BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

# Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 15 (1887), p. 179-181
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__179_0>

# *Démonstration de la loi d'inertie des formes quadratiques;*

par M. DE PRESLE [1].

(Séance du 18 mai 1887.)

*Si une forme quadratique est décomposée en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, le nombre des carrés affectés du signe plus et le nombre des carrés affectés du signe moins sont invariables.*

Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les variables dont le nombre est $m$, par U la forme quadratique, par $n$ le nombre des formes linéaires, qui est invariable, et considérons deux décompositions différentes en sommes de carrés de formes linéaires indépendantes. Dans la première décomposition, désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_\alpha$ les formes linéaires dont les carrés sont positifs, par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\beta$ les formes linéaires dont les carrés sont négatifs; dans la seconde décomposition, désignons les mêmes choses par les mêmes lettres accentuées, nous aurons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_\alpha^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - \ldots - Q_\beta^2 \\ &= P_1'^2 + P_2'^2 + \ldots + P_{\alpha'}'^2 - Q_1'^2 - Q_2'^2 - \ldots - Q_{\beta'}'^2. \end{aligned}\right.$$

Remarquons que l'on a

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n.$$

Il s'agit de démontrer que l'on doit avoir

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta'.$$

Si ces égalités n'avaient pas lieu, on aurait

$$\alpha + \beta' < \alpha' + \beta \quad \text{ou} \quad \alpha + \beta' > \alpha' + \beta.$$

Supposons

$$\alpha + \beta' < \alpha' + \beta,$$

---

[1] Le présent Travail suppose connue la théorie de la résolution des équations linéaires de M. E. Rouché, publiée dans le *Journal de l'École Polytechnique* en 1882.

on en déduit

$$\alpha + \beta' < n.$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_\alpha^2 + Q_1'^2 + Q_2'^2 + \ldots + Q_{\beta'}'^2 \\ & = P_1'^2 + P_2'^2 + \ldots + P_{\alpha'}'^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots + Q_\beta^2. \end{aligned} \right.$$

Considérons les équations linéaires

$$(3)\quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \ldots, \quad P_\alpha = 0; \quad Q_1' = 0, \quad Q_2' = 0, \quad \ldots, \quad Q_{\beta'}' = 0;$$

si on les résout par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, elles sont satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de ces variables, et le degré d'indétermination est $m - k$, $k$ étant le degré du déterminant principal des coefficients des variables dans les équations (3). Or $k$ est au plus égal à $\alpha + \beta'$ qui est moindre que $n$; donc le degré d'indétermination est supérieur à $m - n$.

Pour chacun des systèmes des valeurs des variables satisfaisant aux équations (3), les fonctions linéaires du second membre de l'équation (2) sont nulles, et l'on a

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Q_\beta = 0,$$

les valeurs satisfont donc aux équations

$$(4)\quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \ldots, \quad P_\alpha = 0; \quad Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \ldots, \quad Q_\beta = 0.$$

Mais le déterminant principal des coefficients des variables $x_1$, $x_2, \ldots, x_m$, dans les équations (4), est de degré $n$, si on les résout par rapport à ces variables, le degré d'indétermination est $m - n$; elles ne peuvent donc pas être satisfaites par des systèmes dont l'indétermination est d'un degré supérieur à $m - n$.

Ainsi il n'est pas possible de supposer

$$\alpha + \beta' < n.$$

On ne peut avoir

$$\alpha + \beta' > n,$$

car on en déduirait

$$\alpha' + \beta < n,$$

et un raisonnement identique au précédent prouverait l'impossibilité de cette hypothèse.

On aura donc

$$\alpha + \beta' = \alpha' + \beta = n;$$

ces équations rapprochées des équations

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = n$$

donnent

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta'.$$

C. Q. F. D.