BULLETIN DE LA S. M. F.

S. DAUTHEVILLE

Sur l'hypercycle et la théorie des cycles polaires

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 45-67

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__45_1>

Sur l'hypercycle et la théorie des cycles polaires;

par M. DAUTHEVILLE,

Maître de Conférences à la Faculté de Montpellier.

(Séance du 17 février 1886.)

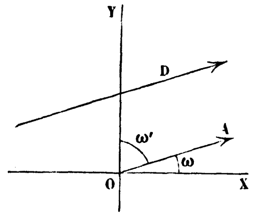
I. — Problèmes préliminaires.

Nous adopterons, dans ce qui va suivre, des coordonnées rectilignes et rectangulaires.

Un cycle est déterminé par les coordonnées de son centre et son rayon. On sait que le rayon d'un cycle est positif ou négatif suivant le sens dans lequel on suppose parcouru par un point mobile le cercle au moyen duquel on définit le cycle.

Considérons une semi-droite D (*fig.* 1). Menons par l'origine une parallèle à la droite correspondante, et prenons la région A

Fig. 1.



sur laquelle se déplacerait un mobile qui s'éloignerait de l'origine en marchant dans le sens qui correspond à la semi-droite donnée.

Soit ω l'angle, moindre que π, que fait A avec OX; et soit ω' l'angle, moindre que π, que fait A avec OY. Chacun de ces angles est déterminé par son cosinus. Soient $\alpha = \cos\omega$, $\beta = \cos\omega'$. On a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Réciproquement, deux quantités données α, β, vérifiant la relation $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, peuvent être considérées comme les cosinus d'une semi-droite A. Cela posé, la semi-droite D sera déterminée par les cosinus α, β, et sa *distance* à l'origine p. Ces trois quantités sont les paramètres de la semi-droite.

Soit un point M ayant pour coordonnées (x, y) et une semi-droite D ayant pour paramètres (α, β, p). La *distance* de M à D est, par définition, le rayon du cycle de centre M tangent à D. On voit sans peine que cette distance d est donnée par la formule suivante :

$$d = \beta x - \alpha y + p.$$

Étant donnée une courbe décrite dans un sens déterminé, les cosinus directeurs de la semi-droite tangente au point (x, y) sont donnés par les formules

$$\alpha = \frac{\partial s}{\partial x}, \qquad \beta = \frac{\partial s}{\partial y},$$

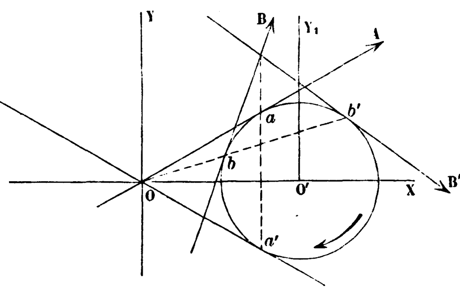
s désignant l'arc de courbe compris entre une origine fixe et le point (x, y), arc pris avec le signe + ou le signe —, suivant qu'il est dirigé dans le sens suivant lequel la courbe est supposée décrite ou bien en sens contraire.

Problème I. — *Étant données les semi-droites* A, A′, B, *trouver les paramètres de la conjuguée harmonique de* B, *relativement à* A, A′.

Prenons l'origine des coordonnées au point de rencontre de A et de A′, l'axe de x suivant celles des bissectrices des droites A, A′, qui est le lieu des centres des cycles tangents aux deux semi-droites, l'axe des y suivant l'autre bissectrice, et choisissons les directions positives des axes, de manière que Ox, tournant de droite à gauche, vienne coïncider avec Oy après une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$.

On sait comment on construit la semi-droite cherchée B′. On décrit le cycle O′ (*fig.* 2), tangent aux trois semi-droites données

Fig. 2.



A, B′, B; la sécante qui joint le point O au point de contact b de B coupe le cycle en un second point b'. La tangente au cycle au point b' est la semi-droite cherchée B′. Cela posé, soient $\sqrt{1-k^2}$, k, o les paramètres de A; $-\sqrt{1-k^2}$, k, o ceux de A′; α, β, p ceux de B; et enfin α', β', p' ceux de B′. Le rayon r et les coordonnées x, y du centre du cycle tangent à A, A′, B seront déterminés par les équations

$$\begin{aligned}
kx - \sqrt{1-k^2}\,y - r &= 0,\\
kx + \sqrt{1-k^2}\,y - r &= 0,\\
\beta x - \alpha y + p - r &= 0,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$y = 0, \qquad x = \frac{p}{k-\beta}, \qquad r = \frac{kp}{k-\beta}.$$

B′ étant tangente au même cycle, on a

$$\beta' \frac{p}{k-\beta} + p' - \frac{kp}{k-\beta} = 0.$$

Ainsi la question sera résolue, si l'on détermine α', β'.

Remarquons que, si l'origine des coordonnées est au centre d'un cycle, les cosinus directeurs de la tangente à ce cycle au point $M(x, y)$ sont déterminés par les relations $\alpha = \frac{y}{r}$, $\beta = -\frac{x}{r}$. En effet, si $r > 0$, désignons par φ l'angle formé par le rayon OM avec OX′, angle compté dans le sens direct. On aura, en prenant l'origine des arcs au point $y = 0$, $x = -r$,

$$s = r\varphi, \qquad x = -r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = r\sin\varphi \cdot \frac{1}{r} = \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

$$\beta = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = r\cos\varphi \cdot \frac{1}{r} = \cos\varphi = -\frac{x}{r}.$$

Si r est négatif, désignons par φ l'angle formé par OM avec OX, angle compté dans le sens rétrograde, et prenons l'origine des arcs au point $y = 0$, $x = -r$. On aura

$$s = -r\varphi, \qquad x = -r\cos\varphi, \qquad y = -r\sin\varphi;$$

d'où

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = r\sin\varphi \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) = -\sin\varphi = \frac{y}{r},$$

$$\beta = \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -r\cos\varphi \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) = \cos\varphi = -\frac{x}{r}.$$

D'après cette remarque, la question se réduit à trouver les coordonnées de b', l'origine étant en O′. Les cosinus d'une semi-droite sont les mêmes par rapport aux axes OX, OY et par rapport aux axes O′X, O′Y. Les coordonnées de b sont donc $x = -r\beta$, $y = r\alpha$; et celles de O, $x = -\frac{p}{k-\beta}$, $y = 0$. La droite Ob a pour équation

$$y = \frac{\alpha(kx + r)}{1 + k\beta}.$$

Les abscisses des points de rencontre de cette droite avec le cercle O′ sont racines de l'équation

$$x^2 + \frac{\alpha^2(kx+r)^2}{(1-k\beta)^2} - r^2 = 0$$

ou

$$(1+k^2-2k\beta)x^2 + 2kr\alpha^2 x - \beta r^2[\beta(1+k^2)-2k] = 0.$$

L'une des racines étant $(-r\beta)$ et l'autre $(-r\beta')$, on a

$$r^2\beta\beta' = -\frac{\beta r^2[\beta(1+k^2)-2k]}{1+k^2-2k\beta};$$

d'où

$$\beta' = \frac{2k-\beta(1+k^2)}{1+k^2-2k\beta}.$$

L'ordonnée du point b' étant $\alpha' r$, on a ensuite

$$\alpha' r = \frac{\alpha r}{1-k\beta}\left[\frac{(1+k^2)\beta k - 2k^2}{1+k^2-2k\beta} + 1\right],$$

d'où

$$\alpha' = \frac{(1-k^2)\alpha}{1+k^2-2k\beta}.$$

Enfin on a trouvé

$$\beta' \frac{p}{k-\beta} + p' - \frac{kp}{k-\beta} = 0;$$

on en tire

$$p' = \frac{-p(1-k^2)}{1+k^2-2k\beta}.$$

Les paramètres cherchés sont donc

$$(1)\quad \alpha' = \frac{(1-k^2)\alpha}{1+k^2-2k\beta}, \qquad \beta' = \frac{2k-(1+k^2)\beta}{1+k^2-2k\beta}, \qquad p' = -\frac{(1-k^2)\beta}{1+k^2-2k\beta}.$$

Problème II. — *Connaissant les paramètres α, β, p d'une semi-droite relativement à un système d'axes, trouver les paramètres α', β', p' de la même semi-droite relatifs à un autre système d'axes.*

Soient a, b les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au premier système d'axes, et soit ω l'angle que font les directions OX, O_1X_1 (angle compté dans le sens rétrograde). On obtient aisément les formules suivantes :

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha = \alpha' \cos\omega - \beta' \sin\omega, \\ \beta = \alpha' \sin\omega + \beta' \cos\omega, \\ p = -\beta' a + \alpha' b + p'; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha' = \alpha \cos\omega + \beta \sin\omega, \\ \beta' = -\alpha \sin\omega + \beta \cos\omega, \\ p' = \beta a - \alpha b + p. \end{cases}$$

Problème III. — *Étant données deux semi-droites* P, P′, *deux autres* A, A′, *qui sont conjuguées harmoniques par rapport aux premières, et enfin une semi-droite* B, *trouver les paramètres de la semi-droite* B′, *qui est conjuguée harmonique de* B *par rapport à* A, A′.

Prenons les axes de coordonnées relativement à P, P′, comme nous avons fait dans le problème I. Désignons par les notations suivantes les paramètres considérés :

$$\begin{array}{ll|ll|ll} P\ldots & \sqrt{1-k^2},\ k,\ 0 & A\ldots & \alpha,\ \beta,\ p & B\ldots & \lambda,\ \mu,\ q \\ P'\ldots & -\sqrt{1-k^2},\ k,\ 0 & A'\ldots & \alpha',\ \beta',\ p' & B'\ldots & \lambda',\ \mu',\ q'. \end{array}$$

α', β', p' s'expriment en fonctions de α, β, p par les formules (1). Si l'on transporte l'origine des coordonnées au point de rencontre de A, A′, les nouveaux paramètres seront

$$A\ldots\ \alpha,\ \beta,\ 0;\quad A'\ldots\ \alpha',\ \beta',\ 0;\quad B\ldots\ \lambda,\ \mu,\ q_1;\quad B'\ldots\ \lambda',\ \mu',\ q'_1.$$

Prenons maintenant comme axe des x la *bissectrice* des semi-droites A, A′, et comme axe Oy la perpendiculaire avec les mêmes conventions relativement aux directions positives des axes. Soient les nouveaux paramètres

$$\begin{array}{ll} A\ldots\ \alpha_1,\ \beta_1,\ 0; & A'\ldots\ \alpha'_1,\ \beta'_1,\ 0; \\ B\ldots\ \lambda_1,\ \mu_1,\ q_1; & B'\ldots\ \lambda'_1,\ \mu'_1,\ q'_1. \end{array}$$

Soit ω l'angle dont il faut faire tourner Ox dans le sens rétrograde pour l'amener sur Ox_1. ω est défini par les conditions

$$\beta = \beta'_1,\qquad \alpha_1 = -\alpha'_1,$$

c'est-à-dire, d'après les formules (3),

$$\beta\cos\omega - \alpha\sin\omega = \beta'\cos\omega - \alpha'\sin\omega.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'}.$$

Les formules (1) donnent

$$\alpha - \alpha' = \alpha - \frac{(1-k^2)\alpha}{1+k^2-2k\beta} = \frac{2k\alpha(k-\beta)}{1+k^2-2k\beta},$$

$$\beta - \beta' = \beta - \frac{2k-(1+k^2)\beta}{1+k^2-2k\beta} = \frac{2(k-\beta)(k\beta-1)}{1+k^2-2k\beta}.$$

De là

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{k\beta - 1}{k\alpha}, \qquad \sin\omega = \frac{k\beta-1}{\sqrt{1+k^2-2k\beta}}, \qquad \cos\omega = \frac{k\alpha}{\sqrt{1+k^2-2k\beta}}.$$

Cela posé, les formules (1) donnent

$$\lambda'_1 = \frac{\alpha_1^2\lambda_1}{1+\beta_1^2-2\beta_1\mu_1},$$

$$\mu'_1 = \frac{2\beta_1-(1+\beta_1^2)\mu_1}{1+\beta_1^2-2\beta_1\mu_1},$$

$$q'_1 = \frac{-\alpha_1^2 q_1}{1+\beta_1^2-2\beta_1\mu_1},$$

et les formules de transformation (2)

$$\lambda' = \lambda'_1\cos\omega - \mu'_1\sin\omega, \qquad \mu' = \lambda'_1\sin\omega + \mu'_1\cos\omega.$$

1° *Calcul de* λ'. — Le numérateur de λ' est

$$(1-\beta_1^2)\lambda_1\cos\omega - 2\beta_1\sin\omega + (1+\beta_1^2)\mu_1\sin\omega$$

ou

$$(\lambda_1\cos\omega + \mu_1\sin\omega) - \beta_1^2(\lambda_1\cos\omega - \mu_1\sin\omega) - 2\beta_1\sin\omega$$

ou

$$\lambda\cos^2\omega + 2\mu\sin\omega\cos\omega - \lambda\sin^2\omega - \lambda\beta_1^2 - 2\beta_1^2\sin\omega$$

ou

$$\lambda(\cos^2\omega - \sin^2\omega - \beta_1^2) + 2\mu\sin\omega\cos\omega - 2\beta_1\sin\omega.$$

Remplaçant maintenant $\sin\omega$, $\cos\omega$, β_1 par leurs valeurs respectives

$$\cos\omega = \frac{k\alpha}{\sqrt{1+k^2-2k\beta}}, \qquad \sin\omega = \frac{k\beta-1}{\sqrt{1+k^2-2k\beta}},$$

$$\beta_1 = \beta\cos\omega - \alpha\sin\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{1+k^2-2k\beta}},$$

on obtient finalement

$$\frac{\lambda[(k^2-1)\alpha^2-(k\beta-1)^2]+2\alpha(k\beta-1)(k\mu-1)}{1+k^2-2k\beta}.$$

La démonstation de λ' est

$$1+\beta_1^2-2\beta_1\mu_1$$

ou bien

$$\frac{2\alpha(k\beta-1)\lambda-2k\alpha^2\mu+1+k^2+\alpha^2-2k\beta}{1+k^2-2k\beta}.$$

On a donc

$$\lambda'=\frac{[(k^2-1)\alpha^2-(k\beta-1)^2]\lambda+2\alpha(k\beta-1)(k\mu-1)}{2\alpha(k\beta-1)\lambda-2k\alpha^2\mu+1+k^2+\alpha^2-2k\beta}.$$

2° *Calcul de* μ'. — Le numérateur est

$$(1-\beta_1^2)\lambda_1\sin\omega+2\beta_1\cos\omega-(1+\beta_1^2)\mu_1\cos\omega$$

ou

$$(\lambda_1\sin\omega-\mu_1\cos\omega)-\beta_1^2(\lambda_1\sin\omega+\mu_1\cos\omega)+2\beta_1\cos\omega,$$

qui devient, en réduisant,

$$\left\{2k\alpha[(k\beta-1)\lambda+\alpha]+[(k\beta-1)^2-\alpha^2(k^2+1)]\mu\right\}\frac{1}{1+k^2-2k\beta}.$$

Le dénominateur est le même que pour λ'; on a donc

$$\mu'=\frac{2k\alpha[(k\beta-1)\lambda+\alpha]+[(k\beta-1)^2-(k^2+1)\alpha^2]\mu}{2\alpha(k\beta-1)\lambda-2k\alpha^2\mu+1+k^2+\alpha^2-2k\beta}.$$

3° *Calcul de* q'. — Dans le système initial de coordonnées, le point de rencontre des semi-droites $A(\alpha,\beta,p)$ et $A'(\alpha',\beta',p')$ a pour coordonnées

$$x=\frac{p\alpha'-\alpha p'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},\qquad y=\frac{p\beta'-\beta p'}{\alpha\beta'-\beta\alpha'},$$

ou bien, en ayant égard aux formules (1),

$$x=\frac{p(1-k^2)}{k-\beta},\qquad y=\frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)}.$$

On a donc

$$q_1=\mu\frac{p(1-k^2)}{k-\beta}-\lambda\frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)}+q,$$

$$q'_1=\mu'\frac{p(1-k^2)}{k-\beta}-\lambda'\frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)}+q'.$$

Or, par les formules (1),

$$q'_1 = -\frac{-\alpha_1^2 q_1}{1+\beta_1^2-2\beta_1\mu_1}$$

ou bien, en désignant par D le dénominateur commun de λ' et de μ',

$$q'_1 = -\frac{(k-\beta)^2 q_1}{\mathrm{D}}.$$

On a donc, pour déterminer q', l'équation

$$\begin{aligned} q' + \mu' \frac{p(1-k^2)}{k-\beta} - \lambda' \frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)} \\ = -\frac{(k-\beta)^2}{\mathrm{D}}\left[\mu \frac{p(1-k^2)}{k-\beta} - \lambda \frac{kp(1-k\beta)}{\alpha(k-\beta)} + q\right], \end{aligned}$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$q' = \frac{-(k-\beta)^2 q + 2p(k-\beta)(k-\mu)}{2\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}.$$

On a donc les formules suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda' &= \frac{[(k^2-1)\alpha^2-(k\beta-1)^2)]\lambda + 2\alpha(k\beta-1)(k\mu-1)}{2\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}, \\ \mu' &= \frac{2k\alpha[(k\beta-1)\lambda+\alpha] + [(k\beta-1)^2-(k^2+1)\alpha^2]\mu}{2\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}, \\ q' &= \frac{-(k-\beta)^2 q + 2p(k-\beta)(k-\mu)}{2\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k\alpha^2\mu + 1 + k^2 + \alpha^2 - 2k\beta}. \end{aligned}\right.$$

II. — Équation tangentielle de l'hypercycle ; propriétés principales qui s'en déduisent.

Considérons trois semi-droites P, P′, D et un cycle K. Considérons une quatrième semi-droite A. Appelons A′ la conjuguée harmonique de A, relativement à P, P′; D′ la conjuguée harmonique de D, relativement à A, A′. Si l'on veut déterminer A de manière que D′ soit tangente au cycle K, on aura deux relations seulement entre les trois paramètres de A, à savoir la relation fondamentale $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, et la relation qui exprime que la distance à D′ du centre de K est égale au rayon de ce cycle. Il y a donc une infinité de semi-droites A jouissant de cette propriété. L'enveloppe de ces semi-droites est une courbe de direction que

M. Laguerre, qui l'a étudiée le premier, a nommée *hypercycle* [1]. La relation qui exprime que D′ touche le cycle K est précisément l'équation tangentielle de l'hypercycle. Les formules que nous avons établies plus haut vont donner cette équation d'une manière presque immédiate.

L'hypercycle est défini par les deux semi-droites P, P′, appelées *fondamentales,* la semi-droite D et le cycle K.

Prenons pour axe des x la *bissectrice* des semi-droites fondamentales (lieu des centres des cycles tangents), et pour axe des y la perpendiculaire, les sens positifs des axes étant définis comme au problème I. Soient les paramètres donnés

$$\begin{array}{ll} \mathrm{P}\ldots\ \sqrt{1-k^2},\ k,\ 0; & \mathrm{P}'\ldots\ -\sqrt{1-k^2},\ k,\ 0; \\ \mathrm{D}\ldots\ \lambda,\ \mu,\ q; & \mathrm{K}\ldots\ a,\ b,\ r. \end{array}$$

Soit une tangente à la courbe A(α, β, p). A′ étant la conjuguée harmonique de A relativement à P, P′, et D′ la conjuguée harmonique de D relativement à A, A′, si l'on désigne par λ', μ', q' les paramètres de D′, on doit avoir

$$a\mu' - b\lambda' + q' - r = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, λ, μ', q' par les valeurs fournies par les formules (4), et nous aurons l'équation tangentielle de l'hypercycle. On obtient

$$(5)\quad A\alpha^2 + 2KB\alpha\beta - 2Cp\beta - 2B\alpha - 2KD\beta + 2KCp + (1+K^2)D = 0,$$

où

$$(6)\quad \begin{cases} A = 2K(a+\mu r) - 2(a\mu + b\lambda)K^2 + b\lambda - a\mu - r + q, \\ B = K(a\lambda - b\mu) + b - \lambda r, \\ C = K - \mu, \\ D = a\mu + b\lambda - q - r. \end{cases}$$

L'équation que nous venons de trouver peut encore se simplifier par un choix convenable d'axes de coordonnées. Nous conserverons pour le moment la forme précédente, qui suffit à donner les propriétés fondamentales de l'hypercycle et permet d'établir la théorie des cycles polaires.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* mars et avril 1883.

THÉORÈME I. — *Les tangentes à l'hypercycle se groupent deux à deux, de manière à former un système harmonique avec les semi-droites fondamentales.*

Il est évident, en effet, que A, A' interviennent d'une manière symétrique dans la définition de la courbe. On peut d'ailleurs démontrer le théorème par le calcul. α', β', p' désignant les paramètres de A', on a

$$k\beta' - 1 = \frac{1-k^2}{D}(k\beta - 1), \qquad \alpha' = \frac{1-k^2}{D}\alpha, \qquad k - \beta' = -\frac{1-k^2}{D}(k-\beta),$$

$$p' = -\frac{1-k^2}{D}p, \qquad 1 + k^2 - 2k\beta' = \frac{(1-k^2)^2}{D}, \qquad D = 1 + k^2 - 2k\beta,$$

et l'on voit que l'équation de la courbe reste vérifiée, si aux quantités $(k\beta - 1)$, ... on substitue $(k\beta' - 1)$, ...

Deux tangentes, telles que A, A', sont dites *tangentes conjuguées*. On peut construire géométriquement autant de couples de tangentes conjuguées que l'on veut. Cela résulte des remarques suivantes.

Étant donnés deux cycles C, C', désignons par a et a' les points où ils touchent une de leurs tangentes communes; par b, b' leurs points de contact avec l'autre tangente commune; par α, β les points milieux des segments aa', bb'. Le cycle K, qui touche les tangentes communes aux points α, β, est appelé le *cycle moyen* des deux cycles C, C'. On dit que c'est le symétrique du cycle C relativement au cycle K.

Supposons que les cycles considérés soient déterminés par les paramètres suivants : $C(a, b, r)$; $C'(a', b', r')$; $K(a'', b'', r'')$. Il est évident que l'on a

$$a'' = \frac{a+a'}{2}, \qquad b'' = \frac{b+b'}{2}, \qquad r'' = \frac{r+r'}{2}.$$

Soient deux semi-droites P, P'. Soient A, A' deux semi-droites conjuguées harmoniques par rapport aux premières. Enfin soient B, B' deux semi-droites conjuguées harmoniques par rapport à A, A'. Je dis que, si C désigne le cycle tangent à P, P', B, et C' le cycle tangent P, P', B', le cycle moyen de C et de C' sera tangent à A et A'. Pour le prouver, il suffit de montrer que A, par exemple, touche ce cycle. Prenons pour axe des x la *bissectrice* de P, P', et la perpendiculaire pour Oy, comme nous l'avons déjà fait. Soient

$$\begin{array}{llllll} P\ldots & \sqrt{1-k^2},\ k,\ 0; & A\ldots & \alpha,\ \beta,\ p; & B\ldots & \lambda,\ \mu,\ q. \\ P'\ldots & -\sqrt{1-k^2},\ k,\ 0; & A'\ldots & \alpha',\ \beta',\ p'; & B'\ldots & \lambda',\ \mu',\ q'. \end{array}$$

α', β', p' s'expriment, en fonction de α, β, p, au moyen des formules (1), et λ', μ', q' au moyen des formules (4). Les paramètres du cycle C sont

$$a = \frac{q}{k-\mu'}, \qquad b = 0, \qquad r = \frac{kq}{k-\mu'};$$

ceux de C′

$$a' = \frac{q'}{k-\mu'}, \qquad b' = 0, \qquad r' = \frac{kq'}{k-\mu'};$$

et enfin ceux de C″

$$a'' = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'}\right), \qquad b'' = 0, \qquad r'' = ka''.$$

Il suffit de démontrer que l'on a identiquement

$$\frac{\beta}{2}\left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'}\right) + p - \frac{k}{2}\left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'}\right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\beta-k}{2}\left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'}\right) + p = 0.$$

Or on a, en désignant par D un diviseur commun de q' et de μ',

$$\begin{aligned} D(k-\mu') &= 2k\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k^2\alpha^2\mu + k(1+k^2+\alpha^2-2k\beta) \\ &\quad - 2k\alpha(k\beta-1)\lambda - 2k\alpha^2 - (k\beta-1)^2\mu + (k^2+1)\alpha^2\mu, \\ D(k-\mu') &= (k-\beta)^2(k-\mu). \end{aligned}$$

De là, en tenant compte de la dernière formule (4),

$$\frac{q'}{k-\mu'} = -\frac{q}{k-\mu} + \frac{2p}{k-\beta},$$

$$\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'} = \frac{2p}{k-\beta},$$

$$\frac{\beta-k}{2}\left(\frac{q}{k-\mu} + \frac{q'}{k-\mu'}\right) + p = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il est dès lors évident, par analogie, que A et A′ sont aussi tangentes au cycle moyen des cycles inscrits dans P, B, B′ et P′, B, B′.

Deux cycles n'admettant que deux tangentes communes, on déduit de là le théorème suivant :

Théorème II. — *Étant donnés deux couples de semi-droites* P, P′, *et* B, B′, *on construit, de la manière suivante, les deux semi-droites qui forment un système harmonique avec* P, P′, *ainsi qu'avec* B, B′. *Construisons le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans* P, P′, B *et* P, P′, B′, *puis le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans* B, B′, P *et* B, B′, P′, *les tangentes communes à ces deux cycles moyens seront les semi-droites cherchées.*

Appliquant cette remarque à l'hypercycle, on aura autant de couples de tangentes conjuguées qu'on le désirera. Soient, en effet, P, P′ les semi-droites fondamentales, D et K la semi-droite et le cycle donnés. Menons à K une tangente arbitraire D′, puis construisons, comme il a été expliqué plus haut, les deux semi-droites A, A′, qui forment un système harmonique d'une part avec P, P′, d'autre part avec D, D′. A, A′ constituent un couple de tangentes conjuguées.

III. — Théorie des cycles polaires.

Théorème III. — *Les conjuguées harmoniques d'une semi-droite* D′ *par rapport aux couples de tangentes conjuguées de l'hypercycle enveloppent un cycle* K′.

Soit un hypercycle défini par les semi-droites fondamentales P, P′, la semi-droite D et le cycle K. Prenons les mêmes axes que précédemment. Nous avons obtenu plus haut l'équation tangentielle de l'hypercycle. Considérons une autre semi-droite D′(λ', μ', q') et un autre cycle K′(a', b', r'). Les mêmes semi-droites fondamentales définissent, avec D′ et K′, un autre hypercycle. On aura son équation en remplaçant dans la précédente λ par λ', ... Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que, λ', μ', q' étant donnés, on peut déterminer a', b', r', de manière que les deux hypercycles coïncident. Or, pour que les courbes coïncident, il faut et il suffit que les coefficients des deux équations soient proportionnels. En identifiant les équations, on a six équations de condition, et il n'y a que trois paramètres à déterminer, a', b', r'. Tout se réduit donc à faire voir que des six équations de condition, trois sont les conséquences des trois autres.

En identifiant, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{2k(a'+\mu'r')-2(a'\mu'+b'\lambda')k^2+b'\lambda'-a'\mu'-r'+q'}{A}\\&=\frac{k(a'\lambda'-b'\mu')+b'-\lambda'r'}{B}=\frac{k-\mu'}{C}=\frac{k(a'\lambda'-b'\mu')+b'-\lambda'r'}{B}\\&=\frac{a'\mu'+b'\lambda'-q'-r'}{D}=\frac{k-\mu'}{C}=\frac{a'\mu'+b'\lambda'-q'-r'}{D},\end{aligned}$$

équations qui se réduisent aux trois suivantes :

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{2k(a'+\mu'r')-2(a'\mu'+b'\lambda')k^2+b'\lambda'-a'\mu'-r'+q'}{A}\\&=\frac{k-\mu'}{C}=\frac{a'\mu'+b'\lambda'-q'-r'}{D}=\frac{k(a'\lambda'-b'\mu')+b'-\lambda'r'}{B}.\end{aligned}\right.$$

On peut donc considérer le théorème comme établi d'une manière générale.

Le cycle K′ a été nommé, par M. Laguerre, le *cycle polaire* de la semi-droite D′.

Deux questions se présentent tout de suite :

1° Toute semi-droite a-t-elle un cycle polaire?

2° Un cycle donné peut-il être considéré comme le cycle polaire d'une semi-droite, et quelle est cette semi-droite?

La discussion des équations (7) répond à ces deux questions.

Théorème IV. — *A toute semi-droite non parallèle à une semi-droite fondamentale correspond un cycle polaire. Une semi-droite parallèle à une semi-droite fondamentale n'a pas de cycle polaire. Enfin, une semi-droite fondamentale admet une infinité de cycles polaires qui sont tous tangents à l'autre semi-droite fondamentale.*

Les équations précédentes, dans lesquelles on considère a', b', r' comme inconnues, se mettent sous la forme suivante :

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&C[2k-\mu'(1+2k^2)]a'+C\lambda'(1-2k^2)b'+C(2k\mu'-1)r'=A(k-\mu')-Cq',\\&Ck\lambda'a'+C(1-k\mu')b'-C\lambda'r'=B(k-\mu'),\\&C\mu'a'+C\lambda'b'-Cr'=D(k-\mu')+Cq'.\end{aligned}\right.$$

En calculant le déterminant des coefficients, on obtient, toutes réductions faites,

$$-2C^3(k-\mu')^3.$$

Donc, si $k-\mu'\neq 0$, c'est-à-dire si la semi-droite n'est pas parallèle à une semi-droite fondamentale, les équations (8) ont une solution et une seule.

Supposons $k-\mu'=0$. Les équations deviennent

$$\begin{aligned}(1-2k^2)(ka'+\lambda b'-r') &= -q',\\ ka'+\lambda' b'-r' &= 0,\\ ka'+\lambda' b'-r' &= q'.\end{aligned}$$

Si $q'\neq 0$, il n'y a pas de solution. Si $q'=0$, on n'a plus qu'une équation

$$ka'+\lambda' b'-r'=0.$$

Il y a donc une infinité de cycles polaires. Si l'on prend

$$\lambda'=\sqrt{1-k^2},$$

ce qui revient à supposer que la semi-droite considérée est la semi-droite fondamentale P, la condition précédente peut s'écrire

$$ka'-(-\sqrt{1-k^2})b'-r'=0,$$

et elle exprime que tous les cycles polaires sont tangents à P'.

Les équations (8) donnent les paramètres du cycle polaire d'une semi-droite donnée; en les résolvant on obtient les formules suivantes, qui sont fondamentales pour l'étude des propriétés des cycles polaires :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} a' &= \frac{2Bk\lambda'-(A-D)\mu'-2Cq'-2kD}{2C\,(k-\mu')},\\ b' &= \frac{-(A+D)\lambda'-2Bk\mu'+2B}{2C(k-\mu')},\\ r' &= \frac{2B\lambda'+2kD\mu'-2Ckq'-A-D(1+2k^2)}{2C(k-\mu')}.\end{aligned}\right.$$

Théorème V. — *Étant donné un cycle qui ne touche pas les semi-droites fondamentales, pour que ce cycle soit un cycle polaire, il faut et il suffit que les tangentes menées à ce cycle parallèlement aux semi-droites fondamentales se coupent sur une conique particulière.*

Cette conique a reçu le nom de conique H (M. Laguerre).

Supposons maintenant que a', b', r' sont donnés, et cherchons à calculer λ', μ', q'. Aux équations (7) il faut joindre l'équation

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1.$$

On a ainsi le système suivant de quatre équations à trois inconnues :

$$\begin{gathered} Cb'\lambda' + (Ca' + D)\mu' - Cq' = D + Ckr', \\ C(ka' - r')\lambda' + (B - Ckb')\mu' = Bk - Cb', \\ 2Cb'(1 - k^2)\lambda' + [A + D - 2Ck(ka' - r')]\mu' = k(A + D) - 2C(ka' - r'), \\ \lambda'^2 + \mu'^2 = 1. \end{gathered}$$

Posons, pour abréger,

$$ka' - r' = kx, \qquad b' = y,$$

et remarquons, ce qu'il est facile de vérifier, que le point x, y est le point de rencontre des tangentes au cycle donné, qui sont parallèles aux semi-droites fondamentales. Les équations précédentes s'écrivent

$$(10)\quad \left\{\begin{gathered} Cb'\lambda' + (Ca' + D)\mu' - Cq' = Dk + Cr', \\ Ckx\lambda' + (B - Ck)\mu' = Bk - Cy, \\ 2C(1 - k^2)y\lambda' + (A + D - 2Ck^2x)\mu' = k(A + D - 2Cx), \\ \lambda'^2 + \mu'^2 = 1. \end{gathered}\right.$$

Les deux équations intermédiaires sont linéaires en λ', μ', et ne contiennent pas q'. D'ailleurs, dans la première équation, le coefficient de q' est une constante différente de o, C. Pour trouver la semi-droite cherchée, il suffit de déduire λ', μ' des deux équations intermédiaires. Ces valeurs portées dans la première équation donneront q'; si on les porte dans la dernière, on aura une relation en a', b', r', qui sera la condition nécessaire et suffisante pour que le cycle donné soit un cycle polaire.

Tout se réduit à l'étude des deux équations en λ', μ'. Le déterminant de ces équations est

$$H' = C\{2Ck[(1 - k^2)y^2 - k^2x^2] + k(A + D)x - 2B(1 - k^2)y\}.$$

Supposant ce déterminant différent de o et substituant dans la quatrième équation les valeurs de λ', μ', on obtient

$$[(1 - k^2)y^2 - k^2x^2]H = 0,$$

en posant

$$H = (1 - k^2)y^2 - k^2x^2 + \frac{(A + D)^2 - 4B^2(1 - k^2)}{4C^2}.$$

Le lieu des points x, y, pour lesquels le cycle donné est un cycle polaire, se compose donc des semi-droites fondamentales et de l'hyperbole H, qui a pour asymptotes les semi-droites fondamentales.

Écartons pour le moment le cas où x, y serait sur une semi-droite fondamentale, c'est-à-dire le cas où le cycle donné toucherait l'une d'elles. On voit que si $H' \neq 0$, pour que le cycle soit polaire, il faut et il suffit que le point (x, y) se trouve sur l'hyperbole H. Supposons $H' = 0$. Les équations en λ', μ' sont impossibles ou indéterminées.

Le numérateur de λ' est

$$G = (1 - k^2)[2Bkx - (A + D)y]$$

et celui de μ'

$$H'' = C\{2C[(1 - k^2)y^2 - k^2x^2] + k[k(A + D)x - 2B(1 - k^2)y^2]\}.$$

Si le point (x, y) se trouve à la fois sur les courbes H', G, H'', il y a indétermination ; dans le cas contraire, il y a impossibilité. Or

G coupe H' à l'origine et au point $x = \dfrac{A + D}{2Ck^2}$, $y = \dfrac{B}{Ck}$,

G coupe H'' à l'origine et au point $x = \dfrac{A + D}{2C}$, $y = \dfrac{Bk}{C}$.

Il n'y a donc indétermination que si le point x, y est à l'origine des coordonnées. Mais nous avons écarté ce cas en supposant que le cycle donné ne touchait pas les semi-droites fondamentales. Dès lors, si $H' = 0$, il n'y a pas de semi-droite admettant le cycle donné pour cycle polaire. Pour que le théorème soit démontré, il reste à prouver que H et H' n'ont pas de points réels communs situés à distance finie. En se reportant aux équations de ces coniques, on voit que leurs points communs situés à distance finie se trouvent sur la droite

$$k(A + D)x - 2B(1 - k^2)y - 2CkP = 0.$$

Les abscisses des points communs à cette droite et à H sont racines de l'équation

$$\left[Ckx - \frac{k(A+D)}{2}\right]^2 + B^2(1-k^2) = 0,$$

qui a ses racines imaginaires.

Théorème VI. — *Le cycle polaire d'une semi-droite non parallèle à une semi-droite fondamentale n'est pas tangent à une semi-droite fondamentale. Il y a cependant exception pour les hypercycles d'une nature particulière, et alors tout cycle polaire est tangent à une semi-droite fondamentale.*

Soit $\lambda' \mu' q'$ une semi-droite non parallèle à une semi-droite fondamentale; soit a', b', r' son cycle polaire. Pour que ce cycle soit tangent à la semi-droite k, $\sqrt{1-k^2}$, o, il faut et il suffit que l'on ait

$$ka' - \sqrt{1-k^2}\,b' - r' = 0,$$

ou, en remplaçant a', b', r' par leurs valeurs déduites des formules (9),

$$(A + D - 2B\sqrt{1-h^2})(\sqrt{1-k^2}\lambda' - k\mu' + 1) = 0.$$

En appelant V l'angle de la semi-droite donnée avec la semi-droite $(k, -\sqrt{1-k^2}, 0)$, cette relation peut s'écrire

$$(A + D - 2B\sqrt{1-k^2})(1 - \cos V) = 0$$

ou

$$A + D - 2B\sqrt{1-k^2} = 0,$$

car on suppose $\cos V \neq 1$. Cette relation ne sera vérifiée que pour des hypercycles d'une nature particulière. Ce sont ceux que M. Laguerre appelle *hypercycles cubiques*. Pour ces hypercycles tous les cycles polaires sont tangents à la même semi-droite fondamentale.

En prenant l'autre semi-droite fondamentale, on aurait la condition

$$A + D + 2B\sqrt{1-k^2} = 0,$$

de sorte que les hypercycles pour lesquels les cycles polaires sont tangents à une semi-droite fondamentale sont définis par la relation

$$(A + D)^2 - 4B^2(1 - k^2) = 0.$$

THÉORÈME VII. — Il résulte du théorème précédent que, pour un hypercycle qui ne vérifie pas la relation précédente, *tout cycle tangent à une semi-droite fondamentale peut être considéré comme le cycle polaire de l'autre semi-droite fondamentale.*

Ce résultat peut se retrouver analytiquement. Soit le cycle a', b', r' tangent à la semi-droite k, $\sqrt{1 - k^2}$, o.

On a

$$ka' - \sqrt{1 - k^2}\, b' - r' = 0 \qquad \text{ou} \qquad kx = \sqrt{1 - k^2}\, y,$$

x, y étant toujours le point de concours des tangentes au cycle qui sont parallèles aux semi-droites fondamentales. Dans cette hypothèse, les équations (10) deviennent

$$C(a'\mu' + b'\lambda' - r') + D(\mu' - k) = Cq',$$
$$Cy(\sqrt{1 - k^2}\,\lambda' - k\mu' + 1) + B(\mu' - k) = 0,$$
$$2Cy\sqrt{1 - k^2}\,(\sqrt{1 - k^2}\,\lambda' - k\mu' + 1) + (A + D)(\mu' - k) = 0,$$
$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1.$$

On suppose que

$$A + D - 2B\sqrt{1 - k^2} \neq 0.$$

On déduit donc de ces équations

$$\mu' - k = 0, \qquad \sqrt{1 - k^2}\,\lambda' - k\mu' + 1 = 0$$

ou bien

$$\mu' = k, \qquad \lambda' = -\sqrt{1 - k^2}.$$

La dernière est vérifiée, et la première donne

$$C(ka' - \sqrt{1 - k^2}\, b' - r') = Cq', \qquad q' = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

On a supposé $y \neq 0$. Si y était nul, le cycle serait tangent aux deux semi-droites fondamentales. Dans ce cas il est évident que les équations donnent

$$\mu' = k, \qquad \lambda' = \pm\sqrt{1 - k^2}, \qquad q' = 0.$$

On peut considérer le cycle comme le cycle polaire de l'une ou de l'autre des semi-droites fondamentales.

Si l'on résout les équations (10), on obtient des formules qui font connaître les paramètres de la semi-droite qui a pour cycle polaire le cycle donné a', b', r' :

$$(11)\quad\begin{cases}\lambda' = \dfrac{(1-k^2)[2Bkx-(A+D)y]}{2kC[(1-k^2)y^2-k^2x^2)+k[(A+D)x-2k(1-k^2)y]},\\[2ex] \mu' = \dfrac{2C[(1-k^2)y^2-k^2x^2]+k[k(A+D)x-2B(1-k^2)y]}{2Ck[(1-k^2)y^2-k^2x^2]+k[(A+D)x-2B(1-k^2)y]},\\[2ex] q' = \dfrac{[(1-k^2)y^2-k^2x^2][2Cx+2(Cr'+D)(1-k^2)-(A+D)]}{2Ck[(1-k^2)y^2-k^2x^2]+k[(A+D)x-2B(1-k^2)y]}.\end{cases}$$

Dans ces formules

$$x=\frac{ka'-r'}{k},\qquad y=b'.$$

Les cycles polaires possèdent des propriétés analogues à celles des pôles et des droites dans les coniques. Les formules (9) et (11) permettent d'établir simplement les propriétés mentionnées par M. Laguerre. On voit par là qu'elles sont fondamentales dans l'étude des cycles polaires.

Théorème VIII. — *Si* Δ *a pour cycle polaire* Π, *les cycles polaires des tangentes à* Π *sont tangents à* Δ.

Soient

$$\Delta(\lambda', \mu', q'),\quad \Pi(a', b', r')\quad \text{et}\quad \Delta'(\lambda'', \mu'', q''),\quad \Pi'(a'', b'', r'').$$

On suppose que

$$\mu''a'-\lambda''b'+q''-r'=0,$$

et il faut prouver que

$$\mu'a''-\lambda'b''+q'-r''=0.$$

On a

$$\mu''a'=\frac{2Bk\lambda'\mu''-(A-D)\mu'\mu''-2Cq'\mu''-2kD\mu''}{2C(k-\mu')}$$

$$-\lambda''b'=\frac{(A+D)\lambda'\lambda''+2Bk\mu'\lambda''-2B\lambda''}{2C(k-\mu')}$$

$$-\quad r'=\frac{-2B\lambda'-2kD\mu'+2Ckq'+A+D(1+k^2)}{2C(k-\mu')}.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned}2C(k-\mu')(\mu''a'-\lambda''b'+q''-y') = {}&2Bk(\lambda'\mu''+\mu'\lambda'')-(A-D)\mu'\mu''+(A+D)\lambda'\lambda''\\ &-2C(q'\mu''+\mu'q'')-2B(\lambda'+\lambda'')-2kD(\mu'+\mu'')\\ &+2Ck(q'+q'')+A+D(1+K^2).\end{aligned}$$

On formera par analogie

$$2C(k-\mu'')(\mu' a''-\lambda' b''+q'-r'').$$

L'expression trouvée dans le second membre gardant la même valeur lorsqu'on change respectivement λ', μ', q' en λ'', μ'', q'', on voit que l'on a

$$2C(k-\mu')(\mu'' a'-\lambda'' b'+q''-r') = 2C(k-\mu'')(\mu' a''-\lambda' b''+q'-r''),$$

ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME IX. — *Toute tangente à l'hypercycle est tangente à son cycle polaire, et il n'y a pas d'autres semi-droites qui possèdent la même propriété.*

La condition nécessaire et suffisante pour que la semi-droite (λ', μ', q') soit tangente à son cycle polaire (a', b', r') est

$$\mu' a' - \lambda' b' + q' - r' = 0.$$

Si l'on remplace a', b', r' par les valeurs que donnent les formules (9), on obtient, toutes réductions faites,

$$A\lambda'^2 + 2Bk\lambda'\mu' - 2C\mu' q' - 2B\lambda' - 2kD\mu' + 2Ckq' + D(1+k^2) = 0.$$

C'est là la condition pour que la semi-droite soit tangente à l'hypercycle.

Une conséquence importante de ce théorème est que l'hypercycle est complètement déterminé quand on se donne deux couples de tangentes conjuguées (A, A'), (B, B') et une cinquième tangente T. Si l'on construit, en effet, les deux semi-droites qui sont conjuguées harmoniques par rapport à (A, A') et aussi par rapport à (B, B'), on aura les semi-droites fondamentales (P, P'). Si l'on prend maintenant la conjuguée harmonique de T relativement à (A, A'), soit T_1, puis la conjuguée harmonique de T relativement à (B, B'), soit T_2, le cycle tangent aux trois semi-droites T, T_1, T_2 sera le cycle polaire de T. On connaît ainsi les semi-droites fondamentales et le cycle polaire d'une semi-droite donnée : la courbe est donc déterminée.

THÉORÈME X. — *Les semi-droites dont les cycles polaires ont un rayon donné enveloppent un cycle.*

En effet, les paramètres de la semi-droite doivent vérifier la relation

$$r' = \mathrm{R}$$

ou

$$2\mathrm{B}\lambda' + 2k\mathrm{D}\mu' - 2\mathrm{C}kq' - \mathrm{A} - \mathrm{D}(1 + k^2) = 2\mathrm{C}(k - \mu')\mathrm{R},$$

relation qui exprime que la semi-droite est tangente au cycle qui a pour paramètres

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}} - \frac{\mathrm{R}}{k}, \quad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}k}, \quad \frac{\mathrm{A} + \mathrm{D}(1 + 2k^2)}{2\mathrm{C}k} - \mathrm{R}.$$

Corollaire. — *Les semi-droites dont les cycles polaires se réduisent à un point enveloppent un cycle.*

Théorème XI. — *Le lieu des cycles polaires de rayon nul est la conique* H.

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant λ', μ', q' entre l'équation

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1$$

et les équations (9) dans lesquelles on fait

$$r' = 0, \qquad a' = x, \qquad b' = y.$$

Le calcul donne effectivement $\mathrm{H} = 0$.

Théorème XII. — *Si une semi-droite se déplace parallèlement à elle-même, le cycle polaire demeure tangent à deux semi-droites fixes parallèles aux semi-droites fondamentales.*

Soit $(k, \sqrt{1 - k^2}, m)$ une parallèle à P. Il suffit de montrer que l'on peut déterminer m de manière que la relation

$$ka' - \sqrt{1 - k^2}\, b' + m - r' = 0$$

soit vérifiée pour toute valeur de q', lorsque λ' et μ' restent fixes.

Or on a

$$ka' = \frac{2\mathrm{B}k^2\lambda' - (\mathrm{A} - \mathrm{D})k\mu' - 2\mathrm{C}kq' - 2k^2\mathrm{D}}{2\mathrm{C}(k - \mu')}$$

$$-r' = \frac{-2\mathrm{B}\lambda' - 2k\mathrm{D}\mu' + 2\mathrm{C}kq' + \mathrm{A} + \mathrm{D}(1 + 2k^2)}{2\mathrm{C}(k - \mu')}.$$

Donc $k'a' - r'$ est indépendant de q'. Comme il en est de même de b', le théorème est démontré.

Théorème XIII. — *Si une semi-droite roule sur un cycle, le lieu du centre de son cycle polaire est une conique.*

Supposons que la semi-droite (λ', μ', q') roule sur le cycle (a'', b'', r''). Le lieu du centre du cycle polaire s'obtient en éliminant λ', μ', q' entre les équations

$$\begin{gathered}
a''\mu' - b''\lambda' + q' - r'' = 0, \\
2C(k - \mu')x - 2Bk\lambda' + (A - D)\mu' + 2kCq' + 2D = 0, \\
2C(k - \mu')y + (A + D)\lambda' + 2Bk\mu' - 2B = 0, \\
\lambda'^2 + y'^2 = 1,
\end{gathered}$$

ou bien λ', μ' entre les équations

$$\begin{gathered}
(A + D)\lambda' + 2(Bk - Cy)\mu' = 2(B - Cky), \\
2(Cb'' - Bk)\lambda' + (A - D - 2Ca'' - 2Cx)\mu' = -2(kD + Cr'' + Ckx), \\
\lambda'^2 + \mu'^2 = 1.
\end{gathered}$$

L'équation du lieu est

$$\begin{aligned}
&[(A + D)(A - D - 2Ca'' - 2Cx) - 4(Cb'' - Bk)(Bk - Cy)]^2 \\
&\quad - [-2(A + D)(kD + Cr'' + Ckx) - 4(Cb'' - Bk)(B - Cky)]^2 \\
&\quad - [-4(Bk - Cy)(kD + Cr'' + Ckx) - 2(B - Cky)(A - D - 2Ca'' - 2Cx)]^2 =
\end{aligned}$$

Le dernier crochet contient seul des termes du second degré, et il est évident que ces termes se détruisent.

On sait que M. Laguerre a, le premier, donné la définition et les propriétés de l'hypercycle. Nous nous sommes proposé, dans ces quelques pages, d'indiquer une méthode analytique qui permette de démontrer, d'une manière régulière, les théorèmes énoncés par M. Laguerre (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 20 et 27 mars, 10 et 24 avril 1882).
