

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M. WEILL

## Sur la racine carrée des nombres

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 14 (1886), p. 128-131

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1886\\_\\_14\\_\\_128\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__128_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1886, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur la racine carrée des nombres; par M. WEILL.*

(Séance du 16 juin 1886.)

Soit l'équation  $x^2 - n = 0$ ,  $n$  étant un nombre positif et  $a$  un nombre plus grand que  $\sqrt{n}$ . Le nombre  $a_1$ , donné par la relation

$$a_1 = \frac{a^2 + n}{2a},$$

approche plus de  $\sqrt{n}$  que  $a$ , et dans le même sens; de même pour  $a_2 = \frac{a_1^2 + n}{2a_1}$ . Cherchons l'expression de  $a_p$ . Posons

$$a_1 = a^2 + nb^2, \quad b_1 = 2ab,$$

d'où

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 \sqrt{n} &= (a + b \sqrt{n})^2, \\ a_2 + b_2 \sqrt{n} &= (a_1 + b_1 \sqrt{n})^2 = (a + b \sqrt{n})^{2^2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_p + b_p \sqrt{n} &= (a + b \sqrt{n})^{2^p} \end{aligned}$$

Posant  $2^p = h$ , il vient

$$a_p = \frac{a^h + C_h^2 n \cdot a^{h-2} + C_h^4 n^2 a^{h-4} + \dots}{C_h^1 a^{h-1} + C_h^3 n \cdot a^{h-3} + \dots}$$

Lorsque  $h$  augmente indéfiniment, les nombres tels que  $a_p$  vont en décroissant constamment et tendent vers la limite  $\sqrt{n}$ .

Considérons, d'autre part, la substitution itérative

$$a_1 = \frac{a^3 + 3an}{3a^2 + n},$$

où  $a$  est un nombre positif plus petit que  $\sqrt{n}$ . En effectuant cette substitution  $p$  fois de suite, on aura une suite de nombres croissants, inférieurs à  $\sqrt{n}$ , et ayant pour limite  $\sqrt{n}$ ; l'expression de  $a_p$  est, en posant  $3^p = h$ , identique à l'expression posée plus haut; il en résulte que,  $h$  croissant indéfiniment, la limite de  $a_p$  est  $\sqrt{n}$ , quel que soit le nombre  $a$  d'où l'on est parti.

En posant  $z = \frac{\sqrt{n}}{a}$ , on trouve

$$a_p = \frac{1 + C_h^2 z^2 + C_h^4 z^4 + \dots}{C_h^1 z + C_h^3 z^3 + \dots} \sqrt{n} = \sqrt{n} \frac{(1+z)^h + (1-z)^h}{(1+z)^h - (1-z)^h},$$

et cette expression confirme le résultat trouvé.

Revenant à la première substitution et posant

$$a = \lambda i \sqrt{n},$$

$$a_1 = \lambda_1 i \sqrt{n},$$

il vient

$$-\lambda_1 = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda};$$

par suite, en faisant  $\lambda = \text{tang } \alpha$ ,  $\lambda_1 = \text{tang } \alpha_1$ , on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\alpha + \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_2 &= 4\alpha + \pi + \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_3 &= 8\alpha + \frac{7\pi}{2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_p &= a \cdot 2^p + \frac{\pi}{2} (2^p - 1), \end{aligned}$$

d'où une nouvelle expression de  $a_p$ .

Si l'on suppose, dans les résultats précédents, que  $a$  et  $n$  désignent des nombres entiers, on voit que l'on obtient des valeurs approchées de  $\sqrt{n}$ , les unes par excès, les autres par défaut, exprimées par le quotient de deux nombres entiers. On arrive à un résultat analogue en partant d'une autre expression de valeurs approchées. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres positifs,  $a < b$ , et comprenant  $\sqrt{n}$ ; soit

$$b_1 = \frac{n + ab}{a + b},$$

et effectuons  $p$  fois de suite cette substitution, nous aurons une suite de nombres qui auront pour limites  $\sqrt{n}$ . Posons

$$b = \sqrt{n} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad b_1 = \sqrt{n} \frac{1 - x_1}{1 + x_1},$$

d'où

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}}, \\ x_2 &= x_1 \frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}} = \alpha \left( \frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}} \right)^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_p &= \alpha \left( \frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}} \right)^p; \end{aligned}$$

d'où, en posant  $\frac{b}{\sqrt{n}} = \lambda$ ,  $\frac{a}{\sqrt{n}} = \mu$ ,

$$b_p = \sqrt{n} \frac{(\lambda + 1)(\mu + 1)^p + (\lambda - 1)(\mu - 1)^p}{(\lambda + 1)(\mu + 1)^p - (\lambda - 1)(\mu - 1)^p}.$$

Telle est l'expression de  $b_p$  en fonction rationnelle de  $a$  et  $b$ , et qui tend vers  $\sqrt{n}$  pour  $p$  infini. On peut encore ici introduire les fonctions trigonométriques, en posant

$$b = iz\sqrt{n}, \quad b_1 = iz_1\sqrt{n}, \quad a = \frac{-i\sqrt{n}}{\beta},$$

d'où

$$z_1 = \frac{\beta + z}{1 - \beta z};$$

et, en faisant  $\beta = \text{tang}\omega$ ,  $z = \text{tang}\varphi$ ,  $z_1 = \text{tang}\varphi_1$ , on en conclut

$$\varphi_n = n\omega + \varphi.$$

---