BULLETIN DE LA S. M. F.

M. WEILL

Sur la racine carrée des nombres

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 128-131
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__128_1>

Sur la racine carrée des nombres; par M. WEILL.

(Séance du 16 juin 1886.)

Soit l'équation $x^2 - n = 0$, n étant un nombre positif et a un nombre plus grand que $\sqrt{n}$. Le nombre a_1, donné par la relation

$$a_1 = \frac{a^2 + n}{2a},$$

approche plus de $\sqrt{n}$ que a, et dans le même sens; de même pour $a_2 = \frac{a_1^2 + n}{2a_1}$. Cherchons l'expression de a_p. Posons

$$a_1 = a^2 + nb^2, \qquad b_1 = 2ab,$$

d'où

$$a_1 + b_1\sqrt{n} = (a + b\sqrt{n})^2,$$
$$a_2 + b_2\sqrt{n} = (a_1 + b_1\sqrt{n})^2 = (a + b\sqrt{n})^{2^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_p + b_p\sqrt{n} = (a + b\sqrt{n})^{2^p}$$

Posant $2^p = h$, il vient

$$a_p = \frac{a^h + C_h^2 n . a^{h-2} + C_h^4 n^2 a^{h-4} + \ldots}{C_h^1 a^{h-1} + C_h^3 n . a^{h-3} + \ldots}.$$

Lorsque h augmente indéfiniment, les nombres tels que a_p vont en décroissant constamment et tendent vers la limite $\sqrt{n}$.

Considérons, d'autre part, la substitution itérative

$$a_1 = \frac{a^3 + 3an}{3a^2 + n},$$

où a est un nombre positif plus petit que $\sqrt{n}$. En effectuant cette substitution p fois de suite, on aura une suite de nombres croissants, inférieurs à $\sqrt{n}$, et ayant pour limite $\sqrt{n}$; l'expression de a_p est, en posant $3^p = h$, identique à l'expression posée plus haut: il en résulte que, h croissant indéfiniment, la limite de a_p est $\sqrt{n}$, quel que soit le nombre a d'où l'on est parti.

En posant $z = \frac{\sqrt{n}}{a}$, on trouve

$$a_p = \frac{1 + C_h^2 z^2 + C_h^4 z^4 + \ldots}{C_h^1 z + C_h^3 z^3 + \ldots}\sqrt{n} = \sqrt{n}\,\frac{(1+z)^h + (1-z)^h}{(1+z)^h - (1-z)^h},$$

et cette expression confirme le résultat trouvé.

Revenant à la première substitution et posant

$$a = \lambda i\sqrt{n},$$
$$a_1 = \lambda_1 i\sqrt{n},$$

il vient

$$-\lambda_1 = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda};$$

par suite, en faisant $\lambda = \text{tang}\,\alpha$, $\lambda_1 = \text{tang}\,\alpha_1$, on a

$$\alpha_1 = 2\alpha + \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_2 = 4\alpha + \pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_3 = 8\alpha + \frac{7\pi}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_p = \alpha . 2^p + \frac{\pi}{2}(2^p - 1),$$

d'où une nouvelle expression de a_p.

Si l'on suppose, dans les résultats précédents, que a et n désignent des nombres entiers, on voit que l'on obtient des valeurs approchées de $\sqrt{n}$, les unes par excès, les autres par défaut, exprimées par le quotient de deux nombres entiers. On arrive à un résultat analogue en partant d'une autre expression de valeurs approchées. Soient a et b deux nombres positifs, $a < b$, et comprenant $\sqrt{n}$; soit

$$b_1 = \frac{n + ab}{a + b},$$

et effectuons p fois de suite cette substitution, nous aurons une suite de nombres qui auront pour limites $\sqrt{n}$. Posons

$$b = \sqrt{n}\,\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \qquad b_1 = \sqrt{n}\,\frac{1 - x_1}{1 + x_1},$$

d'où

$$x_1 = \alpha\,\frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}},$$

$$x_2 = x_1\,\frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}} = \alpha\left(\frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}}\right)^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$x_p = \alpha\left(\frac{a - \sqrt{n}}{a + \sqrt{n}}\right)^p;$$

d'où, en posant $\frac{b}{\sqrt{n}} = \lambda$, $\frac{a}{\sqrt{n}} = \mu$,

$$b_p = \sqrt{n}\,\frac{(\lambda + 1)(\mu + 1)^p + (\lambda - 1)(\mu - 1)^p}{(\lambda + 1)(\mu + 1)^p - (\lambda - 1)(\mu - 1)^p}.$$

Telle est l'expression de b_p en fonction rationnelle de a et b, et qui tend vers $\sqrt{n}$ pour p infini. On peut encore ici introduire les fonctions trigonométriques, en posant

$$b = iz\sqrt{n}, \qquad b_1 = iz_1\sqrt{n}, \qquad a = \frac{-i\sqrt{n}}{\beta},$$

d'où

$$z_1 = \frac{\beta + z}{1 - \beta z};$$

et, en faisant $\beta = \operatorname{tang}\omega$, $z = \operatorname{tang}\varphi$, $z_1 = \operatorname{tang}\varphi_1$, on en conclut

$$\varphi_n = n\omega + \varphi.$$