BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. BIOCHE

Sur les courbes de M. Bertrand

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 109-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__109_1>

Sur les courbes de M. Bertrand; par M. Ch. Bioche.

On sait que la détermination d'une courbe de M. Bertrand, c'est-à-dire d'une courbe dont les normales principales sont normales principales d'une seconde courbe, se ramène aux quadratures. Les formules qui donnent la solution de ce problème sont susceptibles d'une interprétation qui me paraît curieuse.

1. M. Serret a montré dans une Note (citée par M. Liouville dans son édition de Monge, note I), que les différentielles des coordonnées des points d'une courbe peuvent s'exprimer par l'un des

systèmes

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sin\theta} = \frac{dy}{-\cos\theta} = \frac{dz}{\varphi(\theta)} = \mathrm{R}\,\frac{\sqrt{1+\varphi^2+\varphi'^2}}{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta,$$

$$(2) \qquad \frac{dx}{\sin\theta} = \frac{dy}{-\cos\theta} = \frac{dz}{\varphi(\theta)} = \mathrm{T}\,\frac{\varphi+\varphi''}{1+\varphi^2+\varphi'^2}\,d\theta,$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de la courbe considérée, et $\varphi(\theta)$ une fonction arbitraire de la variable indépendante θ; les accents indiquent des dérivées prises par rapport à θ.

Entre les courbures d'une courbe de M. Bertrand existe une relation que l'on peut écrire, a et ψ étant des constantes,

$$(3) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\cot\psi}{\mathrm{T}} = \frac{1}{a}.$$

On déduit des équations précédentes, par combinaison,

$$dx\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{\cot\psi}{\mathrm{T}}\right) = \left[\frac{\sqrt{1+\varphi^2+\varphi'^2}}{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} - \cot\psi\,\frac{\varphi+\varphi''}{1+\varphi^2+\varphi'^2}\right]\sin\theta\,d\theta,$$

et deux expressions analogues pour dy et dz, de sorte que les coordonnées des points d'une courbe de M. Bertrand se déterminent par

$$\frac{dx}{\sin\theta} = \frac{dy}{-\cos\theta} = \frac{dz}{\varphi(\theta)} = a\left[\frac{\sqrt{1+\varphi^2+\varphi'^2}}{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} - \cot\psi\,\frac{\varphi+\varphi''}{1+\varphi^2+\varphi'^2}\right]d\theta.$$

2. Si l'on pose

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{d\mathrm{X}_1}{\sin\theta} = \frac{d\mathrm{Y}_1}{-\cos\theta} = \frac{d\mathrm{Z}_1}{\varphi(\theta)} = a\,\frac{\sqrt{1+\varphi^2+\varphi'^2}}{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta,$$

$$(\mathrm{T}) \qquad \frac{d\mathrm{X}_2}{\sin\theta} = \frac{d\mathrm{Y}_2}{-\cos\theta} = \frac{d\mathrm{Z}_2}{\varphi(\theta)} = a\,\frac{\varphi+\varphi''}{1+\varphi^2+\varphi'^2}\,d\theta,$$

la courbe (C) dont les points auraient pour coordonnées $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)$ sera une courbe à courbure constante $\frac{1}{a}$; et la courbe (T) dont les points auraient pour coordonnées $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2)$ sera une courbe à torsion constante $\frac{1}{a}$. Toute courbe (B) donnée par les équations

$$(\mathrm{B}) \qquad x = \alpha\mathrm{X}_1 + \beta\mathrm{X}_2, \qquad y = \alpha\mathrm{Y}_1 + \beta\mathrm{Y}_2, \qquad z = \alpha\mathrm{Z}_1 + \beta\mathrm{Z}_2,$$

α et β étant des constantes, sera une courbe de M. Bertrand dont les constantes seraient données par

$$a' = a\alpha, \qquad \cot\psi' = -\frac{\beta}{\alpha}$$

et inversement, on voit que toute courbe de cette nature peut se représenter par les équations (B) lorsque les constantes α et β et la fonction φ sont convenablement choisies. Or ces dernières équations ont une analogie visible avec celles qui donnent les coordonnées des points d'une droite en fonction des coordonnées de deux de ses points; c'est ce qui conduit à l'interprétation annoncée.

3. Les équations

$$(\mathrm{B}') \qquad x = \frac{\alpha X_1 + \beta X_2}{\alpha + \beta}, \qquad y = \frac{\alpha Y_1 + \beta Y_2}{\alpha + \beta}, \qquad z = \frac{\alpha Z_1 + \beta Z_2}{\alpha + \beta}$$

représentent une courbe homothétique à la courbe (B) si l'on y considère α et β comme constantes; si, au contraire, X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 sont supposées constantes, ces équations représentent une droite D qui rencontre les courbes (C) et (T) en deux points M_1 et M_2, correspondant à une même valeur de la variable θ. Le lieu des points qui divisent les segments, tels que M_1M_2, dans un rapport constant, est une courbe de M. Bertrand.

La surface lieu des droites D est une développable. En effet, aux points M_1 et M_2, les tangentes aux courbes (C) et (T) sont parallèles. Leurs coefficients directeurs étant proportionnels à

$$\sin\theta, \quad -\cos\theta, \quad \varphi(\theta),$$

il en est de même d'ailleurs pour la tangente à toute courbe décrite par un point M qui divise M_1M_2 dans un rapport constant; il n'y a donc qu'un plan tangent pour chaque génératrice; ce qui montre que la surface est développable.

4. En résumé : *on peut déterminer deux courbes, l'une à courbure, l'autre à torsion constante, de façon que les tangentes à ces courbes soient deux à deux parallèles. Sur la développable des plans déterminés par ces couples de tangentes les lieux des points qui divisent les génératrices dans un rapport constant sont des courbes de M. Bertrand.*

On peut avoir toutes les courbes de cette nature en disposant de la fonction arbitraire dont dépendent les deux courbes à courbure et à torsion constante, ainsi que des valeurs absolues de leurs courbures constantes.

5. On peut obtenir les coordonnées de l'arête de rebroussement de la développable, dont il a été question, au moyen des intégrales qui expriment les coordonnées des points des courbes (C) et (T). Si sur une génératrice, correspondant à une valeur $\theta = \theta'$ de la variable indépendante, on prend le point M pour lequel on a

$$\alpha \frac{\sqrt{1+\varphi^2+\varphi'^2}}{(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} + \beta \frac{\varphi+\varphi''}{1+\varphi^2+\varphi'^2} = 0,$$

les différentielles des coordonnées de la courbe de M. Bertrand qui passe par ce point deviennent nulles; ce point est donc sur l'arête de rebroussement. Les coordonnées des points de cette courbe sont donc données par

$$x = \frac{(\varphi+\varphi'')(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}} X_1 - (1+\varphi^2+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}} X_2}{(\varphi+\varphi'')(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}} - (1+\varphi^2+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et deux équations du même type donnant y et z.