BULLETIN DE LA S. M. F.

A. H. ANGLIN

Théorèmes sur les déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 120-129

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__120_1>

Théorèmes sur les déterminants; par M. A.-H. Anglin.

(Séance du 2 mars 1887.)

Dans un Mémoire intitulé : *Sur le coefficient du terme général dans certains développements*, publié dans le *Journal de Mathématiques*, t. II, fascicule II, 1885, figurent divers résultats obtenus en partant d'un théorème fondamental. L'objet de ce

Mémoire est de généraliser ce théorème, en exprimant les résultats sous forme de déterminants.

Le théorème en question établit la formule

$$a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)=kh_{n-2},$$

où k représente $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ et h_n la somme (y compris les puissances) des produits homogènes de degré n des lettres a, b, c.

1. Avant de procéder à la recherche proposée, il est nécessaire de démontrer le lemme suivant, auquel on aura fréquemment recours :

Si h_n représente la somme (y compris les puissances) des produits homogènes, de degré n, des lettres a, b, c, ..., l, h'_n représentant la somme analogue des produits homogènes, de degré n, de b, c, d, ..., l, on a

$$h'_n = h_n - ah_{n-1}.$$

La démonstration très simple peut être présentée ainsi.

Nous avons

$$\begin{aligned} h_n &= a^n + a^{n-1}h'_1 + a^{n-2}h'_2 + \ldots + a^2h'_{n-2} + ah'_{n-1} + h'_n \\ &= a[a^{n-1} + a^{n-2}h'_1 + a^{n-3}h'_2 + \ldots + ah'_{n-2} + h'_{n-1}] + h'_n \\ &= ah_{n-1} + h'_n, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$h'_n = h_n - ah_{n-1}. \tag{A}$$

2. Introduisant dans le théorème fondamental rappelé plus haut la notation des déterminants, nous avons

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^n \\ 1 & b & b^n \\ 1 & c & c^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} h_{n-2},$$

ce qui peut s'écrire plus simplement

$$|\, a^0 \quad b^1 \quad c^n \,| = |\, a^0 \quad b^1 \quad c^2 \,|\, h_{n-2},$$

ou, en observant que $|a^0, b^1, c^2|$ est égal au produit des différences de a, b, c, deux à deux,

(1) $$|\ a^0 \quad b^1 \quad c^n\ | = [\ a \quad b \quad c\ ]\, h_{n-2}.$$

La valeur de

$$|\ a^0 \quad b^p \quad c^q\ |$$

peut être aisément déduite des résultats (A) et (1); on trouve ainsi

$$|\ a^0 \quad b^p \quad c^q\ | = [\ a \quad b \quad c\ ](h_{p-1} h_{q-2} - h_{p-2} h_{q-1}),$$

ce qu'on peut écrire sous la forme

$$|\ a^0 \quad b^p \quad c^q\ | = [\ a \quad b \quad c\ ] \begin{vmatrix} p-1 & p-2 \\ q-1 & q-2 \end{vmatrix}$$

ou, d'une façon plus concise,

(2) $$|\ a^0 \quad b^p \quad c^q\ | = [\ a \quad b \quad c\ ]\ |\ p-1 \quad q-2\ |.$$

Pour plus de simplicité, toutes les quantités, telles que h_n, sont représentées par l'indice n.

3. On obtient des résultats analogues dans le cas de quatre et cinq lettres; mais, pour plus de clarté et afin de mettre en lumière le principe sur lequel repose la démonstration des résultats dans le cas général, nous ferons d'abord l'application au cas de quatre lettres.

Nous avons

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)} = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots,$$

où h_n représente la somme des produits homogènes de degré n de a, b, c, d.

Mais on voit facilement que

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)} = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} + \frac{C}{1-cx} + \frac{D}{1-dx}$$

où

$$A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}, \quad \ldots, \quad D = \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

et ainsi

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}(1-ax)^{-1} + \ldots = 1 + h_1 x + \ldots + h_n x^n + \ldots.$$

Le dénominateur commun du premier membre de cette équation est le produit des différences, deux à deux, de a, b, c, d, que nous pouvons représenter par $[a\ b\ c\ d]$; en réduisant, nous avons

$$\begin{aligned} & a^3[b\ \ c\ \ d](1-ax)^{-1} - b^3[a\ \ c\ \ d](1-bx)^{-1} \\ & \quad + c^3[a\ \ b\ \ d](1-cx)^{-1} - d^3[a\ \ b\ \ c](1-cx)^{-1} \\ & = [a\ \ b\ \ c\ \ d](1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots). \end{aligned}$$

Développant et égalant les termes constants dans les deux membres,

$$|\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ d^3 \,| = [a\ \ b\ \ c\ \ d].$$

De même, égalant les coefficients des termes de même degré, nous avons une série de résultats analogues dont la forme générale est

$$a^n[b\ \ c\ \ d] - \ldots - d^n[a\ \ b\ \ c] = [a\ \ b\ \ c\ \ d]h_{n-3},$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad |\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ d^n \,| = [a\ \ b\ \ c\ \ d]h_{n-3}.$$

Pour trouver la valeur de

$$|\, a^0\ \ b^1\ \ c^q\ \ d^r \,|,$$

remarquons que l'on a

$$|\, a^0\ \ b^1\ \ c^q\ \ d^r \,| = a^r|\, b^0\ \ c^1\ \ d^q \,| - \ldots - d^r|\, a^0\ \ b^1\ \ c^q \,|$$

ou

$$|\, a^0\ \ b^1\ \ c^q\ \ d^r \,| = a^r[b\ \ c\ \ d]h'_{q-2} - \ldots - d^r[a\ \ b\ \ c]h'_{q-2},$$

en partant du résultat (1).

Dans cette égalité, h' se rapporte aux lettres b, c, d, dans le premier terme, et aux lettres a, b, c, dans le dernier.

Partant de la formule (A), pour passer de h' à h et arrangeant les termes, nous avons

$$\begin{aligned} & \{a^r\ \ [b\ \ c\ \ d] - \ldots - d^r\ \ [a\ \ b\ \ c]\}h_{q-2} \\ & - \{a^{r+1}[b\ \ c\ \ d] - \ldots - d^{r+1}[a\ \ b\ \ c]\}h_{q-3} \\ & = |\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ d^r \,|h_{q-2} - |\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ d^{r+1} \,|h_{q-3} \end{aligned}$$

ou, d'après (3),

$$= [a \quad b \quad c \quad d](h_{q-2}h_{r-3} - h_{q-3}h_{r-2}),$$

$$= [a \quad b \quad c \quad d]\begin{vmatrix} q-2 & q-3 \\ r-2 & r-3 \end{vmatrix}$$

et ainsi

$$(4) \qquad |a^0 \quad b^1 \quad c^q \quad d^r| = [a \quad b \quad c \quad d]\,|q-2 \quad r-3|.$$

De même, nous trouvons la valeur de

$$|a^0 \quad b^p \quad c^q \quad d^r|.$$

En développant, comme plus haut, nous avons

$$|a^0 \quad b^p \quad c^q \quad d^r| = a^r|b^0 \quad c^p \quad d^q| - \ldots$$

$$= a^r[b \quad c \quad d]\begin{vmatrix} p-1 & p-2 \\ q-1 & q-2 \end{vmatrix}' - \ldots,$$

grâce à la formule (2).

L'indice $'$ du déterminant se rapporte aux lettres b, c, d.

Revenant de h' à h, par la relation (1), et réduisant par un théorème connu de la théorie des déterminants, nous avons

$$a^r[b \quad c \quad d]\left\{\begin{vmatrix} p-1 & p-2 \\ q-1 & q-2 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} p-1 & p-3 \\ q-1 & q-3 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} p-2 & p-3 \\ q-2 & q-3 \end{vmatrix}\right\} - \ldots$$

$$= |p-1 \quad q-2|\,\{a^r[b \quad c \quad d] - \ldots\} - |p-1 \quad q-3|\,\{a^{r+1}[b \quad c \quad d] - \ldots\}$$
$$+ |p-2 \quad q-3|\,\{a^{r+2}[b \quad c \quad d] - \ldots\}$$

$$= |p-1 \quad q-2|\,|a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad d^r| - |p-1 \quad q-3|\,|a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad d^{r+1}|$$
$$+ |p-2 \quad q-3|\,|a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad d^{r+2}|$$

$$= [a \quad b \quad c \quad d]\,|p-1 \quad q-2|\,h_{r-3} - [a \quad b \quad c \quad d]\,|p-1 \quad q-3|\,h_{r-2}$$
$$+ [a \quad b \quad c \quad d]\,|p-2 \quad q-3|\,h_{r-1}$$

$$= [a \quad b \quad c \quad d]\begin{vmatrix} p-1 & p-2 & p-3 \\ q-1 & q-2 & q-3 \\ r-1 & r-2 & r-3 \end{vmatrix},$$

$$(5) \qquad |a^0 \quad b^p \quad c^q \quad d^r| = [a \quad b \quad c \quad d]\,|p-1 \quad q-2 \quad r-3|.$$

D'une manière analogue, en appliquant les formules (3), (4) et (5), on déduit les résultats correspondant au cas de cinq lettres a, b, c, d, e, et l'on voit que

$$(6) \qquad |a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad d^3 \quad e^r| = [a \quad b \quad c \quad d \quad e]\,h_{n-4},$$

$$(7) \qquad |a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad d^r \quad e^s| = [a \quad b \quad c \quad d \quad e]\,|r-3 \quad s-4|,$$

$$(8) \qquad |a^0 \quad b^1 \quad c^q \quad d^r \quad e^s| = [a \quad b \quad c \quad d \quad e]\,|q-2 \quad r-3 \quad s-4|,$$

$$(9) \qquad |a^0 \quad b^p \quad c^q \quad d^r \quad e^s| = [a \quad b \quad c \quad d \quad e]\,|p-1 \quad q-2 \quad r-3 \quad s-4|.$$

où $[a\ b\ c\ d\ e]$ représente $|a^0\ b^1\ c^2\ d^3\ e^4|$, ou le produit des différences, deux à deux, de a, b, c, d, e, et où, dans les déterminants des seconds membres, les diagonales seulement sont écrites, c'est-à-dire que $|p-1,\ q-2,\ r-3,\ s-4|$ représente

$$\begin{vmatrix} p-1 & p-2 & p-3 & p-4 \\ q-1 & q-2 & q-3 & q-4 \\ r-1 & r-2 & r-3 & r-4 \\ s-1 & s-2 & s-3 & s-4 \end{vmatrix}.$$

4. Dans la recherche précédente, nous observons que, pour obtenir les résultats dans le cas de cinq lettres, nous avons utilisé ceux obtenus pour quatre lettres. Aussi, pour établir les formules correspondant au cas d'un nombre m quelconque de lettres, a, b, c, $\ldots$, l, nous appliquons le principe d'induction mathématique, en supposant les résultats établis pour $m-1$.

Nous avons

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots(1-lx)} = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots,$$

où h_n représente la somme des produits homogènes de degré n de a, b, c, $\ldots$, l. Mais nous avons aussi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots(1-lx)} \\ &\qquad = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} + \frac{C}{1-cx} \ldots + \frac{L}{1-lx}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^{m-1}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L &= \frac{l^{m-1}}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}; \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$\frac{a^{m-1}}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}(1-ax)^{-1} + \ldots = 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots.$$

Le dénominateur commun du premier membre de cette équation se compose des produits des différences, deux à deux, de a,

$b, c, \ldots, l$ ou $[a\,b\,c\,d \ldots l]$; d'où, en réduisant,

$$
(\text{B}) \left\{
\begin{array}{l}
a^{m-1}[b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l](1-ax)^{-1} - b^{m-1}[a\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l](1-bx)^{-1} + \ldots \\
\quad + (-1)^{m-1} l^{m-1}[a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ k](1-lx)^{-1} \\
\quad = [a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l](1 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots + h_n x^n + \ldots).
\end{array}
\right.
$$

Si les formules sont vraies pour $(m-1)$, on a

$$
(1') \quad \left\{
\begin{array}{l}
|\, b^0\ \ c^1\ \ d^2\ \ \ldots\ \ l^{m-2} \,| \\
\quad = [b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l],
\end{array}
\right.
$$

$$
(2') \quad \left\{
\begin{array}{l}
|\, b^0\ \ c^1\ \ d^2\ \ \ldots\ \ k^{m-3}\ \ l^y \,| \\
\quad = [b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l] h'_{y-m+2},
\end{array}
\right.
$$

$$
(3') \quad \left\{
\begin{array}{l}
|\, b^0\ \ c^1\ \ d^2\ \ \ldots\ \ k^{m-4}\ \ k^x\ \ l^y \,| \\
\quad = [b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l]\, |\, x-m+3\ \ \ y-m+2 \,|,
\end{array}
\right.
$$

$$
(4') \quad \left\{
\begin{array}{l}
|\, b^0\ \ c^1\ \ d^2\ \ \ldots\ \ g^{m-5}\ \ h^u\ \ k^x\ \ l^y \,| \\
\quad = [b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l]\, |\, u-m+4\ \ \ x-m+3\ \ \ y-m+2 \,|,
\end{array}
\right.
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$
(m-1') \left\{
\begin{array}{l}
|\, b^0\ \ c^p\ \ d^q\ \ e^r\ \ \ldots\ \ l^y \,| \\
\quad = [b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l]\, |\, p-1\ \ \ q-2\ \ \ x-3\ \ \ \ldots\ \ \ y-m+2 \,| \ldots.
\end{array}
\right.
$$

Déduisons de ces $m-1$ formules les résultats correspondants pour m lettres.

Développant le premier membre de (B) et égalant les termes constants, puis les coefficients des termes de même degré, nous avons

$$
(1) \qquad |\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ l^{m-1} \,| = [a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ l],
$$

puis une série d'autres équations dont la forme générale est

$$
|\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ k^{m-2}\ \ l^z \,| = [a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ l] h_{z-m+1}.
$$

Pour avoir la valeur correspondante du terme

$$
|\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ h^{m-3}\ \ k^y\ \ l^z \,|,
$$

développons, par rapport aux éléments de la dernière colonne, nous avons

$$
\begin{array}{l}
|\, a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ h^{m-3}\ \ k^y\ \ l^z \,| = a^z\, |\, b^0\ \ c^1\ \ d^2\ \ \ldots\ \ k^{m-3}\ \ l^y \,| - \ldots \\
\qquad\qquad\qquad = a^z [b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l] h'_{y-m+2} - \ldots.
\end{array}
$$

Revenant de h' à h, par la formule (A), et ordonnant,

$$(1)' \quad \left\{\begin{aligned} &\{a^z[b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l]-\ldots\}h_{y-m+2} \\ &\quad -\{a^{z+1}[b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l]-\ldots\}h_{y-m+1} \\ &=|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ k^{m-2}\ \ l^z\,|\,h_{y-m+2} \\ &\quad -|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ k^{m-2}\ \ l^{z+1}\,|\,h_{y-m+1} \end{aligned}\right.$$

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} &=[a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ l]\,(h_{y-m+2}h_{z-m+1}-h_{y-m+1}h_{z-m+2}) \\ &=[a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ l]\begin{vmatrix} y-m+2 & y-m+1 \\ z-m+2 & z-m+1 \end{vmatrix}; \end{aligned}\right.$$

donc

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} &|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ h^{m-3}\ \ k^y\ \ l^z\,| \\ &\quad =[a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ l]\,|\,y-m+2\ \ \ z-m+1\,|. \end{aligned}\right.$$

Ensuite, pour trouver la valeur de

$$|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ g^{m-4}\ \ h^x\ \ k^y\ \ l^z\,|,$$

développons, comme auparavant :

$$(3') \quad \left\{\begin{aligned} &|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ g^{m-4}\ \ h^x\ \ k^y\ \ l^z\,| \\ &\quad =a^z|\,b^0\ \ c^1\ \ d^2\ \ \ldots\ \ h^{m-4}\ \ k^x\ \ l^y\,|-\ldots \\ &\quad =a^z[\,b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l\,]\,|\,x-m+3\ \ \ y-m+2\,|-\ldots. \end{aligned}\right.$$

Revenant de h' à h et réduisant, à l'aide d'un théorème connu de la théorie des déterminants, nous obtenons

$$\begin{aligned} a^z[b\ \ c\ \ d\ \ \ldots\ \ l]\{&|\,x-m+3\ \ \ y-m+2\,| \\ &-a\,|\,x-m+3\ \ \ y-m+1\,| \\ &+a^2\,|\,x-m+2\ \ \ y-m+1\,|\}-\ldots. \end{aligned}$$

Faisant le même changement dans les autres termes des différents groupes, de façon que tous les termes du dernier soient exprimés en termes en h, nous avons, en appliquant (1),

$$\begin{aligned} &|\,x-m+3\ \ \ y-m+2\,|\,|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ k^{m-2}\ \ l^z\,| \\ -&|\,x-m+3\ \ \ y-m+1\,|\,|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ k^{m-2}\ \ l^{z+1}\,| \\ +&|\,x-m+2\ \ \ y-m+1\,|\,|\,a^0\ \ b^1\ \ c^2\ \ \ldots\ \ k^{m-2}\ \ l^{z+2}\,|, \end{aligned}$$

qui, par la formule (2), est égal à

$$[a\ \ b\ \ c\ \ \ldots\ \ l]\begin{vmatrix} x-m+3 & x-m+2 & x-m+1 \\ y-m+3 & y-m+2 & y-m+1 \\ z-m+3 & z-m+2 & z-m+1 \end{vmatrix};$$

d'où

$$(4)\ \begin{cases} |\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad g^{m-4} \quad h^x \quad k^y \quad l^z\,| \\ \quad = [a \quad b \quad c \quad \ldots \quad l]\,|\,x-m+3 \quad y-m+2 \quad z-m+1\,|; \end{cases}$$

d'une façon analogue, on arrive à

$$(5)\ \begin{cases} |\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad f^{m-5} \quad g^u \quad h^x \quad k^y \quad l^z\,| \\ \quad = [a \quad b \quad c \quad \ldots \quad l]\,|\,u-m+4 \quad x-m+3 \quad y-m+2 \quad z-m+1\,|; \end{cases}$$

Enfin, lorsqu'il y a $(m-1)$ indices généraux $p, q, \ldots, x, y, z$, on a, en développant comme plus haut,

$$\begin{aligned} &|\,a^0 \quad b^p \quad c^q \quad \ldots \quad h^x \quad k^y \quad l^z\,| \\ &\quad = a^z\,|\,b^0 \quad c^p \quad d^q \quad \ldots \quad k^x \quad l^y\,| - \ldots \\ &\quad = a^z[b \quad c \quad \ldots \quad l]\,|\,p-1 \quad q-2 \quad r-3 \quad \ldots \quad y-m+2\,|' - \ldots. \end{aligned}$$

Revenant ensuite de h' à h et réduisant, on peut voir que

$$\begin{aligned} &|\,p-1 \quad q-2 \quad r-3 \quad \ldots \quad y-m+2\,|' \\ &\quad = |\,p-1 \quad q-2 \quad r-3 \quad \ldots \quad y-m+2\,| \\ &\quad - a\,|\,p-1 \quad q-2 \quad \ldots \quad x-m+3 \quad y-m+1\,| \\ &\quad + a^2\,|\,p-1 \quad q-2 \quad \ldots \quad u-m+4 \quad x-m+2 \quad y-m+1\,| \\ &\quad - a^3\,|\,p-1 \quad q-2 \quad \ldots \quad t-m+5 \quad u-m+3 \quad x-m+2 \quad y-m+1\,| \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + (-1)^{m-2} a^{m-2}\,|\,p-2 \quad q-3 \quad r-4 \quad \ldots \quad y-m+1\,|. \end{aligned}$$

Il existe des expressions semblables, pour les autres termes des groupes ci-dessus, mais avec $b, c, d, \ldots, l$ remplaçant successivement a; d'où, par l'application de $(1)'$, nous aurons

$$\begin{aligned} &\quad |\,p-1 \quad q-2 \quad r-3 \quad \ldots \quad y-m+2\,|\,|\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad k^{m-2} \quad l^z\,| \\ &- |\,p-1 \quad q-2 \quad \ldots \quad x-m+3 \quad y-m+1\,|\,|\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad k^{m-2} \quad l^{z+1}\,| \\ &+ \begin{cases} |\,p-1 \quad \ldots \quad u-m+4 \quad x-m+3 \quad y-m+1\,| \\ |\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad k^{m-2} \quad l^{z+2}\,| \end{cases} \\ &- \begin{cases} |\,p-1 \quad \ldots \quad t-m+5 \quad u-m+4 \quad x-m+3 \quad y-m+1\,| \\ |\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad k^{m-2} \quad l^{z+3}\,| \end{cases} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (-1)^{m-2}\,|\,p-2 \quad q-3 \quad \ldots \quad y-m+1\,|\,|\,a^0 \quad b^1 \quad c^2 \quad \ldots \quad k^{m-2} \quad l^{z+m-2}\,| \end{aligned}$$

qui, par l'application de (2), est égal à

$$[a \quad b \quad c \quad \ldots \quad l] \begin{vmatrix} p-1 & p-2 & p-3 & \ldots & p-m+1 \\ q-1 & q-2 & q-3 & \ldots & q-m+1 \\ r-1 & r-2 & r-3 & \ldots & r-m+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z-1 & z-2 & z-3 & \ldots & z-m+1 \end{vmatrix},$$

donc

$$(m) \left\{ \begin{aligned} & | \, a^0 \quad b^p \quad c^q \quad d^r \quad \ldots \quad l^z \, | \\ & \quad = [\, a \quad b \quad c \quad \ldots \quad l \,] \, | \, p-1 \quad q-2 \quad r-3 \quad \ldots \quad z-m+1 \, |, \end{aligned} \right.$$

qui établit la proposition dans le cas le plus général.