2 - 4ID')\sigma' + 4D'^2\sigma][D'(I'^2 - 4ID')\varphi - (I'^3 - 4II'D' + 4DD'^2)\sigma'] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $I'^2 - 4ID' = 0$, *cette équation se réduit à* $\varphi^2 - 4\sigma\sigma' = 0$; *donc, lorsque cette condition invariante est satisfaite, la tangente à* s' *en chacun des points communs à* s *et* s' *va couper* s *en l'un des points où cette conique est touchée par les tangentes communes à* s *et* s'.

On en conclut que, lorsque cette condition invariante est satisfaite, le nombre des tangentes communes réelles est égal au nombre des points communs réels.

Soit maintenant M′ le point de contact de s' avec une des tangentes communes à s et s'. On peut joindre chacun des quatre points N à chacun des quatre points M′, ce qui donnera seize droites, dont les coordonnées satisferont à la fois à l'équation (158) et à l'équation tangentielle des points M′, laquelle se déduit de (154) en intervertissant les accents. Si donc on résout ces deux équations par rapport à σ, σ', φ, et qu'on porte dans (150) un des seize systèmes de solutions, on aura quatre des seize droites. Si donc enfin on élimine σ, σ', φ entre (150), (158) et l'équation tangentielle des points M', on obtiendra évidemment l'équation ponctuelle des seize droites dont il s'agit.

Bornons-nous au cas particulier où l'invariant I est nul. Les trois équations à considérer sont alors

$$D'^2\sigma^2 - 4I'D\sigma'^2 + 4DD'\sigma'\varphi = 0,$$
$$D'^2(4DD'\varphi - I'^2\sigma)^2 + 4D(I'^2\sigma' + 4D'^2\sigma)[I'^2D'\varphi - (I'^3 + 4DD'^2)\sigma'] = 0,$$
$$\begin{aligned}&[D'\sigma s + (D\sigma' - I'\sigma)s' + \varphi w]^2\\ &\quad - 4(D\sigma' s - D\varphi s' - \sigma w)[D'\sigma s' + (I'\sigma' - D'\varphi)s - \sigma' w] = 0.\end{aligned}$$

Si l'on porte dans la seconde la valeur de φ tirée de la première, elle devient

$$\sigma[D'^4\sigma^3 - 2I'^2D'^2\sigma^2\sigma' - 8I'DD'^2\sigma\sigma'^2 - 8D(I'^3 + 8DD'^2)\sigma'^3] = 0$$

et se décompose en deux équations distinctes, dont l'une est $\sigma = 0$. Nous voyons ainsi que sur les seize droites considérées, quatre sont tangentes à la conique σ ou s, ce qui concorde avec le résultat obtenu au n° **11** pour la signification géométrique de I. Nous pouvons ainsi obtenir isolément l'équation de ces quatre tangentes de s, qui sont les polaires par rapport à s' des quatre points de contact de s avec les tangentes communes à s et s'; il suffit de faire $\sigma = 0$, $\varphi = \frac{I'\sigma'}{D'}$ dans la troisième des équations ci-dessus, ce qui donne, tous calculs faits,

$$(159) \qquad (I'w - DD's')^2 + 4DD'^2ws = 0.$$

20. Dans l'exemple que nous venons de traiter, la formule (150) nous a permis d'obtenir, par la voie de l'élimination, l'équation d'un ensemble de douze ou de seize droites homologues, suivant que I est nul ou $\gtrless 0$. Lorsque, parmi les données d'une question, figurent des éléments (points ou lignes) pris arbitrairement, il est évident qu'en suivant la marche que nous avons indiquée on obtiendra une équation finale s'appliquant non seulement au résultat des constructions faites en partant de cet élément arbitraire, mais au résultat des mêmes constructions supposées faites à la fois à partir des quatre points ou droites homologues composant le système covariant complet dont fait partie le point ou la droite arbitraire.

Soit proposée, par exemple, cette question : D'un point A arbitraire, on mène les tangentes AB, AC à la conique s, AB', AC' à la conique s'. On demande l'équation des quatre droites BB', BC', CB', CC' qui joignent un point de contact de s à un point de contact de s'.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées ponctuelles de A ; s_1, s'_1, w_1, π_1, ... ce que deviennent s, s', w, π, ... quand on y introduit les valeurs de ces coordonnées. Soit π l'une des quatre droites dont nous voulons obtenir l'équation. Les deux tangentes aux points où π coupe s ont pour équation, comme il est facile de le vérifier, $\sigma s - D\pi^2 = 0$; et de même les deux tangentes aux points où elle coupe s', $\sigma' s' - D'\pi^2 = 0$. La condition donnée pour définir π est que chacune des coniques dégénérées $\sigma s - D\pi^2$, $\sigma' s' - D'\pi^2$, doit passer par A ; les coordonnées ξ, η, ζ de π satisferont donc aux deux conditions

$$\sigma = D\frac{\pi_1^2}{s_1}, \qquad \sigma' = D'\frac{\pi_1^2}{s'_1}. \tag{160}$$

Si l'on tire de ces équations les valeurs ξ_1, η_1, ζ_1, on aura quatre systèmes de valeurs, et pour l'un de ces systèmes les fonctions σ, σ', φ, π prendront des valeurs parfaitement déterminées. P, P', Q deviennent dès lors

$$P = D\pi_1^2\left(\frac{D's}{s'_1} + \frac{Is' - w}{s_1}\right) - Ds'\varphi_1,$$

$$P' = D'\pi_1^2\left(\frac{Ds'}{s_1} + \frac{I's - w}{s'_1}\right) - D's\varphi_1,$$

$$Q = \pi_1^2\left[\frac{D(D's - I's')}{s_1} + \frac{D'(Ds' - Is)}{s'_1}\right] + w\varphi_1.$$

Et, en portant ces valeurs dans la formule (150), on aura une équation de la forme

$$A\pi_1^4 + B\pi_1^2\varphi_1 + C\varphi_1^2 = 0, \tag{161}$$

où A, B, C représentent des courbes bien déterminées du quatrième ordre. Cette équation représentera donc quatre droites, comprenant une de celles que nous avions en vue ; et elle suppose la résolution préalable du système de deux équations du second degré (160). Pour avoir une équation qui représente les quatre droites, il faut évidemment faire disparaître le rapport $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2}$ dont la valeur dépend de celui des quatre systèmes de solutions des équations (160) que l'on considère en particulier. Pour arriver à cette élimination, il suffit de remarquer que la syzygie (142) reste vraie, quelles que soient les valeurs assignées aux variables x, y, z, ξ, η, ζ. Si nous y donnons à x, y, z les valeurs x_1, y_1, z_1 qui définissent le point A, et l'un des systèmes de valeurs ξ_1, η_1, ζ_1 qui satisfont aux conditions (160), cette syzygie deviendra

$$A_1\pi_1^4 + B_1\pi_1^2\varphi_1 + C_1\varphi_1^2 = \pi_1(8t_1\tau_1 + 2\pi_1 R_1 + E\pi_1^3),$$

A_1, B_1, C_1, ... étant ce que deviennent A, B, C, ... quand on y fait $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, $s = s_1$, ... Mais R_1 est une fonction de P_1, P'_1, Q_1, définie par (140), et par suite une fonction quadratique de π_1^2 et de φ_1; on peut donc écrire cette relation

$$(162)\qquad 8\pi_1 t_1\tau_1 = A'_1\pi_1^4 + B'_1\pi_1^2\varphi_1 + C_1\varphi_1^2,$$

A'_1, B'_1, C_1 étant des fonctions explicites des données. Si le point A est quelconque, on pourra élever les deux termes au carré, exprimer τ_1^2 en fonction de σ_1, σ'_1, φ_1 au moyen de la syzygie (83) et, par suite, en tenant compte de (160), en fonction de π_1^2 et φ_1. On aura donc une relation homogène du huitième degré par rapport à π_1^2 et φ_1, dont les coefficients seront des fonctions complètement connues des données; en éliminant $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2}$ entre cette relation et (161), on aura une équation où les coefficients de (161) entreront au quatrième degré, et, par suite, cette équation sera du seizième ordre par rapport aux variables ponctuelles x, y, z; ce sera l'équation des seize droites que donne la construction indiquée, appliquée tant au point A qu'aux trois points associés à A.

Si le point A a été pris sur l'un des côtés du triangle t, on a $t_1 = 0$; la relation (162) se réduit à

$$A'_1\pi_1^4 + B'_1\pi_1^2\varphi_1 + C_1\varphi_1^2 = 0,$$

et l'élimination de $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2}$ entre cette relation et (161) conduit à une équation du huitième ordre seulement : cette équation représentera les quatre droites obtenues en partant du point A, plus les quatre autres droites qu'on obtiendrait en partant du point unique associé à A dans ce cas spécial.

Examinons le cas particulier où $C_1 = 0$. L'équation (162) se décompose en deux, savoir $\pi_1 = 0$, et

$$(163) \qquad 8t_1\tau_1 = A'_1\pi_1^2 + B'_1\pi_1\varphi_1.$$

Le système des seize droites se décompose en un système de quatre droites qui s'obtiendra en faisant $\pi_1 = 0$ dans (161), ce qui donne $C = 0$, et en un système de douze droites. Mais, si l'on se reporte aux valeurs de P, P', Q données ci-dessus, on voit que $C = s_1^2 s_1'^2(w^2 - 4DD'ss')$; par conséquent, lorsque le point A est pris sur l'une des tangentes communes à s et s', on trouve comme résultat du calcul, d'une part, le groupe de ces quatre tangentes communes, comme cela devait être, de l'autre, un groupe de douze droites qui correspondent trois par trois aux quatre points associés dont A fait partie. Si A est en même temps sur un des côtés du triangle t, ces douze droites se réduisent à quatre, parce que $\pi_1 = 0$ est encore une racine de (163), ce qui donne une seconde fois les quatre tangentes communes, et que l'autre racine, $\frac{\varphi_1}{\pi_1^2} = -\frac{A'_1}{B'_1}$, portée dans (161), donne une équation du quatrième ordre seulement.

Si l'on demandait quelle doit être la position du point A pour que l'une des quatre droites fournies par la construction indiquée soit tangente à la conique φ, il suffirait d'égaler à zéro le coefficient de π_1^8 dans l'équation (162) élevée au carré, c'est-à-dire de poser

$$(164) \quad 64DD't^2[D^2D's'^3 + (I'^2 - 2ID')Dss'^2 + (I^2 - 2I'D)D's^2s' + DD'^2s^3] + A_1'^2s^3s'^3 = 0,$$

ce qui donnerait, pour le lieu du point A, une courbe covariante du douzième ordre. A un point déterminé de cette courbe correspondent évidemment les quatre droites représentées par l'équation $A = 0$. Mais, si l'on calcule A, on trouve que les coefficients n'y dépendent que du seul paramètre $\frac{s'_1}{s_1}$, lequel y figure au second degré. On peut donc aisément former l'équation de l'enveloppe des droites représentées par $A = 0$, lorsque le paramètre prend toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire lorsque le point directeur se déplace sur la courbe représentée par (164). On trouve ainsi l'équation

$$(w - I's - Is')t^2 = 0.$$

Le premier facteur n'est autre chose que l'équation ponctuelle de la conique φ, laquelle constitue donc bien une partie de l'enveloppe, comme nous le savions. Le second facteur est le lieu des points d'intersection des droites variables, lieu qui doit être fourni également, comme on sait, par l'équation de l'enveloppe. Nous avons vu, en effet, que les quatre droites comprises dans l'équation $A = 0$, étant obtenues par une même construction faite à partir de quatre points associés, doivent se couper deux à deux sur les côtés du triangle t.

21. Examinons le cas particulier, déjà touché dans l'exemple précédent, où le point (ou la droite) dont on demande l'équation est situé sur le triangle t (ou passe par un de ses sommets). On a alors $t = 0$ (ou $\tau = 0$), et la syzygie (142) devient

$$Q^2 - 4PP' = \pi^2(2R + E\pi^2). \tag{165}$$

Si donc on pose

$$Q^2 - 4PP' = 0, \tag{166}$$

cette équation représentera le point (ou la droite) compté deux fois, plus deux points (ou deux droites) associés. Mais je dis que ces deux autres points (ou droites) seront eux-mêmes coïncidents. En effet, d'après ce que nous avons vu dans le cas général, les quatre points associés représentés par le second membre de la syzygie (142) sont disposés de telle sorte que les trois sommets du triangle t sont les faux sommets du quadrilatère complet construit sur eux. D'après les propriétés harmoniques du quadrilatère complet, on obtiendra donc les trois points associés à un point donné M en joignant M aux trois sommets, et prenant sur chaque droite le conjugué harmonique de M par rapport au sommet qu'elle renferme et au point de rencontre avec le côté opposé du triangle t. On voit immédiatement que, si M est sur un des côtés de t, un des trois points associés vient se confondre avec M, et que les deux autres vont se réunir en un seul, situé sur ce même côté du triangle t.

D'après ces considérations, il est évident que la formule (166) fournira en pareil cas le carré de l'équation du point considéré et de son associé, ou, s'il y a une élimination préalable à effectuer, le carré de l'équation de tous les points (ou droites) qui répondent à la question.

Proposons-nous, par exemple, de former l'équation des six tangentes menées à s des trois sommets du triangle t. Les coordonnées de l'une quelconque de ces droites satisfont à la double condition $\sigma = 0$, $\tau = 0$; c'est-à-dire, à cause de la syzygie (83), aux deux conditions

$$\sigma = 0, \qquad D(D'\varphi^3 - I'\varphi^2\sigma' + I\varphi\sigma'^2 - D\sigma'^3) = 0.$$

Faisant $\sigma = 0$ dans la formule (166), on aura donc à éliminer $\frac{\varphi}{\sigma'}$ entre la seconde des équations précédentes et celle-ci

$$[w\varphi + (Ds' - Is)\sigma']^2 - 4[D's\varphi + (w - I's)\sigma'](Ds'\varphi - Ds\sigma') = 0,$$

qui peut s'écrire

$$m\varphi^2 + 2n\varphi\sigma' + p\sigma'^2 = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$(167) \qquad \left\{\begin{aligned} m &= w^2 - 4DD'ss', \\ n &= 2DD's^2 + 2I'Dss' - Dws' - Iws, \\ p &= (I^2 - 4I'D)s^2 + D^2s'^2 - 2IDss' + 4Dws. \end{aligned}\right.$$

Par une formule connue, on obtient comme résultat de l'élimination

$$(168) \qquad \left\{\begin{aligned} & 8DD'n^3 + 4(I'Dm + ID'p)n^2 \\ & + 2[IDm^2 + (II' - 3DD')mp + I'D'p^2]n \\ & + D^2m^3 + (I^2 - 2I'D)m^2p + (I'^2 - 2ID')mp^2 + D'^2p^3 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on se reporte à la syzygie (83), on voit que les premiers membres ne diffèrent qu'en ce que φ, σ', σ sont remplacés respectivement par $2n$, $-m$, $-p$. Le premier membre de (168) est donc décomposable en trois facteurs linéaires par rapport à m, n, p ; chacun de ces facteurs est du quatrième ordre en x, y, z et représente évidemment le carré du couple de tangentes à s issu de l'un des sommets de t. Pour $s = 0$, il se réduit, comme cela devait être, à un carré parfait, savoir

$$(w^3 - Is'w^2 + I'Ds'^2w - D^2D's'^3)^2,$$

la parenthèse étant ce que devient t^2 [syzygie (13)] quand on y fait $s = 0$: les points de contact de s avec les trois couples de tangentes sont en effet sur les côtés de t. Si enfin (k, k') est un des trois systèmes de coefficients qui rendent $\varphi + k\sigma + k'\sigma'$ un carré parfait, l'expression $2n - kp - k'm$ représentera le carré du couple de tangentes à s issu du sommet dont $\varphi + k\sigma + k'\sigma'$ est l'équation tangentielle.

Si, en particulier, $D = 0$, l'équation (168) se réduit à

(169) $$I^4 s^2 (w^2 - I' ws + ID' s^2)^2 = 0$$

et donne séparément les trois couples de tangentes, savoir s et

$$2w - s(I' \pm \sqrt{I'^2 - 4ID'}).$$

D'ailleurs la syzygie (13) devient, dans la même hypothèse,

(170) $$t^2 = (w - Is')(w^2 - I' ws + ID' s^2),$$

de telle sorte que les deux couples de tangentes à s issues des deux sommets de t autres que le point double de s se réduisent, comme cela devait être, aux deux côtés de t passant par ce point double, le carré du troisième côté étant $w - Is'$.

22. Je vais maintenant examiner succinctement ce qui arrive lorsque l'invariant E s'annule, c'est-à-dire lorsque s et s' se touchent ; en commençant par le cas du contact simple.

Posons

(171) $$\left\{\begin{aligned} M &= II' - 9DD', \\ N &= I^2 - 3I'D, \\ N' &= I'^2 - 3ID'. \end{aligned}\right.$$

Nous pourrons écrire les diverses relations suivantes :

(172) $$\left\{\begin{array}{l} M^2 - 4NN' = 3E = 0, \\ IN' - I'M + 3D'N = 0, \qquad I'N - IM + 3DN' = 0, \\ ID'N + I'DN' - NN' - 3DD'M = E = 0, \\ 4ID'N + 4I'DN' - (II' + 3DD')M = E = 0, \\ DMN' + D'N^2 - INN' = IE = 0, \\ D'MN + DN'^2 - I'NN' = I'E = 0, \\ (IN' + D'N)^2 - MN'(II' - DD') = ID'E = 0, \\ (I'N + DN')^2 - MN(II' - DD') = I'DE = 0, \\ 2(IN' + D'N)(I'N + DN') - (II' - DD')M^2 = (II' - 3DD')E = 0. \end{array}\right.$$

Les seconds membres des syzygies (76), (13) et (83) admettent, comme nous l'avons vu, un facteur carré. On vérifie en outre sans peine, par les formules (140), (137) et (76), que R devient un carré parfait et divise $t\tau$; de sorte qu'on a, dans ce cas,

$$t\tau = \mathrm{R}\left(\frac{2\mathrm{DD}'\pi}{\mathrm{M}} - \frac{\mathrm{D}'\alpha}{2\mathrm{N}'} - \frac{\mathrm{D}\alpha'}{2\mathrm{N}}\right), \tag{173}$$

avec la valeur suivante de R

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2\mathrm{M}(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')}[\mathrm{M}(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')\pi - 2(\mathrm{IN}' + \mathrm{D}'\mathrm{N})\alpha - 2(\mathrm{I}'\mathrm{N} + \mathrm{DN}')\alpha']^2. \tag{174}$$

La syzygie (138) devient, dès lors,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{Q}^2 - 4\mathrm{PP}' = {} & \frac{\pi}{(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')\mathrm{M}^3}[\mathrm{M}(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')\pi - 8\mathrm{D}'\mathrm{N}\alpha - 8\mathrm{DN}'\alpha'] \\ & \times [\mathrm{M}(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')\pi - 2(\mathrm{IN}' + \mathrm{D}'\mathrm{N})\alpha - 2(\mathrm{I}'\mathrm{N} + \mathrm{DN}')\alpha']^2. \end{aligned}\right. \tag{175}$$

Puisque le facteur carré du second membre divise $t\tau$, il représente le côté double (ou le sommet double) du triangle t; et l'on a ce théorème :

Lorsque s et s' sont tangentes, si π est l'équation d'une droite (ou d'un point) quelconque, l'équation

$$\mathrm{M}(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')\pi - 2(\mathrm{IN}' + \mathrm{D}'\mathrm{N})\alpha - 2(\mathrm{I}'\mathrm{N} + \mathrm{DN}')\alpha' = 0 \tag{176}$$

représente le côté double (ou le sommet double) du triangle t, c'est-à-dire la tangente commune double (ou son point de contact); l'équation

$$\mathrm{MDD}'\pi - \mathrm{D}'\mathrm{N}\alpha - \mathrm{DN}'\alpha' = 0 \tag{177}$$

représente le côté simple (ou le sommet simple) du même triangle ; enfin les trois droites (ou les trois points) associées à la droite (ou au point) π sont la tangente double (ou le point de contact) comptée deux fois et une autre droite (ou point) représentée par l'équation

$$\mathrm{M}(\mathrm{II}' - \mathrm{DD}')\pi - 8\mathrm{D}'\mathrm{N}\alpha - 8\mathrm{DN}'\alpha' = 0. \tag{178}$$

Si, par exemple, π est une des deux tangentes simples communes à s et s', la seconde sera (178); de même pour les deux points d'intersection simples de s et de s', etc.

Pour décomposer en leurs facteurs les seconds membres des syzygies (13) et (83), et obtenir l'expression, en fonction de s, s', w et des invariants, du carré de la tangente double, ou, en fonction de σ, σ', φ et des invariants, du carré du point de contact, il suffit d'appliquer les résultats obtenus aux n^{os} 14 et 16. Soit $(\pi_1, \alpha_1, \alpha'_1)$ un des systèmes de valeurs de π, α, α' qui annulent à la fois deux des facteurs linéaires de $t\tau$: nous avons vu que l'expression $\pi_1 w - \alpha'_1 s - \alpha_1 s'$ représente le carré du côté de t correspondant, et l'expression $DD'\pi_1\varphi - D'\alpha_1\sigma - D\alpha'_1\sigma'$ le carré du sommet opposé. Or nous avons les équations en π, α, α' de deux côtés distincts du triangle t, savoir (176) et (177) ; le système de valeurs de π, α, α' qui satisfait à la fois à ces deux équations est $\pi_1 = M$, $\alpha_1 = 2DN'$, $\alpha'_1 = 2D'N$. On en déduit immédiatement, pour l'équation du carré de la tangente double,

(179) $$Mw - 2D'Ns - 2DN's' = 0,$$

et, pour l'équation du carré du point de contact,

(180) $$M\varphi - 2N'\sigma - 2N\sigma' = 0.$$

Il suffit maintenant de diviser respectivement les seconds membres des syzygies (13) et (83) par les carrés des deux expressions (179) et (180), pour obtenir l'équation du carré du côté simple du triangle t

(181) $$NN'w - DN'^2 s - D'N^2 s' = 0,$$

et l'équation du carré du sommet simple du même triangle

(182) $$DD'NN'\varphi - D'^2N^2\sigma - D^2N'^2\sigma' = 0.$$

En appliquant encore les résultats des n^{os} 14 et 15, nous pouvons obtenir les équations générales des systèmes de coniques dégénérées en deux droites ou en deux points passant par l'un ou l'autre des deux sommets distincts du triangle t, ou situés sur l'un ou l'autre des deux côtés distincts de ce triangle. Ainsi l'équation du sommet simple étant (177), il suffit de prendre

$$\pi_1 = \frac{D'N\alpha_1 + DN'\alpha'_1}{MDD'},$$

de porter cette valeur de π_1 dans les expressions

$$\pi_1 w - \alpha'_1 s - \alpha_1 s', \quad DD'\pi_1\varphi - D'\alpha_1\sigma - D\alpha'_1\sigma'$$

et de remplacer $\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}$ par une indéterminée k, pour obtenir l'équation générale des coniques covariantes dégénérées en deux droites dont le point de concours est au sommet simple

$$(183)\qquad (\mathrm{M}w - 4\mathrm{DN}'s') + k(\mathrm{M}w - 4\mathrm{D}'\mathrm{N}s) = 0,$$

et l'équation générale des coniques contrevariantes dégénérées en deux points situés sur le côté simple

$$(184)\qquad (\mathrm{M}\varphi - 4\mathrm{N}'\sigma) + k'(\mathrm{M}\varphi - 4\mathrm{N}\sigma') = 0.$$

D'ailleurs, l'équation (183) étant satisfaite pour $s = s' = w = 0$, toutes les coniques dégénérées qu'elle représente passent par le point de contact de s et s', et comprennent, par conséquent, la droite qui joint ce point au sommet simple, c'est-à-dire la tangente commune double. L'équation (183) représente donc, quel que soit k, la tangente double avec une autre droite passant par le sommet simple de t. Si l'on veut que cette seconde droite soit celle qui passe par les deux points d'intersection simples de s et s', il suffit évidemment de prendre $k = -1$, ce qui donne

$$(185)\qquad \mathrm{D}'\mathrm{N}s - \mathrm{DN}'s' = 0$$

pour l'équation de la tangente double et de la corde d'intersection ne passant pas par le point de contact. De même

$$(186)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}w - 4\mathrm{DN}'s' = 0, \\ \mathrm{M}w - 4\mathrm{D}'\mathrm{N}s = 0 \end{cases}$$

représentent évidemment, avec la tangente double, les droites joignant les deux points de contact de s' (ou de s) avec les tangentes communes simples. En prenant $k = +1$, on retrouve l'équation (179); ce qui permet d'énoncer ce théorème :

Lorsque deux coniques s, s' sont tangentes, leur tangente commune au point de contact, celle de leurs cordes d'intersection qui ne passe pas par ce point, et les deux cordes de contact de s et de s' avec leurs tangentes communes simples forment un faisceau harmonique.

On verrait de la même manière que (184) représente deux points dont l'un est toujours le point de contact de s et s', et l'autre varie avec la valeur de k'. Pour $k'=1$, on retrouve (180); pour $k'=-1$, ce qui donne

$$(187)\qquad N'\sigma - N\sigma' = 0,$$

le second point représenté est le point de concours des deux tangentes communes simples. Pour les équations

$$(188)\qquad M\varphi - 4N'\sigma = 0,\qquad M\varphi - 4N\sigma' = 0,$$

le second point est le point de concours des tangentes à s (ou à s') aux deux points d'intersection simples ; et ces deux points de concours, réunis à celui de l'équation (187) et au point de contact de s et s', forment sur le côté simple du triangle t une division harmonique : c'est le théorème réciproque de celui qui a été énoncé plus haut.

En opérant sur l'équation (176) du sommet double de t comme nous venons de le faire sur l'équation (177) du sommet simple, on obtient les résultats suivants :

$$(189)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2(IN'+D'N)w - M(II'-DD')s' \\ \quad + k[2(I'N+DN')w - M(II'-DD')s] = 0, \end{array}\right.$$

où k est une arbitraire, est l'équation des coniques covariantes dégénérées en deux droites passant par le point de contact de s et de s'. Cette équation peut encore s'écrire

$$(190)\qquad (M+2kN')w - (IN'+D'N)(s+ks') = 0\,;$$

comme cas particulier, elle donne : 1° l'équation des deux cordes d'intersection de s et s' passant par leur point de contact

$$(191)\qquad Ms' - 2N's = 0 \quad \text{ou} \quad 2Ns' - Ms = 0,$$

ce qui revient au même, à cause des relations (172) ; 2° l'équation des droites joignant le point de contact de s et s' aux deux points de contact de s avec les tangentes communes simples

$$(192)\qquad Mw - (IN'+D'N)s = 0,$$

ou aux deux points de contact de s' avec ces mêmes tangentes

$$(193)\qquad Mw - (I'N+DN')s' = 0.$$

L'équation des coniques contrevariantes dégénérées en deux points situés sur la tangente commune double sera de même

$$(194)\qquad DD'(M+2kN)\varphi-(I'N+DN')(D'\sigma+kD\sigma')=0$$

et donnera, comme cas particuliers, l'équation

$$(195)\qquad 2D'N\sigma-DM\sigma'=0$$

des deux points où la tangente commune double est rencontrée par les deux tangentes communes simples ; l'équation

$$(196)\qquad DM\varphi-(I'N+DN')\sigma=0$$

des deux points où elle est rencontrée par les tangentes à s aux points d'intersection simples de s et s' ; et ainsi de suite.

23. Je passe au cas où les deux coniques s, s' sont bitangentes, c'est-à-dire se touchent en deux points distincts.

Dans ce cas, les deux droites (192) du numéro précédent doivent évidemment se confondre, ainsi que les deux points (195). Si donc on calcule, par les formules (113) et (134), l'équation tangentielle de la conique (192) et l'équation ponctuelle de la conique (195), ces équations doivent être satisfaites identiquement. On obtient ainsi les deux relations suivantes entre les invariants, covariants et contrevariants,

$$(197)\qquad M\varphi-2N'\sigma-2N\sigma'=0.$$

$$(198)\qquad Mw-2D'Ns-2DN's'=0.$$

Mais, si l'on compare ces relations avec les équations (180) et (179) du numéro précédent, on s'aperçoit qu'elles expriment que la tangente double et son point de contact cessent ici d'exister : ce qui devait être, puisqu'il y a, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes communes doubles et deux points de contact distincts.

Les premiers membres de (197) et de (198) étant respectivement, lorsque $E=0$, facteurs des expressions de τ^2 et de t^2, on en conclut que le covariant t et le contrevariant τ s'annulent identiquement : ce qui devait être, puisqu'il existe ici, non plus un seul triangle autopolaire commun à s et s', mais une infinité, ayant tous un sommet commun et leurs deux autres sommets sur une droite fixe, savoir la corde de contact des deux coniques.

L'équation du carré de ce sommet fixe, qui est ici le point de concours des deux tangentes communes, continue d'ailleurs à être donnée par la formule (182); en y introduisant la valeur de φ fournie par (197), on trouve pour cette équation

$$(199) \qquad D'(I'N - 3DN')\sigma + D(IN' - 3D'N)\sigma' = 0.$$

De même l'équation (181) donne, en tenant compte de (198), pour le carré de la corde de contact des deux coniques,

$$(200) \qquad (IN' - 3D'N)s + (I'N - 3DN')s' = 0.$$

Puisque t et τ sont identiquement nuls, il en est de même de $t\tau$ et, par suite, de l'un des facteurs du second membre de la syzygie (76); ce ne peut d'ailleurs être que celui qui représentait, dans le numéro précédent, le côté double de t ou le sommet double opposé. On a donc encore cette relation entre covariants mixtes

$$(201) \qquad M(II' - DD')\pi - 2(IN' + D'N)\alpha - 2(I'N + DN')\alpha' = 0.$$

En l'introduisant dans les formules (177) et (178), on obtient, pour l'équation de la corde de contact (ou de son pôle),

$$(202) \qquad D'N\alpha - DN'\alpha' = 0,$$

et pour celle de la droite (ou du point) associée à une droite donnée (ou à un point donné) π,

$$(203) \qquad (IN' - 3D'N)\alpha + (I'N - 3DN')\alpha' = 0.$$

Les systèmes de coniques dégénérées covariantes (183) et contrevariantes (184) se réduisent respectivement à la seule conique

$$(204) \qquad D'Ns - DN's' = 0,$$

qui représente les deux tangentes communes, comme on peut le vérifier en introduisant l'expression (198) de w dans l'équation $w^2 - 4DD'ss'$, qui se réduit alors au carré du premier membre de (204); et à la conique

$$(205) \qquad N'\sigma - N\sigma' = 0,$$

qui représente les deux points de contact et se déduirait directement de $\varphi^2 - 4\sigma\sigma'$, en tenant compte de (197).

De même, les systèmes de coniques covariantes (189) et contrevariantes (194) se réduisent respectivement à la conique (191).

qui représente le carré de la corde de contact, et à la conique (195), qui représente le carré du point de concours des deux tangentes communes.

La situation de deux coniques bitangentes est ainsi caractérisée par l'évanouissement de l'invariant E, du covariant (198), du contrevariant (197) et du covariant mixte (201).

24. Examinons le cas où les deux coniques s, s' sont osculatrices, c'est-à-dire ont trois de leurs points d'intersection réunis en un seul, le quatrième restant séparé.

Ce cas ne diffère de celui du contact simple, examiné ci-dessus au n° **22**, qu'en ce que le côté simple du triangle t, représenté par (177), vient se confondre avec le côté double représenté par (176). Si l'on exprime que dans ces deux équations les coefficients de π, α, α' sont proportionnels, on obtient les deux relations invariantes

$$\frac{\mathrm{II}'-\mathrm{DD}'}{\mathrm{DD}'}=\frac{2(\mathrm{IN}'+\mathrm{D}'\mathrm{N})}{\mathrm{D}'\mathrm{N}}=\frac{2(\mathrm{I}'\mathrm{N}+\mathrm{DN}')}{\mathrm{DN}'},$$

lesquelles, en vertu de $\mathrm{E}=0$, se réduisent à une seule, savoir

$$\mathrm{IDN}'^2-\mathrm{I}'\mathrm{D}'\mathrm{N}^2=0. \tag{206}$$

Mais il faut aussi que les équations (179) et (181) représentent le carré de la même droite; il doit donc en être de même de leur combinaison

$$(\mathrm{M}^2-4\mathrm{NN}')w+2(2\mathrm{DN}'^2-\mathrm{D}'\mathrm{MN})s+2(2\mathrm{D}'\mathrm{N}^2-\mathrm{DMN}')s'=0,$$

c'est-à-dire, à cause des relations (172), de l'équation

$$(2\mathrm{DN}'^2-\mathrm{D}'\mathrm{MN})s+(2\mathrm{D}'\mathrm{N}^2-\mathrm{DMN}')s'=0.$$

Or cette équation représente une conique passant par tous les points communs à s et s', et ne peut, par suite, représenter le carré de la tangente d'osculation, laquelle ne passe pas par le quatrième point d'intersection de s et s'. On doit donc avoir séparément

$$2\mathrm{DN}'^2-\mathrm{D}'\mathrm{MN}=0, \qquad 2\mathrm{D}'\mathrm{N}^2-\mathrm{DMN}'=0.$$

Ces deux conditions sont satisfaites si $\mathrm{N}=\mathrm{N}'=0$, ce qui entraîne $\mathrm{M}=0$. Je dis, de plus, qu'elles ne peuvent être satisfaites que de cette manière; car l'une des relations (172) donne

$$D'MN = N'(I'N - DN').$$

On devrait donc avoir, si N et N′ n'étaient pas nuls,

$$I'N = 3DN', \qquad IN' = 3D'N;$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$MNN' = 0,$$

ce qui entraîne encore $M = 0$, d'où $N = N' = 0$. La situation spéciale de deux coniques osculatrices est donc caractérisée par deux conditions invariantes, que l'on peut écrire à volonté

$$(207)\quad E = M = 0;\quad E = N = 0;\quad E = N' = 0;\quad M = N = 0,\quad M = N' = 0,$$

et qui entraînent les quatre relations simultanées

$$(208)\qquad E = 0,\qquad M = 0,\qquad N = 0,\qquad N' = 0.$$

Il convient de remarquer que le système de conditions $N = N' = 0$ ne serait pas suffisant; il entraînerait seulement $II'M = 0$, c'est-à-dire $I = I' = 0$, et les deux coniques auraient une situation relative spéciale, mais tout autre que celle que nous discutons.

L'existence des relations (208) rend illusoires toutes les formules du n° 22; il convient donc de se reporter aux syzygies elles-mêmes. Il est d'ailleurs facile de vérifier que les syzygies (76), (13) et (83) deviennent respectivement, en vertu des relations (208),

$$(209)\qquad \left\{\begin{aligned} 27\,DD't\tau &= (6DD'\pi - I'\alpha - I\alpha')^3,\\ 27t^2 &= (3\varpi - I's - Is')^3,\\ 27D^2D'^2\tau^2 &= (3DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma')^3.\end{aligned}\right.$$

Par suite, l'équation

$$(210)\qquad 6DD'\pi - I'\alpha - I\alpha' = 0$$

représente la tangente d'osculation (ou son point de contact); l'équation

$$(211)\qquad 3\varpi - I's - Is' = 0$$

représente le carré de la tangente d'osculation, et l'équation

$$3\,DD'\varphi - ID'\sigma - I'D\sigma' = 0, \tag{212}$$

le carré du point d'osculation.

La syzygie (142) devient, puisque R et E sont nuls,

$$Q^2 - 4PP' = 8\pi t\tau = \frac{8\pi(6\,DD'\pi - I'\alpha - I\alpha')^3}{27\,DD'}. \tag{213}$$

On en conclut qu'à chaque point (ou droite), arbitrairement choisi, est associé le point d'osculation (ou la tangente d'osculation) compté trois fois, et remplaçant, par conséquent, les trois points associés qui étaient distincts dans le cas général, se réduisaient au point de contact compté deux fois et à un autre point lorsque les deux coniques étaient simplement tangentes, et disparaissaient complètement quand elles devenaient bitangentes.

Si l'on prend π_1, α_1, α'_1 satisfaisant à (210), on sait que $\pi_1 w - \alpha'_1 s - \alpha_1 s'$ et $DD'\pi_1\varphi - D'\alpha_1\sigma - D\alpha'_1\sigma'$ représenteront respectivement une conique dégénérée en deux droites se coupant au point d'osculation, et une conique dégénérée en deux points situés en ligne droite avec ce point. Mais, comme ces deux droites (ou ces deux points) forment un ensemble covariant (ou contrevariant) et sont, par suite, associées, l'une des droites (ou l'un des points) devra toujours être la tangente d'osculation (ou le point d'osculation).

Les deux équations ainsi obtenues sont d'ailleurs

$$Iw - 6\,DD's + k(I'w - 6\,DD's') = 0, \tag{214}$$

$$I'\varphi - 6\,D'\sigma + k'(I\varphi - 6\,D\sigma') = 0, \tag{215}$$

où k, k' sont deux arbitraires.

Si l'on veut que la seconde des droites représentées par (214) soit l'unique corde d'intersection de s et s', il suffit de prendre $k = -\frac{I}{I'}$, ce qui donne

$$I's - Is' = 0. \tag{216}$$

Si l'on veut qu'elle se confonde avec la première, on doit annuler les coefficients de φ, σ, σ' dans l'équation tangentielle correspondante calculée par la formule (113), ce qui conduit à prendre

$k = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}'}$, et fait retomber, comme cela devait être, sur l'équation (210). D'ailleurs,

$$(217) \qquad \mathrm{I}w - 6\mathrm{DD}'s = 0, \qquad \mathrm{I}'w - 6\mathrm{DD}'s' = 0$$

représentent évidemment, jointes à la tangente d'osculation, les droites qui joignent le point d'osculation aux points de contact de s et de s' avec leur seconde tangente commune; on en conclut que ces deux droites forment, avec la tangente d'osculation et la corde d'intersection, un faisceau harmonique.

On verrait de même que les équations

$$(218) \qquad \mathrm{I}'\varphi - 6\mathrm{D}'\sigma = 0, \qquad \mathrm{I}\varphi - 6\mathrm{D}\sigma' = 0$$

représentent, joints au point d'osculation, les points où la tangente d'osculation est coupée par les tangentes à s et à s' en leur point d'intersection simple ; que

$$(219) \qquad \mathrm{ID}'\sigma - \mathrm{I}'\mathrm{D}\sigma' = 0$$

représente, joint au point d'osculation, le point d'intersection des deux tangentes communes à s et s'; enfin que ces deux points, avec ceux des équations (218), forment, sur la tangente d'osculation, une division harmonique.

25. Nous arrivons enfin au cas où les deux coniques sont surosculatrices, c'est-à-dire ont leurs quatre points d'intersection réunis en un seul.

Il est évident que les conditions invariantes $\mathrm{E} = \mathrm{M} = \mathrm{N} = \mathrm{N}' = 0$ continuent à être satisfaites. De plus, la conique (216) du numéro précédent doit se réduire à la tangente d'osculation comptée double; l'équation tangentielle correspondante, calculée par la formule (113), doit donc être satisfaite identiquement, ce qui donne la relation

$$\mathrm{II}'\varphi - \mathrm{I}'^2\sigma - \mathrm{I}^2\sigma' = 0,$$

que l'on peut encore écrire

$$(220) \qquad 3\mathrm{DD}'\varphi - \mathrm{ID}'\sigma - \mathrm{I}'\mathrm{D}\sigma' = 0.$$

L'équation (212), qui représentait le carré du point d'osculation dans le cas des deux coniques osculatrices, disparaît donc ici, et le carré du point de surosculation est représenté par

$$\text{(221)} \qquad \mathrm{I}\mathrm{D}'\sigma - \mathrm{I}'\mathrm{D}\sigma' = 0.$$

De même, l'équation ponctuelle correspondant à (221) doit être satisfaite identiquement, ce qui donne la relation

$$\text{(222)} \qquad 3\varpi - \mathrm{I}'s - \mathrm{I}s' = 0.$$

Cette équation représentait, dans le cas du numéro précédent, le carré de la tangente d'osculation; ici elle disparaît, et le carré de la tangente de surosculation a pour équation

$$\text{(223)} \qquad \mathrm{I}'s - \mathrm{I}s' = 0.$$

Les relations (220), (222) entraînent $\tau^2 = 0$, $t^2 = 0$; par suite, on a aussi $t\tau = 0$, et l'on peut écrire la relation identique entre covariants mixtes,

$$\text{(224)} \qquad 6\mathrm{D}\mathrm{D}'\pi - \mathrm{I}'\alpha - \mathrm{I}\alpha' = 0.$$

La situation spéciale de deux coniques surosculatrices est donc caractérisée par l'évanouissement simultané des invariants M, N, N′, E, des covariants t et (222), des contrevariants τ et (220) et du covariant mixte (224).

26. Je mentionnerai, pour terminer, le cas où les invariants I, I′ sont nuls à la fois. Alors les syzygies (13), (76), (83) deviennent respectivement

$$\text{(225)} \quad \left\{ \begin{aligned} t^2 &= \left(\varpi - s\sqrt[3]{\mathrm{D}\mathrm{D}'^2} - s'\sqrt[3]{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'}\right) \\ &\quad \times \left(\varpi - \theta s\sqrt[3]{\mathrm{D}\mathrm{D}'^2} - \theta^2 s'\sqrt[3]{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'}\right)\left(\varpi - \theta^2 s\sqrt[3]{\mathrm{D}\mathrm{D}'^2} - \theta s'\sqrt[3]{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'}\right), \\ t\tau &= -\left(\pi\sqrt[3]{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2} + \alpha\sqrt[3]{\mathrm{D}'} + \alpha'\sqrt[3]{\mathrm{D}}\right) \\ &\quad \times \left(\pi\sqrt[3]{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2} + \theta\alpha\sqrt[3]{\mathrm{D}'} + \theta^2\alpha'\sqrt[3]{\mathrm{D}}\right)\left(\pi\sqrt[3]{\mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2} + \theta^2\alpha\sqrt[3]{\mathrm{D}'} + \theta\alpha'\sqrt[3]{\mathrm{D}}\right), \\ \tau^2 &= \mathrm{D}\mathrm{D}'\left(\varphi - \sigma\sqrt[3]{\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}} - \sigma'\sqrt[3]{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'}}\right) \\ &\quad \times \left(\varphi - \theta\sigma\sqrt[3]{\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}} - \theta^2\sigma'\sqrt[3]{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'}}\right)\left(\varphi - \theta^2\sigma\sqrt[3]{\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}}} - \theta\sigma'\sqrt[3]{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}'}}\right), \end{aligned} \right.$$

en désignant par θ une des racines cubiques imaginaires de l'unité. Les trois côtés et les trois sommets du triangle t sont ainsi séparés : deux des trois éléments étant toujours imaginaires, et le troisième réel (en supposant, bien entendu, que s et s' aient leurs coefficients réels). L'intervention dans ces formules des racines cubiques imaginaires de l'unité correspond à ce fait bien connu, que le rapport anharmonique du faisceau joignant les quatre points d'intersection de s et s' à un autre point quelconque soit de s, soit de s', est équianharmonique, c'est-à-dire précisément égal à l'une de ces racines imaginaires.

Par suite de la décomposition en facteurs des expressions de t^2, $t\tau$, τ^2, il devient possible d'exprimer séparément, comme dans les cas où $E = 0$, certains couples d'éléments covariants ou contrevariants. Ainsi le système des coniques dégénérées en deux droites qui se coupent au sommet réel de t aura pour équation

$$w + s\sqrt[3]{DD'^2} + k(w + s'\sqrt[3]{D^2D'}) = 0, \tag{226}$$

k étant une indéterminée. Si l'on veut avoir les deux cordes d'intersection réelles, il suffit évidemment de prendre $k = -1$, ce qui donne

$$s\sqrt[3]{D'} - s'\sqrt[3]{D} = 0, \tag{227}$$

et ainsi de suite.

27. Comme résumé de ce travail, on peut dire que le point central, à proprement parler, de la théorie du système de deux coniques est la syzygie (76), qui fournit à la fois les côtés et les sommets du triangle polaire commun (n° 11), et qui conduit directement (nos 14 et 15) à la connaissance des trois systèmes simplement infinis de coniques covariantes dégénérées en couples de droites, et des trois systèmes de coniques contrevariantes dégénérées en couples de points; les couples communs à deux systèmes se réduisant à deux droites coïncidentes ou à deux points coïncidents et étant fournis par les syzygies (13) et (83). Immédiatement après, au point de vue de l'importance, il convient de placer les syzygies qui permettent de représenter toutes les formations, à une puissance près de t ou de τ, en fonction de trois covariants mixtes linéaires par rapport aux deux séries de variables; de là, notamment pour s, s', σ, σ', des formes canoniques nouvelles (nos 12, 13 et 16), éminemment propres au calcul méthodique des invariants, covariants et contrevariants composés qui correspondent à une condition géométrique donnée. Enfin vient la syzy-

gie (142), dont l'étude fait l'objet des nos 17 à 20, et qui fournit notamment un moyen régulier de former l'équation de tout groupe de points ou de droites définis par une même condition projective, d'ailleurs quelconque; elle synthétise ainsi la solution d'un très grand nombre de problèmes dont chacun exigeait jusqu'ici une méthode particulière. Je laisse à des recherches ultérieures la réponse à une question intéressante que l'on peut se poser à ce sujet : existe-t-il des formules générales analogues pour les ensembles covariants ou contrevariants dont l'élément donné serait, par exemple, au lieu d'un point ou d'une droite, une conique ou même une courbe de degré plus élevé?

Le Mans, 12 décembre 1888.