

BULLETIN DE LA S. M. F.

V. JAMET

Sur le genre des courbes planes triangulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 132-135

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__132_1

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur le genre des courbes planes triangulaires; par M. V. JAMET.

(Séance du 21 mars 1888.)

M. Halphen, à qui l'on doit d'importantes recherches sur le genre des courbes planes algébriques, a signalé, dans les Notes qu'il a ajoutées au *Traité des courbes planes* de Salmon, une catégorie de courbes planes dont il est facile de déterminer le genre. Ce sont les courbes définies, en coordonnées polaires, par l'équation

$$(1) \quad r^k = \cos k\theta,$$

où k désigne un nombre commensurable, précédé du signe + ou

du signe —. Ces courbes s'obtiennent en transformant, par voie d'homographie, les courbes que de la Gournerie avait étudiées en 1865-1866, sous le nom de *courbes triangulaires*. Celles-ci sont représentées, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$(2) \quad X^h + Y^h + Z^h = 0,$$

h désignant un nombre commensurable, positif ou négatif. Si l'on y fait

$$\frac{X}{Z} = \frac{x + yi}{a} = \frac{r}{a} (\cos \theta + i \sin \theta),$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{x - yi}{a} = \frac{r}{a} (\cos \theta - i \sin \theta).$$

Cette équation devient

$$2r^h \cos k\theta + a^h = 0$$

ou

$$r^{-h} = -\frac{a^{-h}}{2} \cos(-h\theta),$$

et, si l'on suppose $-\frac{a^{-h}}{2} = 1$, $h = -k$, on retrouve l'équation (1).

M. Halphen a montré que le genre des courbes précitées ne dépend que du numérateur de la fraction k ; peut-être n'est-il pas sans intérêt de montrer comment toute courbe triangulaire correspond, point par point, à une autre courbe triangulaire, dépourvue de points multiples, et dont l'exposant est égal au numérateur de l'exposant de la courbe donnée (1).

Soient

$$\frac{X}{Z} = x, \quad \frac{Y}{Z} = y, \quad h = \pm \frac{p}{q};$$

on peut supposer que les lettres p , q désignent des nombres entiers premiers entre eux, et l'équation (2) deviendra

$$(3) \quad x^{\pm \frac{p}{q}} + y^{\pm \frac{p}{q}} + 1 = 0.$$

Posons

$$x = u^{\pm q}, \quad y = v^{\pm p},$$

nous trouverons

$$(4) \quad u^p + v^p + 1 = 0.$$

(1) D'après les dénominations adoptées par de la Gournerie, le nombre h est l'exposant de la courbe (2).

était toujours nul, il y aurait, entre les coordonnées d'un point pris arbitrairement sur cette courbe, une relation de degré moindre que pq , ce qui est absurde. Donc il est possible de résoudre, par rapport à $v^p, v^{2p}, v^{3p}, \dots, v^{(q-3)p}$, le système des équations (6). On trouve ainsi des fonctions rationnelles de x et de y . Mais, parmi les nombres $p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p$, il en est un qui, divisé par q , donne pour reste 1. Soit kp ce nombre, et soit

$$kp = aq + 1.$$

D'après ce qui précède,

$$v^{kp} = f(x, y),$$

f désignant une fonction rationnelle. On en déduit

$$v^{aq+1} = y^a \cdot v = f(x, y),$$

d'où

$$v = \frac{f(x, y)}{y^a},$$

ce qui démontre l'énoncé.

Si l'exposant de la triangulaire considérée est négatif, on observera qu'elle correspond, point par point, à une triangulaire d'exposant égal et de signe contraire, et que celle-ci correspond, point par point, à une courbe telle que la courbe (4).

On voit, en outre, que celle-ci n'a aucun multiple et que, par conséquent, elle est du genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$. Donc, enfin, toute triangulaire d'exposant $\pm \frac{p}{q}$ est du genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$.
