BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 107-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__107_0>

Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle; par ÉMILE LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 19 mai 1886.)

Depuis quelques années la figure formée par les intersections des côtés d'un triangle avec trois droites parallèles à ces côtés et passant par un même point a été l'objet de nombreuses études, tant en France qu'à l'étranger, à propos, par exemple, des propriétés des points de Brocard et du point de Lemoine (¹); nous allons nous occuper ici de la figure formée par les intersections des côtés d'un triangle avec les trois antiparallèles à ces côtés menées par un point de son plan en développant l'étude que nous avions commencée dans le *Bulletin de la Société mathématique,* t. XII, p. 72, 1883-84, et dont M. Casey (*Treatise on the analytical Geometry*) nous a fait l'honneur de reproduire quelques résultats. Nous nous servirons des coordonnées normales.

Définitions, notations et propositions préliminaires.

Par un point O (α, β, γ) du plan d'un triangle ABC je mène les antiparallèles de chaque côté :

L'antiparallèle de BC	coupe BC en	1_1,	CA en 1_2,	AB en	1_3,
» CA	»	2_1	2_2	»	2_3,
» AB	»	3_1	3_2	»	3_3.

Ces antiparallèles à BC, AC, AB ont respectivement pour équations

$$\xi a(b\gamma + c\beta) + \eta[(b^2 - c^2)\gamma - ac\alpha] - \zeta[(b^2 - c^2)\beta + ab\alpha] = 0,$$

$$-\xi[(c^2 - a^2)\gamma + bc\beta] + \eta b(c\alpha + a\gamma) + \zeta[(c^2 - a^2)\alpha - ab\beta] = 0,$$

$$\xi[(a^2 - b^2)\beta - bc\gamma] - \eta[(a^2 - b^2)\alpha + ac\gamma] + \zeta c(b\alpha + a\beta) = 0;$$

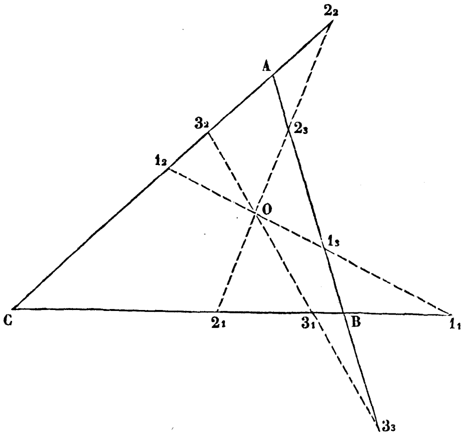
(¹) Nous rappelons que les points de Brocard O et O' dans un triangle ABC sont définis par les égalités d'angles

$$OAC = OBA = OCB, \qquad O'AB = O'BC = O'CA.$$

Le point de Lemoine est le point inverse du centre de gravité; il a par conséquent pour coordonnées normales a, b, c.

au moyen de ces équations on aurait immédiatement les coordonnées des neuf points 1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3.

Nous allons placer ici le Tableau des *longueurs* des principales



lignes de la figure exprimées en fonction des côtés et des distances α, β, γ du point O aux trois côtés.

Nous supposerons $a > b > c$:

$$2_1 3_1, \quad 3_2 1_2, \quad 1_3 2_3$$

ont respectivement pour longueurs

$$\frac{\alpha bc \cos A}{S}, \quad \frac{\beta ac \cos B}{S}, \quad \frac{\gamma ab \cos C}{S},$$

$$1_2 1_3, \quad 2_3 2_1, \quad 3_1 3_2$$

ont respectivement pour longueurs

$$\frac{a(b\gamma + c\beta)}{2S}, \quad \frac{b(c\alpha + a\gamma)}{2S}, \quad \frac{c(a\beta + b\alpha)}{2S}.$$

On a

$$\overline{1_2 2_1}^2 = \frac{c^2}{4S^2}[(b\alpha - a\beta)^2 + 2ab\alpha\beta \cos^2 c],$$

S désignant comme à l'ordinaire la surface de ABC :

$$1_1 1_2 = \frac{ac}{b^2 - c^2} \, \frac{ab\alpha + \beta(b^2 - c^2)}{2S}, \qquad 1_1 1_3 = \frac{ab}{b^2 - c^2} \, \frac{ac\alpha - \gamma(b^2 - c^2)}{2S},$$

$$O1_1 = \frac{a^2 bc}{2S(b^2 - c^2)}\alpha, \quad O1_2 = \frac{ac}{2S}\beta, \quad O1_3 = \frac{ab}{2S}\gamma,$$

$$\mathrm{A}1_2 = \frac{c(b\gamma + c\beta)}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{A}1_3 = \frac{b(b\gamma + c\beta)}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{A}2_2 = \frac{bc}{a^2 - c^2}\,\frac{bc\beta - (a^2 - c^2)\gamma}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{A}2_3 = \frac{cb\beta - (a^2 - c^2)\gamma}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{A}3_3 = \frac{cb}{a^2 - b^2}\,\frac{\beta(a^2 - b^2) - bc\gamma}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{A}3_2 = \frac{bc\gamma - (a^2 - b^2)\beta}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{B}1_1 = \frac{ac}{b^2 - c^2}\,\frac{ac\alpha - (b^2 - c^2)\gamma}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{B}1_3 = \frac{ac\alpha - (b^2 - c^2)\gamma}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{B}2_3 = \frac{a(c\alpha + a\gamma)}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{B}2_1 = \frac{c(c\alpha + a\gamma)}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{B}3_3 = -\frac{ac}{a^2 - b^2}\,\frac{ac\gamma + (a^2 - b^2)\alpha}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{B}3_1 = \frac{ac\gamma + (a^2 - b^2)\alpha}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{C}1_2 = \frac{ab\alpha + (b^2 - c^2)\beta}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{C}1_1 = \frac{ab}{b^2 - c^2}\,\frac{ab\alpha + (b^2 - c^2)\beta}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{C}2_1 = \frac{ab\beta + (a^2 - c^2)\alpha}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{C}2_2 = \frac{ab}{a^2 - c^2}\,\frac{ab\beta + (a^2 - c^2)\alpha}{2\mathrm{S}},$$

$$\mathrm{C}3_1 = \frac{b(a\beta + b\alpha)}{2\mathrm{S}}, \qquad \mathrm{C}3_2 = \frac{a(b\alpha + a\beta)}{2\mathrm{S}}.$$

Les longueurs des antiparallèles à BC menées par A, B, C et terminées aux côtés opposés sont respectivement

$$\frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad \frac{ac}{b}, \quad \frac{ab}{c}.$$

Les longueurs des antiparallèles à CA menées par A, B, C et terminées aux côtés opposés sont respectivement

$$\frac{cb}{a}, \quad \frac{abc}{a^2 - c^2}, \quad \frac{ab}{c}.$$

Les longueurs des antiparallèles à AB menées par A, B, C et terminées aux côtés opposés sont respectivement

$$\frac{bc}{a}, \quad \frac{ac}{b}, \quad \frac{abc}{a^2 - b^2}.$$

Remarque. — Si l'on considère les tangentes au cercle circonscrit menées par chaque sommet et que l'on prenne les longueurs de chaque tangente entre ce sommet et le côté opposé, l'inverse de la plus petite de ces longueurs est égal à la somme des inverses des deux autres.

Nous appellerons α_1, β_1, γ_1 les pieds des bissectrices intérieures et α'_1, β'_1, γ'_1 les pieds des bissectrices extérieures. Les points

o, o_a, o_b, o_c seront respectivement les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits ; r, r_a, r_b, r_c les rayons de ces cercles ;

R le rayon du cercle circonscrit :

A′, B′, C′ sont les points de contact de BC, CA, AB avec le cercle inscrit ;			
A'_a, B'_a, C'_a	»	»	exinscrit o_a ;
A'_b, B'_b, C'_b	»		o_b ;
A'_c, B'_c, C'_c	»		o_c ,

λ_a, λ_b, λ_c les points où les droites qui joignent respectivement A, B, C au centre du cercle circonscrit coupent BC, AC, AB.

A_1, B_1, C_1 les pôles de BC, AC, AB par rapport au cercle circonscrit ou les associés respectivement en A, en B, en C du point de Lemoine (*voir* plus loin la note sur les points associés).

On trouve

$$\text{(A)} \qquad \text{surf. } 1_2 2_3 3_1 = -\frac{\beta\gamma ac\cos C + \gamma\alpha ba\cos A + \alpha\beta cb\cos B}{2S},$$

$$\text{(B)} \qquad \text{surf. } 1_3 2_1 3_2 = \frac{\beta\gamma ab\cos B + \gamma\alpha bc\cos C + \alpha\beta ca\cos A}{2S};$$

pour le point de Lemoine ces deux surfaces sont égales à

$$\frac{16S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2},$$

$$\text{(C)} \left\{ \begin{aligned} \text{surf. } 1_1 2_2 3_3 = &-\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)} \\ &\times \frac{\beta\gamma(b^2-c^2)\cos A + \gamma\alpha(c^2-a^2)\cos B + \alpha\beta(a^2-b^2)\cos C}{2S}, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(D)} \quad \text{surf. } 1_1 2_3 3_2 = \frac{a^2}{c^2-b^2}\,\frac{\beta\gamma(c^2-b^2)\cos A - \gamma\alpha bc\cos C + \alpha\beta bc\cos B}{2S},$$

$$\text{surf. } 2_3 1_3 3_1 2_1 1_2 3_2 = S - \frac{1}{4S}[\Sigma\alpha^2(a^2 - 2bc\cos A) + 2\Sigma\beta\gamma(cb - a^2\cos A)].$$

Construction des droites.

$$(\text{I}_a) \qquad \alpha + \beta\cos C + \gamma\cos B = 0,$$

$$(\text{I}_b) \qquad \alpha\cos C + \beta + \gamma\cos A = 0,$$

$$(\text{I}_c) \qquad \alpha\cos B + \beta\cos A + \gamma = 0.$$

En B je mène une perpendiculaire à AB qui coupe AC en 1_b ; en C une perpendiculaire à AC qui coupe AB en 1_c ; la droite $1_b 1_c$ et la droite (I_a) se confondent. Le quadrilatère CB 1_b 1_c étant inscriptible à un cercle, on voit que (I_a) est une antiparallèle à BC. [Remarquons que (I_a) passe par A_1, (I_b) par B_1, (I_c) par C_1.] Appelons 1_a le point où (I_a) coupe BC, on voit que 1_a est le conjugué harmonique de λ_a par rapport à B et à C.

De même (I_b) et (I_c), respectivement antiparallèles à AC et à AB, donneront 2_a, 2_b, 2_c ; 3_a, 3_b, 3_c par leurs intersections avec les trois côtés du triangle de référence, 2_b et 3_c étant conjugués harmoniques de λ_b, λ_c.

Nous appellerons I_a, I_b, I_c les sommets du triangle formé par les droites (I_a), (I_b), (I_c), I_a étant l'intersection des droites (I_b), (I_c), ...

Remarques. — $A\lambda_a$, $B\lambda_b$, $C\lambda_c$ étant trois droites concourantes, 1_a, 2_b, 3_c sont en ligne droite; donc les deux triangles ABC, $I_aI_bI_c$ sont homologiques; l'axe d'homologie $1_a\ 2_b\ 3_c$ a pour équation

$$\frac{\alpha}{\cos A}+\frac{\beta}{\cos B}+\frac{\gamma}{\cos C}=0;$$

le centre d'homologie a pour coordonnées

$$\frac{1}{\cos A-\cos B\cos C},\quad \frac{1}{\cos B-\cos C\cos A},\quad \frac{1}{\cos C-\cos A\cos B}.$$

Construction des droites.

$$(J_a)\qquad -(p-a)\alpha+b\beta+c\gamma=0,$$
$$(J_b)\qquad a\alpha-(p-b)\beta+c\gamma=0,$$
$$(J_c)\qquad a\alpha+b\beta-(p-c)\gamma=0.$$

(J_a), (J_b), (J_c) sont respectivement parallèles à BC, AC, AB; le centre d'homothétie du triangle qu'elles forment et du triangle ABC est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Soient

J_{ab}, J_{ac} les points où (J_a) coupe BA et CA,
J_{bc}, J_{ba} ceux où (J_b) coupe CB et AB,
J_{ca}, J_{cb} ceux où (J_c) coupe AC et BC,

$A'\,J_{ba}$ et CJ_{ab}	sont parallèles	à	AA'_b.
$A'\,J_{ca}$ et BJ_{ac}	»	à	AA'_c.
$B'\,J_{cb}$ et AJ_{bc}	»	à	BB'_c.
$B'\,J_{ab}$ et CJ_{ba}	»	à	BB'_a.
$C'\,J_{ac}$ et BJ_{ca}	»	à	CC'_a.
$C'\,J_{bc}$ et AJ_{cb}	»	à	CC'_b.

d'où, pour construire (J_a), on mène par C une parallèle à AA'_b qui coupe AB en J_{ab} ; la parallèle à BC menée par J_{ab} est la droite (J_a) ; pour avoir J_{ab}, on pourrait partir encore de B' en menant une parallèle à BB'_a ; de même on pourrait se proposer de trouver d'abord J_{ac} en partant soit de B, soit de C' et menant une parallèle soit à AA'_c, soit à CC'_a.

Nous avons aussi à nous servir des neuf droites du groupe K :

$$
(K)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(1) & p\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\
(2) & (p-b)\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\
(3) & (p-c)\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\
(4) & a\alpha + p\beta + c\gamma = 0, \\
(5) & a\alpha + (p-c)\beta + c\gamma = 0, \\
(6) & a\alpha + (p-a)\beta + c\gamma = 0, \\
(7) & a\alpha + b\beta + p\gamma = 0, \\
(8) & a\alpha + b\beta + (p-a)\gamma = 0, \\
(9) & a\alpha + b\beta + (p-b)\gamma = 0,
\end{array}\right.
$$

qui jouissent de propriétés analogues aux droites (J_a), (J_b), (J_c).

Les trois premières sont parallèles à BC ;

Les trois suivantes, à CA ;

Les trois dernières, à AB.

(1), (4) et (7) forment un triangle homothétique à ABC; le centre d'homothétie est le point r_c, r_a, r_b ;

(2), (5), (8) forment un triangle homothétique à ABC ; le centre d'homothétie est le point r_a, r_b, r_c ;

(3), (6), (9) forment un triangle homothétique à ABC; le centre d'homothétie est le point r_c, r_a, r_b.

Pour étudier toutes les droites du groupe, il nous suffira d'étudier les deux types qui comprennent les neuf droites; nous prendrons, par exemple,

$$p\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

et

$$\alpha(p-b) + b\beta + c\gamma = 0.$$

La droite $p\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est parallèle à BC; elle coupe AC en V et AB en V'; BV et AA'_b sont parallèles, CV' et AA'_c également.

La droite $(p-b)\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est parallèle à BC ; elle coupe AC en V_1 et AB en V'_1 ; BV_1 et AA' sont parallèles, CV'_1 et AA'_a également.

Étude de 12 points; groupe (M).

Nous les définissons ainsi

$$\begin{array}{llll} \alpha_0, \ \alpha_a, \ \alpha_b, \ \alpha_c & \text{sont sur} & BC, \\ \beta_0, \ \beta_a, \ \beta_b, \ \beta_c & \text{»} & CA, \\ \gamma_0, \ \gamma_a, \ \gamma_b, \ \gamma_c & \text{»} & AB, \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} o\,\alpha_0, \ o\,\beta_0, \ o\gamma_0 & \text{sont respectivement} & \text{perpendiculaires à} & Ao, \ Bo, \ Co; \\ o_a\alpha_a, \ o_a\beta_a, \ o_a\gamma_a & \text{»} & \text{»} & Ao_a, \ Bo_a, \ Co_a; \\ o_b\alpha_b, \ o_b\beta_b, \ o_b\gamma_b & \text{»} & \text{»} & Ao_b, \ Bo_b, \ Co_b; \\ o_c\alpha_c, \ o_c\beta_c, \ o_c\gamma_c & \text{»} & \text{»} & Ao_c, \ Bo_c, \ Co_c; \end{array}$$

on voit alors que

$$(\mathrm{M}) \left\{ \begin{array}{lllll} A\alpha_0 \text{ et } C'_b B'_c & \text{sont parallèles;} & \alpha_0 & \text{a pour coordonnées} & o, \ -(p-c), \ (p-b), \\ B\beta_0 \text{ et } A'_c C'_a & \text{»} & \beta_0 & \text{»} & (p-c), \ o, \ -(p-a), \\ C\gamma_0 \text{ et } B'_a A'_b & \text{»} & \gamma_0 & \text{»} & -(p-b), \ (p-a), \ o, \\ A\alpha_a \text{ et } B'_b C'_e & \text{»} & \alpha_a & \text{»} & o, \ -(p-b), \ (p-c), \\ B\beta_a \text{ et } C' A'_b & \text{»} & \beta_a & \text{»} & (p-b), \ o, \ -p, \\ C\gamma_a \text{ et } B' A'_c & \text{»} & \gamma_a & \text{»} & -(p-c), \ p, \ o, \\ A\alpha_b \text{ et } C' B'_a & \text{»} & \alpha_b & \text{»} & o, \ -(p-a), \ p, \\ B\beta_b \text{ et } A'_a C'_c & \text{»} & \beta_b & \text{»} & (p-a), \ o, \ -(p-c), \\ C\gamma_b \text{ et } A' B'_c & \text{»} & \gamma_b & \text{»} & -p, \ (p-c), \ o, \\ A\alpha_c \text{ et } B' C'_a & \text{»} & \alpha_c & \text{»} & o, \ -p, \ (p-a), \\ B\beta_c \text{ et } A' C'_b & \text{»} & \beta_c & \text{»} & p, \ o, \ -(p-b), \\ C\gamma_c \text{ et } A'_a B'_b & \text{»} & \gamma_c & \text{»} & -(p-a), \ (p-b), \ o. \end{array} \right.$$

Les points α_0, β_0, γ_0 sont sur la droite

$$(\mathrm{N}_o) \qquad \alpha(p-a)+\beta(p-b)+\gamma(p-c)=o;$$

les points α_a, β_b, γ_c sont sur la droite

$$(\mathrm{N}'_o) \qquad \frac{\alpha}{p-a}+\frac{\beta}{p-b}+\frac{\gamma}{p-c}=o;$$

les points α_a, β_a, γ_a sont sur la droite

$$(\mathrm{N}_a) \qquad \alpha p+\beta(p-c)+\gamma(p-b)=o;$$

les points α_0, β_c, γ_b sont sur la droite

$$(\mathrm{N}'_a) \qquad \frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{p-c}+\frac{\gamma}{p-b}=o.$$

On aurait de même les droites (N_b), (N'_b), (N_c), (N'_c).

Le point d'intersection N_a de (N_b) et de (N_c) est

$$-(b+c),\quad b\cos C,\quad c\cos B;$$

le point d'intersection N'_a de (N'_b) et de (N'_c) est

$$-(b+c)\operatorname{tang}^2\frac{A}{2},\quad b\cos C,\quad c\cos B;$$

le point d'intersection N_{oa} de (N_o) et de (N_a) est

$$(b-c),\quad -b\cos C,\quad c\cos B;$$

le point d'intersection N'_{oa} de (N'_o) et de (N'_a) est

$$(b-c)\cot^2\frac{A}{2},\quad -b\cos C,\quad c\cos B;$$

on aurait de même les points N_b, N'_b, N_c, N'_c, N_{ob}, N'_{ob}, N_{oc}, N'_{oc}.

Les deux triangles ABC, $N_aN_bN_c$ sont homologiques; l'axe d'homologie est (N'_o) et le centre d'homologie a pour coordonnées tang A, tang B, tang C, qui est aussi le centre d'homologie de ABC et de $N'_aN'_bN'_c$. Les deux triangles ABC, $N_{oa}N_{ob}N_c$ sont homologiques; l'axe d'homologie est (N'_c), le centre d'homologie est tang A, tang B, — tang C qui est aussi le centre d'homologie de ABC et de $N'_{oa}N'_{ob}N'_c$, de même pour ABC, $N_{oa}N_bN_{oc}$, ABC, $N'_{oa}\,N'_b\,N'_{oc}$, ...

Remarque. — Le centre d'homologie des deux triangles ABC, $N_{oa}N_{ob}N_c$ est le point associé en A [1] du centre d'homologie des

---

[1] Nous avons montré, à diverses reprises, l'importance de la notion des points associés dans la géométrie du triangle. Voici les définitions et quelques propriétés.

Le point O ayant pour coordonnées α, β, γ aura respectivement les points O_a : $-\alpha, \beta, \gamma$; O_b : $\alpha, -\beta, \gamma$; O_c : $\alpha, \beta, -\gamma$ pour points associés en A, en B et en C.

Une courbe est simplement associée à elle-même en A, si elle est le lieu du point O en même temps que le lieu du point O_a.

Si une courbe est doublement associée à elle-même, par exemple en A et en B, elle l'est aussi en C, c'est-à-dire qu'elle est triplement associée à elle-même.

Une courbe de degré impair ne peut être doublement associée à elle-même, à moins qu'un des côtés du triangle de référence ne fasse partie de la courbe.

Une conique, qui est elle-même triplement son associée, a évidemment une équation de la forme $L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$, c'est-à-dire :

1° Qu'elle ne peut couper à la fois en des points réels les trois côtés du triangle de référence;

2° Que les deux points d'intersection d'un côté du triangle de référence avec deux triangles ABC, $N_a N_b N_c$; nous avons déjà rencontré ce point (voir *Bulletin de la Société mathématique*, p. 76; 1884).

Lemme. — Soit une circonférence tangente à deux droites X et Y. Je mène une tangente à cette circonférence qui coupe X en x, Y en y; par x je mène une parallèle à une direction donnée λ, par y une parallèle à une direction donnée μ : ces deux droites se rencontrent en O. Le lieu de O, si la tangente varie, est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à λ et à μ.

Nous n'insistons pas sur la démonstration fort simple de ce lemme.

A. Supposons que le cercle soit le cercle inscrit :

1° Prenons pour droites X et Y les deux côtés AB et AC du triangle de référence et pour λ et μ les antiparallèles à AB et à AC.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P_a)\quad \left\{\begin{aligned} o = &-\alpha^2(p-a)+\beta^2(p-b)+\gamma^2(p-c)\\ &+(2p\cos A-b-c)\beta\gamma+(c-a)\alpha\gamma+(b-a)\alpha\beta.\end{aligned}\right.$$

2° Prenons BC et BA pour droites X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à BA et à BC.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(P_b)\quad \left\{\begin{aligned} o = &\,\alpha^2(p-a)-\beta^2(p-b)+\gamma^2(p-c)\\ &+(c-b)\beta\gamma+(2p\cos B-a-c)\alpha\gamma+(a-b)\alpha\beta.\end{aligned}\right.$$

3° Prenons CA et CB pour droites X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à CB et à CA.

---

cette conique sont conjugués harmoniques par rapport aux deux sommets qui sont sur ce côté.

Si une parabole est à elle-même triplement son associée, son équation a l'une des trois formes

$$-\alpha^2a^2\lambda+(b^2+c^2\lambda)(\gamma^2+\lambda\beta^2)=o,$$
$$-\beta^2b^2\lambda+(c^2+a^2\lambda)(\alpha^2+\lambda\gamma^2)=o,$$
$$-\gamma^2c^2\lambda+(a^2+b^2\lambda)(\beta^2+\lambda\alpha^2)=o;$$

elle est inscrite dans le triangle qui a pour sommets les milieux des côtés du triangle de référence.

Si une hyperbole équilatère est à elle-même triplement son associée, elle passe par les quatre centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle de référence et réciproquement.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(\mathrm{P}_c)\quad \left\{\begin{aligned} o &= \alpha^2(p-a)+\beta^2(p-b)-\gamma^2(p-c)\\ &+(b-c)\beta\gamma+(a-c)\alpha\gamma+(2p\cos\mathrm{C}-a-b)\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

(P_a) coupe AC et AB aux pieds β_1, γ_1 des bissectrices intérieures;

(P_a) coupe encore AC et AB en β_0, γ_0;

(P_a) passe par A_1 et a pour asymptotes des antiparallèles à AB et à AC.

Les hyperboles (P_b), (P_c) jouissent de propriétés analogues.

B. Supposons que le cercle soit le cercle exinscrit o_a.

1° Prenons AB et AC pour X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à AC et à AB.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(\mathrm{P}'_a)\quad \left\{\begin{aligned} o &= \alpha^2 p+\beta^2(p-c)+\gamma^2(p-b)\\ &-[2(p-a)\cos\mathrm{A}-b-c]\gamma\beta+(c+a)\alpha\gamma+(a+b)\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

2° Prenons BC et BA pour X et Y et pour λ et μ les antiparallèles à AB et à BC.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(\mathrm{P}'_b)\quad \left\{\begin{aligned} o &= \alpha^2 p+\beta^2(p-c)-\gamma^2(p-b)+(c-b)\gamma\beta\\ &+[2(p-a)\cos\mathrm{B}+c-a]\alpha\gamma+(a+b)\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

3° Prenons CA et CB pour X et pour Y et pour λ et μ les antiparallèles à CB et CA.

L'hyperbole lieu de O aura pour équation

$$(\mathrm{P}'_c)\quad \left\{\begin{aligned} o &= \alpha^2 p-\beta^2(p-c)+\gamma^2(p-b)\\ &+(b-c)\beta\gamma+(c+a)\alpha\gamma+[2(p-a)\cos\mathrm{C}+b-a]\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

C. Supposons que le cercle soit le cercle exinscrit o_b, on aura de même :

1° AB et AC pris pour X et Y, les antiparallèles à A et à B pour λ et μ,

$$(\mathrm{P}''_a)\quad \left\{\begin{aligned} o &= \alpha^2(p-c)+\beta^2 p-\gamma^2(p-a)\\ &+[2(p-b)\cos\mathrm{A}+c-b]\gamma\beta+(c-a)\alpha\gamma+(a+b)\alpha\beta; \end{aligned}\right.$$

2° BA et BC pris pour X et Y ; les antiparallèles à BC et à BA pour λ et μ,

$$(P''_b) \quad \begin{cases} o = \alpha^2(p-c) + \beta^2 p + \gamma^2(p-a) + (c+b)\gamma\beta \\ \quad - [2(p-b)\cos B - c - a]\alpha\gamma + (a+b)\alpha\beta; \end{cases}$$

3° CA et CB pris pour X et Y ; les antiparallèles à CB et CA pour λ et μ,

$$(P''_c) \begin{cases} o = -\alpha^2(p-c) + \beta^2 p + \gamma^2(p-a) \\ \quad + (c+b)\gamma\beta + (a-c)\alpha\gamma + [2(p-b)\cos C + a - b]\alpha\beta. \end{cases}$$

D. Supposons que le cercle soit le cercle exinscrit o_c, on aura enfin :

1° AB et AC pris pour X et Y ; les antiparallèles à AC et à AB pour λ et μ,

$$(P'''_a) \begin{cases} o = \alpha^2(p-b) - \beta^2(p-a) + \gamma^2 p \\ \quad + [2(p-c)\cos A + b - c]\beta\gamma + (a+c)\alpha\gamma + (b-a)\alpha\beta; \end{cases}$$

2° BA et BC pris pour X et Y les antiparallèles à BC et à BA pour λ et μ,

$$(P'''_b) \quad \begin{cases} o = -\alpha^2(p-b) + \beta^2(p-a) + \gamma^2 p + (b+c)\beta\gamma \\ \quad + [2(p-c)\cos B + a - c]\alpha\gamma + (a-b)\alpha\beta, \end{cases}$$

3° CA et CB pris pour X et Y ; les antiparallèles à CB et à CA pour λ et μ,

$$(P'''_c) \quad \begin{cases} o = \alpha^2(p-b) + \beta^2(p-a) + \gamma^2 p + (b+c)\beta\gamma \\ \quad + (a+c)\alpha\gamma - [2(p-c)\cos C - a - b]\alpha\beta. \end{cases}$$

(P'_a) a pour asymptotes des antiparallèles à AB et à AC, coupe AB en γ_a et en γ'_1, AC en β_a et en β'_1 et passe par A_1.

(P'_b) a pour asymptotes des antiparallèles à AB et à BC, coupe BC en α_a et en α_1, AB en γ_a et en γ'_1 et passe par B_1 ; de même (P'_c) a pour asymptotes des antiparallèles à CA et à CB, coupe CA en β_α et β'_1, CB en α_1 et α_a et passe par C_1.

Il n'est pas nécessaire d'insister sur les courbes (P''_a), (P''_b), (P''_c), (P'''_a), (P'''_b), (P'''_c) qui jouissent de propriétés analogues.

Problème I. — *Trouver le lieu du point* O, *tel que les trois points* 1_1, 2_2, 3_3 *soient en ligne droite.*

Il suffit d'exprimer que la surface du triangle $1_1 2_2 3_3$ est nulle.

La formule (C) nous donne

$$(1) \qquad \beta\gamma(b^2-c^2)\cos A + \alpha\gamma(c^2-a^2)\cos B + \alpha\beta(a^2-b^2)\cos C = 0;$$

c'est une hyperbole *équilatère* circonscrite au triangle ABC. Elle passe par le point de Lemoine et a pour inverse la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre de gravité.

Le centre de l'hyperbole (1) a pour coordonnées

$$\cos A \sin^2(B-c), \quad \cos B \sin^2(C-A), \quad \cos C \sin^2(A-B).$$

La tangente à cette courbe au point de Lemoine passe par le point $a \operatorname{tang} A$, $b \operatorname{tang} B$, $c \operatorname{tang} C$ ou

$$\frac{a^2}{\cos A}, \quad \frac{b^2}{\cos B}, \quad \frac{c^2}{\cos C},$$

et a pour équation

$$\sum \alpha \frac{\sin(B-C)}{\operatorname{tang} A} = 0;$$

Remarque I. — Si O est le point de Lemoine, la droite $1_1\, 2_2\, 3_3$ a pour équation

$$\sum \frac{\alpha}{a \operatorname{tang} A} = 0;$$

nous savons que les six points 1_2, 1_3, 2_1, 2_3, 3_1, 3_2 sont alors sur un cercle, que $3_2 2_3$, $1_3 3_1$, $2_1 1_2$ sont respectivement parallèles à BC, AC, AB et proportionnels à $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

Remarque II. — Si, pour trouver le lieu, nous nous étions servi du théorème de Ménélaüs qui donne

$$\frac{1_1 B}{1_1 C}\,\frac{2_2 C}{2_2 A}\,\frac{3_3 A}{3_3 B} = 1,$$

nous aurions trouvé une équation du troisième degré en α, β, γ, mais contenant le facteur $a\alpha + b\beta + c\gamma$ qui, égalé à zéro, représente la droite de l'infini; ce facteur étant enlevé, on trouve naturellement l'équation (1).

Problème II. — *Trouver le lieu du point* O, *tel que les trois points* 1_3, 2_1, 3_2 *soient en ligne droite.*

La formule (B) nous donne immédiatement

$$(2) \qquad \beta\gamma ab \cos B + \gamma\alpha bc \cos C + \alpha\beta ca \cos A = 0,$$

qui représente une conique circonscrite à ABC.

Problème III. — *Trouver le lieu du point* O, *tel que les trois points* 1_2, 2_3, 3_1 *soient en ligne droite.*

La formule (A) nous donne immédiatement

$$\beta\gamma ac\cos C + \gamma\alpha ba\cos A + \alpha\beta cb\cos B = 0 \tag{3}$$

qui représente une conique circonscrite à ABC.

Remarque. — Si trois points (pris chacun sur un côté différent de ABC) parmi les neuf points 1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1, 3_2, 3_3 sont en ligne droite, les six autres sont sur une conique; cela permet d'énoncer autrement les problèmes I, II, III et V.

Problème IV. — *Trouver le lieu des points* O *pour lesquels les deux triangles* $1_2 2_3 3_1$, $1_3 2_1 3_2$ *sont équivalents.*

1° On peut pour cela écrire que les expressions (A) et (B) sont égales, ce qui donnera le lieu qui a pour équation

$$a\beta\gamma(\sin 2B - \sin 2C) + b\gamma\alpha(\sin 2C - \sin 2A) + c\alpha\beta(\sin 2A - \sin 2B);$$

on la met facilement sous la forme

$$\beta\gamma(b^2 - c^2)\cos A + \gamma\alpha(c^2 - a^2)\cos B + \alpha\beta(a^2 - b^2)\cos C = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (1).

On a donc ce théorème :

Théorème I. — *Si les trois points* 1_1, 2_2, 3_3 *sont en ligne droite les triangles* $1_2 2_3 3_1$, $1_3 2_1 3_2$ *sont équivalents.*

2° On peut aussi écrire que les deux expressions (A) et (B) ont une somme égale à zéro.

Ce qui donne la conique

$$\Sigma a\beta\gamma(b\cos B + c\cos C) = 0, \tag{4}$$

qui passe par le point

$$\frac{1}{(c^2 - b^2)\cos A}, \quad \frac{1}{(a^2 - c^2)\cos B}, \quad \frac{1}{(b^2 - a^2)\cos C}.$$

Remarque I. — Il est facile de voir que les quatre coniques

(1), (2), (3), (4) passent au point

$$\frac{a}{a^2\cos^2 A - bc\cos B\cos C},$$
$$\frac{b}{b^2\cos^2 B - ca\cos C\cos A},$$
$$\frac{c}{c^2\cos^2 C - ab\cos A\cos B}$$

ou

$$\frac{\sin A}{\sin^2 2A - \sin 2B \sin 2C}, \quad \dots$$

et que pour ce point les trois groupes 1_1, 2_2, 3_3 ; 1_3, 2_1, 3_2 ; 1_2, 2_3, 3_1 sont formés chacun de trois points en ligne droite.

Problème V. — *Trouver le point* O *pour lequel les trois points* 1_1, 2_3, 3_2 *sont en ligne droite.*

La formule (D) nous donne comme équation du lieu

$$(5)\qquad \beta\gamma(c^2 - b^2)\cos A - \gamma\alpha bc\cos C + \alpha\beta bc\cos B = 0;$$

de même, les trois points 2_2 1_3 3_1 seront en ligne droite si O décrit le lieu

$$(6)\qquad \beta\gamma ac\cos C + \gamma\alpha(a^2 - c^2)\cos B - \alpha\beta ac\cos A = 0,$$

et les trois points 3_3 2_1 1_2 seront en ligne droite si O décrit le lieu

$$(7)\qquad -\beta\gamma ab\cos B + \gamma\alpha ab\cos A + \alpha\beta(b^2 - a^2)\cos C = 0;$$

en ajoutant (5), (6), (7) membre à membre, on trouve une identité; donc *ces trois coniques se coupent en un même point pour lequel les points* 1_1, 2_3, 3_2; 2_2, 1_3, 3_1; 3_3, 2_1, 1_2 *forment trois groupes de trois points en ligne droite.*

Ce point a pour coordonnées

$$\frac{\sin A}{\sin 2A\sin 2B + \sin 2A\sin 2C - \sin 2B\sin 2C},$$
$$\frac{\sin B}{\sin 2B\sin 2C + \sin 2B\sin 2A - \sin 2A\sin 2C},$$
$$\frac{\sin C}{\sin 2C\sin 2A + \sin 2C\sin 2B - \sin 2A\sin 2B}.$$

Problème VI. — *Trouver le point* O *pour lequel les trois longueurs* $O1_1$, $O2_2$, $O3_3$ *sont égales.*

En nous reportant aux expressions de ces longueurs données précédemment, on voit que cette égalité a lieu pour le point T

$$\frac{b^2-c^2}{a}, \quad \frac{c^2-a^2}{b}, \quad \frac{a^2-b^2}{c}$$

et pour les trois associés (¹) T_a, T_b, T_c.

Le point T étant à l'infini, il ne reste que les trois points T_a

$$-\frac{b^2-c^2}{a}, \quad \frac{c^2-a^2}{b}, \quad \frac{a^2-b^2}{c},$$

T_b, T_c.

On a alors, pour le point T_a,

$$1_1 T_a = \frac{abc}{b^2-c^2};$$

pour le point T_b,

$$1_1 T_b = \frac{abc}{a^2-c^2};$$

pour le point T_c,

$$1_1 T_c = \frac{abc}{a^2-b^2}.$$

Remarque I. — Ces longueurs sont respectivement égales à la partie de la tangente au cercle circonscrit comprise entre le sommet et le côté opposé.

Remarque II. — Les expressions données en fonction de α, β, γ des diverses lignes de la figure nous permettent d'écrire immédiatement le lieu du point O qui correspond à une relation donnée entre ces lignes ; elles permettent aussi d'établir (par exemple, en se servant de l'identité $2S = a\alpha + b\beta + c\gamma$) une série d'autres identités et aussi d'énoncer un grand nombre de théorèmes. En voici quelques exemples :

1. *Quel que soit* O, *on a*

$$abc = O1_1(b^2-c^2) + O2_2(c^2-a^2) + O3_3(a^2-b^2),$$
$$abc = a^2 O3_1 + b^2 O1_2 + c^2 O2_1 = a^2 O2_1 + b^2 O3_2 + C^2 O1_3,$$
$$O1_2 \times O2_3 \times O3_1 = O1_3 \times O2_1 \times O3_2.$$

(¹) *Voir* précédemment la Note sur les points associés.

2. *Le point* O, *pour lequel on a*

$$\frac{O1_1}{b^2-c^2}=\frac{O2_2}{c^2-a^2}=\frac{O3_3}{a^2-b^2},$$

est tel que $\overline{O1_1}^2+\overline{O1_2}^2+\overline{O3_3}^2$ *est un minimum.*

Les coordonnées de ce point O *sont*

$$\frac{(b^2-c^2)^2}{a},\quad \frac{(c^2-a^2)^2}{b},\quad \frac{(a^2-b^2)^2}{c}.$$

3. *Pour tous les points d'une même parallèle à l'axe d'homologie du triangle* ABC *et du triangle formé par les pieds des symmédianes,* on a

$$1_2 1_3+2_3 2_1+3_1 3_2=\text{const}.$$

etc., etc.

Problème VII. — *Trouver le lieu des points* O *pour lesquels* 1_1, 1_3, O, 1_2 *forment une division harmonique.*

En écrivant les valeurs des rapports au moyen des expressions précédemment données des longueurs $1_3 1_1$, $1_3 1_2$, $O1_1$, $O1_2$, on a

$$\frac{2(c^2-b^2)}{a\alpha}-\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=0:$$

c'est une hyperbole circonscrite à ABC; elle passe par le point de l'infini $-\frac{2}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$; c'est-à-dire qu'elle a une asymptote parallèle à la médiane partant de A.

Théorème II. — *Si le point* O *décrit une hyperbole circonscrite au triangle* ABC *et qui ait une asymptote antiparallèle à* BC, *le rapport anharmonique des quatre points comprenant* O *et les trois points où l'antiparallèle à* BC *menée par* O *coupe les trois côtés est constant.*

Problème VIII. — *Trouver les points* O *du plan pour lesquels l'hexagone* $2_1\, 3_1\, 1_3\, 2_3\, 3_2\, 1_2$ *est circonscriptible à un cercle.*

Ce cercle ne peut être que l'un des quatre cercles inscrits dans le triangle ABC; il y aura quatre points O donnant une solution du problème; appelons H_0 celui de ces points qui correspond au cercle inscrit, H_a, H_b, H_c ceux qui correspondent respectivement aux cercles exinscrits o_a, o_b, o_c.

Cherchons d'abord le point H_0 : puisque $H_0 2_3$ et $H_0 3_2$ sont antiparallèles à AC et à AB et que $2_3 3_2$ doit être tangente au cercle inscrit, il est évident que H_0 appartient à l'hyperbole (P_a); de même H_0 appartient à (P_b) et à (P_c).

Le problème revient à chercher le point commun à ces trois hyperboles ou par conséquent à deux d'entre elles.

Si l'on ajoute (P_b), (P_c), on voit que H_0 sera sur la droite

$$\alpha(p-a)+\beta(p\cos C-b)+\gamma(p\cos B-c)=0; \tag{8}$$

il sera de même sur les droites

$$\alpha(p\cos C-a)+\beta(p-b)+\gamma(p\cos A-c)=0, \tag{9}$$

$$\alpha(p\cos B-a)+\beta(p\cos A-b)+\gamma(p-c)=0. \tag{10}$$

L'équation (8) peut s'écrire

$$p(\alpha+\beta\cos C+\gamma\cos B)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0,$$

par conséquent (8) est parallèle à l'antiparallèle (I_a) à BC : c'est donc l'antiparallèle à BC passant par H_0.

Donc les intersections de (8), diagonale de l'hexagone cherché, avec AC et AB, seront les sommets 1_2 et 1_3 de cet hexagone.

De même (9) et (10) représentent les diagonales $2_1 2_3$ et $3_1 3_2$.

Calculons les coordonnées de H_0.

Il suffit évidemment de résoudre deux des équations (8), (9) et (10), mais les résultats ne se présentant pas immédiatement sous une forme symétrique, nous allons procéder autrement.

En retranchant deux à deux les trois équations (8), (9) et (10), on trouve

$$-\alpha(1-\cos B)+\beta(\cos A-\cos C)+\gamma(1-\cos B)=0, \tag{11}$$

$$\alpha(1-\cos C)-\beta(1-\cos C)+\gamma(\cos B-\cos A)=0, \tag{12}$$

$$\alpha(\cos C-\cos B)+\beta(1-\cos A)-\gamma(1-\cos A)=0, \tag{13}$$

qui représentent trois droites passant en H_0; en tirant de deux d'entre elles les valeurs α, β, γ, on trouve facilement pour ces coordonnées

$$(1-\cos A)(1+\cos A-\cos B-\cos C),$$
$$(1-\cos B)(1+\cos B-\cos A-\cos C),$$
$$(1-\cos C)(1+\cos C-\cos A-\cos B),$$

ou

$$ar_a(2R-r_a),\quad br_b(2R-r_b),\quad cr_c(2R-r_c)$$

ou

$$ar_a(br_b + cr_c - ar_a), \quad br_b(ar_a + cr_c - br_b), \quad cr_c(ar_a + br_b - cr_c).$$

Construction géométrique du point H_0.

PREMIÈRE CONSTRUCTION.

La droite (8) peut se mettre sous la forme

$$(p-a)\alpha - b\beta - c\gamma + p(\beta\cos C + \gamma\cos B) = 0;$$

c'est donc l'antiparallèle à BC qui passe par le point d'intersection des deux droites

$$\beta\cos C + \gamma\cos B = 0;$$

c'est-à-dire $A\,\mathrm{I}_a$,

$$-(p-a)\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

c'est-à-dire (J_a).

Donc pour construire (8) on joint $A\mathrm{I}_a$; on mène par C une parallèle à BB'_a, parallèle qui coupe AB en un point par lequel on mène une parallèle à BC; cette parallèle coupe $A\,\mathrm{I}_a$ en un point par lequel on mène l'antiparallèle à BC : c'est la droite (8).

On construit de même soit (9), soit (10), et le point H_0 est déterminé.

SECONDE CONSTRUCTION.

Au lieu de construire deux des droites (8), (9) et (10) comme cela se présente le plus naturellement à l'idée, il est plus simple de construire deux des droites (11), (12), (13).

(11) peut s'écrire

$$(\gamma + \beta\cos A + \alpha\cos B) - (\alpha + \beta\cos C + \gamma\cos B) = 0:$$

donc (11) passe par I_b, intersection des deux droites (I_c) et (I_a); mais (11) coupe AC au pied β_1 de la bissectrice de l'angle CBA : donc la droite (11) est la droite $\beta_1 I_b$, de même (12) est la droite $\gamma_1 I_c$ et (13) est la droite $\alpha_1 I_a$; donc :

THÉORÈME III. — *Les trois droites $\alpha_1 I_a$, $\beta_1 I_b$, $\gamma_1 I_c$ se coupent au point H_0.*

Remarque. — La tangente $1_2 2_1$ au cercle inscrit a pour équation

$$\alpha \frac{p-a}{c-p\cos B} + \beta \frac{p-b}{c-p\cos A} - \gamma = 0.$$

Cherchons maintenant le point H_a.

On verrait de même, par les considérations qui nous ont servi pour le point H_0, que H_a est le point commun aux trois hyperboles (P'_a), (P'_b), (P'_c) ou encore le point commun à leurs intersections deux à deux, c'est-à-dire le point commun aux droites

$$(8') \qquad \alpha p + \beta[(p-a)\cos C + b] + \gamma[(p-a)\cos B + c] = 0,$$

$$(9') \qquad \alpha[(p-a)\cos C - a] - \beta(p-c) + \gamma[(p-a)\cos A - c] = 0,$$

$$(10') \qquad \alpha[(p-a)\cos B - a] + \beta[(p-a)\cos A - b] - \gamma(p-b) = 0;$$

$(8')$ peut s'écrire

$$\alpha p + \beta p \cos c + \gamma p \cos B + \beta(b - a\cos C) + \gamma(C - a\cos B) = 0$$

ou

$$p(\alpha + \beta\cos C + \gamma\cos B) + \cos A(\beta c + \gamma b) = 0;$$

comme les deux droites $\alpha + \beta\cos C + \gamma\cos B = 0$ et $\beta c + \gamma b = 0$ sont des antiparallèles à BC, on voit que $(8')$ est antiparallèle à BC.

$(8')$ donne donc par ses intersections avec AC et AB les points 1_2, 1_3 de l'hexagone cherché : elle est une de ses diagonales.

$(9')$ peut s'écrire

$$(p-a)(\alpha\cos C + \beta + \gamma\cos A) - (a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

ce qui prouve qu'elle est parallèle à (I_b), c'est-à-dire antiparallèle à AC; de même $(10')$ est antiparallèle à BC; $(9')$ et $(10')$ sont donc aussi des diagonales de l'hexagone cherché.

Calcul des coordonnées de H_a.

Des équations $(8')$, $(9')$ et (10) on déduit, en retranchant $(10')$ de $(9')$ et divisant par $(p-a)$,

$$(11') \qquad \alpha(\cos C - \cos B) + \beta(1-\cos A) - \gamma(1-\cos A) = 0.$$

En ajoutant $(8')$ et $(9')$, puis divisant par $(p-a)$,

$$(12') \qquad \alpha(1+\cos C) + \beta(1+\cos C) + \gamma(\cos A + \cos B) = 0.$$

En ajoutant (8′) et (10′), puis divisant par $(p - a)$,

$$(13') \qquad \alpha(1+\cos B)+\beta(\cos A+\cos C)+\gamma(1+\cos B)=0;$$

de deux des équations (11′), (12′), (13′) on déduit facilement pour les coordonnées de H_a

$$-(1-\cos A)(1+\cos A+\cos B+\cos C),$$
$$(1+\cos B)(1-\cos A-\cos B+\cos C),$$
$$(1+\cos C)(1-\cos A+\cos B-\cos C),$$

ou

$$-ar(2R+r), \quad br_c(2R-r_c), \quad cr_b(2R-r_b).$$

Remarquons en passant les identités

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R},$$
$$\cos B+\cos C-\cos A=\frac{r_a}{R}-1,$$

ou

$$\cos B+\cos C=\frac{r+r_a}{2R},$$
$$\cos A=1-\frac{r_a-r}{2R}.$$

L'équation (11′) et l'équation (13′) sont identiques, cela prouve que

$$\alpha(\cos C-\cos B)+\beta(1-\cos A)-\gamma(1-\cos A)=0$$

est l'équation de la droite H_oH_a, celles de H_oH_b, H_oH_c seront donc respectivement

$$-\alpha(1-\cos B)+\beta(\cos A-\cos C)+\gamma(1-\cos B)=0,$$
$$\alpha(1-\cos C)-\beta(1-\cos C)+\gamma(\cos B-\cos A)=0.$$

Si nous cherchons à déterminer H_b, nous trouverions trois équations analogues à (11′), (12′), (13′), parmi lesquelles se retrouvera

$$\alpha(1+\cos C)+\beta(1+\cos C)+\gamma(\cos A+\cos B)=0;$$

c'est-à-dire (12′).

Cette équation est donc l'équation de H_aH_b; de même H_aH_c, H_bH_c ont pour équations

$$\alpha(1+\cos B)+\beta(\cos A+\cos C)+\gamma(1+\cos B)=0,$$
$$\alpha(\cos B+\cos C)+\beta(1+\cos A)+\gamma(1+\cos A)=0.$$

Construction géométrique du point H_a.

PREMIÈRE CONSTRUCTION.

(8′) peut s'écrire

$$\alpha p + \beta b + \gamma c + (p - a)(\beta \cos C + \gamma \cos B) = 0;$$

par conséquent, elle passe par le point d'intersection de

$$\alpha p + \beta b + \gamma c = 0,$$

première droite du groupe K avec $A1_a$.

Donc, pour construire (8′), on joint $A1_a$; on mène par C une parallèle à AA'_c qui coupe AB en un point par lequel on mène une parallèle à BC; cette parallèle coupe $A1_a$ en un point par lequel on mène l'antiparallèle à BC. C'est la droite (8′).

Construction de (9′) *et de* (10′) : (9′) et (10′) peuvent s'écrire

$$(p-a)(\alpha \cos C + \gamma \cos A) - [a\alpha + \beta(p-c) + \gamma c] = 0,$$
$$(p-a)(\alpha \cos B + \beta \cos A) - [a\alpha + \beta b + \gamma(p-b)] = 0;$$

elles peuvent donc se construire par les droites $B2_b$, $C3_c$ la cinquième et la neuvième du groupe K.

SECONDE CONSTRUCTION.

Au lieu des droites (8′), (9′), (10′), nous allons employer les droites (11′), (12′), (13′).

(11′) passe en α_1, mais son équation peut s'écrire

$$\alpha \cos C + \beta + \gamma \cos A - (\alpha \cos B + \beta \cos A + \gamma) = 0,$$

elle passe donc par I_a :

(11′) est donc $\alpha_1 I_a$; on verrait de même que (12′) est la droite $\gamma'_1 I_c$ et (13′) la droite $\beta'_1 I_b$.

On a donc ce théorème :

Théorème IV. — *Les trois droites $\alpha_1 I_a$, $\beta'_1 I_b$, $\gamma'_1 I_c$ se coupent en H_a.*

On trouverait de même les points H_b, H_c.

ABC et $H_a H_b H_c$ sont homologiques, l'axe d'homologie est la droite $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1$, ou $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Le centre d'homologie est le point

$$\frac{a}{r_a(2R - r_a)}, \quad \frac{b}{r_b(2R - r_b)}, \quad \frac{c}{r_c(2R - r_c)}.$$

ABC et $H_b H_a H_o$ sont homologiques ; l'axe d'homologie est la droite $\alpha_1 \beta_1 \gamma'_1$ ou $\alpha + \beta - \gamma = 0$.

Le centre d'homologie a pour coordonnées

$$-\frac{a}{r_b(2R - r_b)}, \quad -\frac{b}{r_a(2R - r_a)}, \quad \frac{c}{r(2R + r)},$$

etc., etc.

Énonçons pour terminer le théorème suivant dont la démonstration est facile.

Théorème V. — *Soit* ω *l'un des quatre centres des cercles tangents aux côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ (*l'un de ces centres est le centre du cercle circonscrit à* ABC ; *les trois autres forment un triangle directement semblable à* ABC ; *le centre de similitude est l'orthocentre de* ABC, *et le rapport de similitude* $2 \cos A \cos B \cos C$), *si par* ω *on mène les trois antiparallèles aux côtés, les trois distances d'un sommet de* ABC *à l'antiparallèle du côté opposé sont égales entre elles.*