BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Remarques arithmétiques sur les nombres composés

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 150-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__150_1>

Remarques arithmétiques sur les nombres composés; par M. C.-A. Laisant.

(Séance du 6 juin 1888.)

Décomposition des nombres en facteurs.

1. Si un nombre N, décomposé en ses facteurs premiers, est égal à

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

on sait que le nombre de ses diviseurs, D(N), est

$$(1) \qquad (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots(1+\lambda),$$

le nombre N lui-même et l'unité étant considérés comme diviseurs.

Cette formule (1) donne évidemment le nombre de façons dont le nombre N peut être décomposé en deux facteurs (parmi lesquels N et l'unité peuvent figurer) lorsque l'on considère comme différentes les deux décompositions des formes PQ et QP. Soit $n_2(N) = D(N)$ ce nombre.

2. Cherchons maintenant de combien de manières le nombre N peut être décomposé en trois facteurs, en regardant toujours comme décompositions différentes celles qui diffèrent par l'ordre des facteurs, et en admettant l'unité parmi les facteurs possibles.

Pour y arriver, nous remarquerons que, si nous prenons comme premier facteur un diviseur quelconque δ, et si $N = \delta\delta'$, nous aurons un nombre de décompositions correspondantes égal à celui des décompositions de δ' en deux facteurs, c'est-à-dire $D(\delta')$. On peut en dire autant de tous les diviseurs, et par conséquent le nombre cherché $n_3(N)$ est $\Sigma D(\delta')$, le signe Σ s'étendant à tous les diviseurs.

Afin d'effectuer cette sommation, considérons le développement

$$(2)\quad (1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+\ldots+b^\beta)\ldots(1+l+\ldots+l^\lambda),$$

dont les termes donnent les diviseurs.

Soit $a^p b^q \ldots l^r$ l'un quelconque δ' de ces termes : nous aurons

$$D(\delta')=(1+p)(1+q)\ldots(1+r).$$

Si donc nous remplaçons dans le développement (2) chacun des éléments par l'exposant augmenté d'une unité, nous obtiendrons précisément le résultat cherché $\Sigma D(\delta')$.

Les termes entre parenthèses deviennent alors

$$\begin{aligned}
1+2+\ldots+1+\alpha &= \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{2} = (1+\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),\\
1+2+\ldots+1+\beta &= (1+\beta)\left(1+\frac{\beta}{2}\right),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
1+2+\ldots+1+\lambda &= (1+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right),
\end{aligned}$$

et le produit est

$$(3)\qquad n_3(N)=n_2(N)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{2}\right).$$

Un raisonnement identique nous montrera que, pour avoir le nombre de décompositions en quatre facteurs $n_4(N)$, il faut former la somme $\Sigma n_3(\delta)$ s'étendant à tous les diviseurs, et qu'il suffit pour cela de remplacer chaque élément, dans le produit (2), par une fonction de l'exposant p égale à $(1+p)\left(1+\frac{p}{2}\right)$. Les facteurs entre parenthèses deviennent ainsi

$$\begin{aligned}
1.1+(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)+(1+2)\left(1+\frac{2}{2}\right)+\ldots+(1+\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)&\\
=(1+\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{3}\right),&
\end{aligned}$$

puis

$$(1+\beta)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\frac{\beta}{3}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(1+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{3}\right),$$

et le nombre $n_4(\mathrm{N})$ cherché sera

$$(4)\qquad n_4(\mathrm{N})=n_3(\mathrm{N})\left(1+\frac{\alpha}{3}\right)\left(1+\frac{\beta}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{3}\right).$$

Une méthode toute pareille nous conduirait à la formule générale

$$(5)\qquad n_k(\mathrm{N})=n_{k-1}(\mathrm{N})\left(1+\frac{\alpha}{k-1}\right)\left(1+\frac{\beta}{k-1}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{k-1}\right)$$

ou

$$(5')\quad n_k(\mathrm{N})=(1+\alpha)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\alpha}{k-1}\right)\times\ldots\times(1+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\lambda}{k-1}\right),$$

indiquant le nombre de manières de décomposer N en k facteurs.

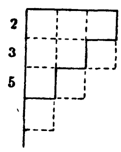
Figuration des nombres composés.

3. A ces remarques sur les décompositions des nombres en facteurs, nous croyons devoir en ajouter une sur un mode de figuration fort simple et qui n'a cependant pas été signalé jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers, à la formation du plus grand commun diviseur et à celle du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.

Voici en quoi consiste cette figuration. Supposons que, un quadrillage indéfini étant tracé à la droite d'une ligne verticale, nous numérotions les bandes horizontales successives 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., en les affectant aux nombres premiers successifs. Si un nombre composé contient un facteur premier a à l'exposant α, on comptera α cases, à partir de la droite verticale, dans la bande qui représente le facteur a. L'ensemble de toutes les cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. Il est évident que ce tracé peut suivre parfois la ligne verticale origine, lorsque certains facteurs premiers font défaut, c'est-à-dire ont l'exposant zéro.

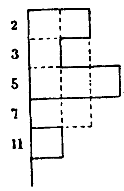
Nous nous bornons à donner comme exemple la figuration des deux nombres $360 = 2^3.3^2.5$ et $16500 = 2^2.3.5^3.11$ (*fig.* 1 et 2).

Fig. 1.



$N = 360$.

Fig. 2.

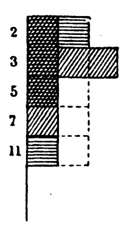


$N = 16500$.

Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs, ou, ce qui revient au même, la décomposition en deux facteurs, dont nous avons parlé ci-dessus. Le nombre des diviseurs est évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.

Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres ; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (*fig.* 3) le plus grand commun divi-

Fig. 3.



$N = 1890 = 2.3^3.5.7$,
$N' = 660 = 2^2.3.5.11$,
$D = 2.3.5 = 30$.
$p = 2^2.3^3.5.7.11 = 41580$.

seur D des deux nombres 1890 et 660, et leur plus petit commun multiple p, en figurant les deux nombres au moyen de hachures obliques ou horizontales.

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés :

A en rouge,
B en bleu,
C en jaune,

les plus grands communs diviseurs seront figurés :

celui de A et B	par la partie	violette,
» de B et C	»	verte,
» de A et C	»	orangée.

Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre A est multiple d'un autre nombre B, le contour de figuration de A contient le contour de figuration de B, et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations de deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

4. Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numération dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait le rang d'un nombre premier, et le chiffre lui-même représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit :

360	321
16500	21301
1890	1311
660	21101
30	111
41580	23111

Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra).

La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand commun diviseur est évidente; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est égal au produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.

Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.

Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.

Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.