BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 13 (1885), p. 143-162

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__143_1>

Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques;
par M. E. Goursat.

(Séance du 6 mai 1885.)

La réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques ou à des intégrales abéliennes de genre inférieur a fait, depuis quelques années, l'objet d'un grand nombre de Mémoires. Je citerai en particulier les travaux de M. Kœnigsberger, de M. Picard (*Bulletin de la Société mathématique,* t. XI), de Mme Kowalewski (*Acta Mathematica,* t. IV) et un article récent de M. Poincaré dans le *Bulletin,* où il expose deux beaux théorèmes dus à M. Veierstrass. La plupart de ces géomètres se sont placés au point de vue de la théorie des fonctions Θ de plusieurs variables. Dans le travail ci-dessous, la méthode suivie est au contraire purement algébrique; je me borne d'ailleurs aux intégrales hyperelliptiques, et j'obtiens quelques résultats qui me paraissent dignes d'intérêt.

1. Soit $P(x)$ un polynôme entier en x, n'ayant que des facteurs linéaires simples. Si dans le radical $\sqrt{P(x)}$ on remplace x par une fonction rationnelle $\varphi(t)$ d'une nouvelle variable t, on a identiquement

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)},$$

$\psi(t)$ désignant une autre fonction rationnelle de t et $Q(t)$ un polynôme que l'on peut supposer composé de facteurs du premier degré tous différents. Il est aisé de trouver d'où proviennent ces facteurs linéaires. Supposons d'abord que $P(x)$ soit de degré pair $2p$,

$$P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p})$$

et soit

$$x = \varphi(t) = \frac{U}{V},$$

U et V désignant deux fonctions entières de t. On aura

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{V^p}\sqrt{(U-a_1V)(U-a_2V)\ldots(U-a_{2p}V)};$$

il est clair qu'on pourra faire sortir du radical tous les facteurs linéaires d'ordre pair de multiplicité des différents polynômes $U - a_iV$, et tous *les* facteurs d'ordre impair de multiplicité resteront une fois sous ce radical. Donc, les *facteurs linéaires de* $Q(t)$ *correspondent aux racines d'ordre impair de multiplicité des diverses équations*

$$U - a_iV = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2p).$$

Supposons, en second lieu, que $P(x)$ soit de degré impair $2p-1$,

$$P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p-1}),$$

et soit toujours $x = \frac{U}{V}\cdot$ On aura, dans ce cas,

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{V^p}\sqrt{V(U-a_1V)\ldots(U-a_{2p-1}V)};$$

les facteurs linéaires de $Q(t)$ proviennent donc des racines d'ordre impair de multiplicité de l'équation $V = 0$ et des diverses équations

$$U - a_i V = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2p - 1).$$

On peut réunir les deux énoncés en un seul en considérant $P(x)$, lorsqu'il est de degré impair, comme la limite d'un polynôme de degré pair dont une racine serait devenue infinie, ou mieux, en posant dans tous les cas

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2p}),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ étant $2p$ quantités différentes et $x - \infty$ devant être remplacé par l'unité. Il est clair que tout polynôme n'ayant que des facteurs simples peut être mis sous cette forme, et d'une seule manière. Grâce à cette convention, l'énoncé précédent s'applique à tous les cas; les facteurs linéaires de $Q(t)$ proviennent des racines d'ordre impair de multiplicité des $2p$ équations

$$\varphi(t) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Dans chacune de ces équations, nous tiendrons compte du degré de multiplicité de la racine $t = \infty$, si elle se présente. Soient D le degré de $\varphi(t)$ et N_i le nombre des racines de degré impair de l'équation $\varphi(t) = a_i$, il est clair que la différence $D - N_i$ est un nombre pair, et par suite

$$2pD - \sum_{i=1}^{i=2p} N_i$$

sera aussi un nombre pair, ce qui exige que

$$\sum_{i=1}^{i=2p} N_i$$

le soit également. Si aucune des équations précédentes n'admet la racine $t = \infty$ à un degré impair de multiplicité, on voit que le nouveau radical portera sur un polynôme de degré pair. Il en serait autrement si l'une des équations $\varphi(t) = a_i$ admettait la racine $t = \infty$ à un degré impair de multiplicité. Mais on voit ainsi que le cas où $Q(t)$ est de degré impair s'offre comme un cas particulier, celui où une des racines est devenue infinie.

Pour conserver la généralité, nous écrirons

$$Q(t) = B(t - b_1)(t - b_2)\ldots(t - b_{2q}),$$

$b_1, b_2, \ldots, b_{2q}$ désignant $2q$ quantités distinctes, qui représentent les racines d'ordre impair de multiplicité des diverses équations $\varphi(t) = a_i$, et $t - \infty$ devant être remplacé par l'unité. On a du reste la relation évidente

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=2p} N_i = 2q.$$

De la discussion précédente il résulte que le cas d'un polynôme d'un degré impair se ramène au cas d'un polynôme d'un degré pair et supérieur d'une unité au degré du premier. C'est ce dont il est aisé de se rendre compte directement; en effet, étant donné un radical carré portant sur un polynôme de degré impair, une substitution linéaire effectuée sur la variable donne en général une expression dépendant d'un radical carré portant sur un polynôme de degré pair. Les $2p$ racines du nouveau polynôme correspondent, par la substitution linéaire effectuée, aux $2p - 1$ racines du premier et à la valeur ∞. Il est donc naturel d'ajouter une racine infinie aux $2p - 1$ racines finies de ce premier polynôme.

2. En remplaçant toujours $t - \infty$ par l'unité, le premier membre de chaque équation $\varphi(t) = a_i$ se présentera sous la forme

$$\prod_{k=1}^{k=2q} (t - b_k)^{r_i^k} [(t - c_1)(t - c_2)\ldots(t - c_{n_i})]^2,$$

les nombres r_i^k ayant l'une des valeurs 0 ou 1, et les quantités $c_1, c_2, \ldots, c_{n_i}$ n'étant pas forcément distinctes entre elles ni toutes différentes des quantités b_i. A la relation (1) on peut joindre immédiatement les suivantes :

$$(2) \quad D = N_1 + 2n_1 = N_2 + 2n_2 = \ldots = N_i + 2n_i = \ldots = N_{2p} + 2n_{2p}.$$

On obtient une nouvelle relation en appliquant une formule générale que j'ai démontrée antérieurement (*Annales de l'École Normale*, 3[e] série, t. II, p. 40). Cette formule est la suivante

$$\Sigma(r - 1) = 2n - 2,$$

n désignant le degré d'une fonction rationnelle quelconque $f(t)$ et r l'ordre de multiplicité d'une racine finie ou infinie de l'équation $f(t) = m$, le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(t) = m$ possède des racines multiples. Appliquons la relation précédente à la fonction $\varphi(t)$ servant à la transformation. Si les n_i quantités $c_1, c_2, \ldots, c_{n_i}$ sont toutes distinctes et différentes des quantités b_i, l'équation $\varphi(t) = a_i$ aura n_i racines doubles et les termes qui dans $\Sigma(r-1)$ proviennent des racines de cette équation auront une somme égale à n_i. Si les quantités c_i n'étaient pas toutes distinctes, ou que quelques-unes fissent partie des b_i, cette somme serait plus grande; il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que, lorsque deux racines viennent se confondre, quels que soient leurs ordres de multiplicité, $\Sigma(r-1)$ augmente. On aura donc

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=2p} n_i + \Delta = 2D - 2;$$

Δ désigne un nombre entier qui, d'après la formule générale, ne pourra être négatif. Ce nombre ne sera nul que si toutes les quantités c_i sont différentes entre elles et différentes des quantités b_i pour toutes les équations $\varphi(t) = a_i$ et si, en outre, l'équation $\varphi(t) = m$ n'a que des racines simples pour toute valeur de m, différente des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$.

Les équations (1), (2), (3) suffisent complètement à la discussion du problème.

3. Le polynôme $P(x)$ étant donné, ainsi que le nombre entier q, imaginons que l'on connaisse un système de solutions des équations (1), (2), (3) et que l'on veuille calculer les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(t)$. On disposera en tout de

$$\sum_{i=1}^{i=2p} + 2p + 2q - 1$$

coefficients indéterminés et les équations $\varphi(t) = a_i$ donnent lieu à

$$(2p-2)(D+1)$$

équations de condition. Or des équations (1) et (2) on tire

$$(4) \qquad 2\sum_{i=1}^{i=2p} n_i + 2q = 2pD,$$

et, en remplaçant dans l'équation (3) Σn_i par

$$2pD - 2q - \sum_{i=1}^{i=2p} n_i,$$

il vient la nouvelle formule

$$2pD - 2q - \sum_{i=1}^{i=2p} n_i + \Delta = 2D - 2,$$

qui peut aussi s'écrire

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{i=2p} n_i + 2p + 2q - 1 = (2p-2)(D+1) + \Delta + 3.$$

On voit que le nombre des coefficients indéterminés dépasse le nombre des équations de condition de $\Delta + 3$ unités : on en déduira donc en général une fonction rationnelle répondant à la question et contenant $\Delta + 3$ paramètres arbitraires. Il est évident *a priori* que, s'il y a une solution, elle doit contenir au moins trois coefficients arbitraires; si en effet la fonction $\varphi(t)$ est une solution, il en sera de même de $\varphi\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)$.

Écartons d'abord le cas particulier où $p = 1$. Alors, quel que soit le polynôme $Q(t)$, il existe une infinité de fonctions rationnelles, telles que l'on ait

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)};$$

si $P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)$, il suffira de poser

$$\frac{x-a_1}{x-a_2} Q(t)[\varphi_1(t)]^2,$$

φ_1 désignant une fonction rationnelle arbitraire de t, et il est aisé de voir que l'on a ainsi toutes les substitutions rationnelles répondant à la question. Pour faire disparaître l'irrationnalité, il suffira de supposer $Q = 1$.

Dans ce qui va suivre, je supposerai désormais les nombres p et q supérieurs à l'unité.

4. Si dans l'équation (3) je remplace

$$\sum_{i=1}^{i=2p} n_i$$

par sa valeur $pD - q$ tirée de l'équation (4), il vient la nouvelle équation

$$(6) \qquad (p-2)D + \Delta = q - 2,$$

dont on déduit les conséquences suivantes :

1° Supposons $p = q = 2$, on aura $\Delta = 0$, et l'on trouve pour les équations (1), (2), (3) une infinité de systèmes de solutions qui conduisent précisément aux transformations de Jacobi pour les intégrales elliptiques de première espèce.

2° Soit $p = 2$, $q > 2$, de l'équation (6) on tire $\Delta = q - 1$ et l'on a encore une infinité de systèmes de solutions pour les équations proposées; on en déduit une infinité de substitutions rationnelles conduisant d'un radical portant sur un polynôme du quatrième degré à un radical carré portant sur un polynôme d'un degré déterminé supérieur à quatre. Nous verrons plus loin que ces transformations donnent lieu à des cas de réduction de certaines intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques.

3° Soit $p > 2$. L'équation (6) montre qu'on ne pourra avoir $q < p$ et l'on n'aura $q = p$ que si l'on a en même temps $\Delta = 0$, $D = 1$, c'est-à dire dans le cas d'une substitution linéaire. Enfin, si l'on suppose $q > p$, l'équation (6) indique que les deux nombres D et Δ doivent rester inférieurs à certaines limites. Il n'y aura donc qu'un nombre *limité* de systèmes de solutions pour les équations (1), (2), (3) et par suite qu'un nombre limité de types de substitutions conduisant d'un radical carré portant sur un polynôme de degré $2p$ à un radical carré portant sur un polynôme de degré $2q$.

Pour prendre un exemple de cette dernière circonstance, supposons $p = 3$, $q = 4$; la seule solution convenable de l'équation (6) est $D = 2$, $\Delta = 0$. La substitution sera du second degré et il faudra en outre que deux des équations $\varphi(t) = a_i$ aient une racine double. Si l'on suppose $p = 3$, $q = 5$, l'équation (6) admet les deux systèmes de solutions

$$D = 2, \quad \Delta = 1,$$
$$D = 3, \quad \Delta = 0;$$

dans le premier cas une des équations $\varphi(t) = a_i$ aura une racine double. Dans le second cas, quatre des équations $\varphi(t) = a_i$ auront une racine double et une racine simple.

Soit $Q(t)$ un polynôme de degré $2q$ ou $2q - 1$, sans facteurs multiples; nous dirons, pour abréger, que le radical $\sqrt{Q(t)}$ offre un *type réductible* lorsqu'il est possible de trouver un polynôme $P(x)$ de degré $2p$ ou $2p - 1$ ($p > 1$, $p < q$), tel que l'on ait par une substitution rationnelle

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)}.$$

Supposons qu'on ait ramené par une substitution linéaire $P(x)$ à la forme suivante

$$P(x) = x(x-1)(x - a_4)(x - a_5)\ldots(x - a_{2p}),$$

que j'appellerai *forme normale;* $P(x)$ contient ainsi $2p - 3$ coefficients indéterminés et la transformation en introduit $\Delta + 3$, comme nous l'avons vu. On pourra profiter de trois de ces paramètres pour ramener aussi $Q(t)$ à la forme normale, et les coefficients de $Q(t)$ dépendront en tout de $2p + \Delta - 3$ paramètres arbitraires. Si l'on remplace Δ par sa valeur tirée de la formule (6), le nombre précédent peut s'écrire

$$q - 1 - (p - 2)(D - 2);$$

on voit qu'il est au plus égal à $q - 1$, et il n'atteindra cette valeur maximum que sous l'une des conditions $p = 2$ ou $D = 2$. Or le polynôme le plus général $Q(t)$ mis sous la forme normale dépend de $2q - 3$ paramètres, nombre supérieur à $q - 1$, dès que $q > 2$. Les types réductibles sont donc des cas très particuliers parmi les polynômes dont le degré est $2q$ ou $2q - 1$.

5. Le théorème de Jacobi, qui unit le problème algébrique de la transformation des radicaux carrés portant sur un polynôme du quatrième degré aux propriétés des fonctions elliptiques, peut se

généraliser comme il suit. Soit toujours

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2p})$$

et soit $x = \frac{U}{V}$ une substitution rationnelle de degré D, telle que l'on ait

$$\sqrt{P(x)} = \psi(t)\sqrt{Q(t)}.$$

Proposons-nous de rechercher ce que devient la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

par la substitution précédente ; on a

$$dx = \frac{U'V - UV'}{V^2}\,dt,$$

$$\sqrt{P(x)} = \frac{1}{V^p}\sqrt{(U - a_1V)(U - a_2V)\ldots(U - a_{2p}V)}$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{V^{p-2}(U'V - UV')\,dt}{\sqrt{(U - a_1V)(U - a_2V)\ldots(U - a_{2p}V)}}.$$

Tout facteur multiple d'ordre r de l'une des équations

$$U - a_iV = 0$$

figure dans $U'V - UV'$ à la puissance $r - 1$; si r est pair et égal à $2m$, on pourra supprimer ce facteur m fois dans les deux termes, et il restera simplement au numérateur à la puissance $m - 1$. Au contraire, si r est de la forme $2m + 1$, il restera au numérateur à la puissance m et il figurera à la première puissance sous le radical. Après la suppression de tous ces facteurs communs aux deux termes, le radical se réduira à $\sqrt{Q(t)}$ et le facteur qui reste de $U'V - UV'$ sera au plus de degré Δ. En effet, $U'V - UV'$ est au plus de degré $2D - 2$ et l'on a divisé $U'V - UV'$ par un facteur dont le degré est précisément égal à $\sum\limits_{i=1}^{i=2p} n_i$, comme il est bien facile de le voir, c'est-à-dire $2D - 2 - \Delta$, d'après la relation (3). Soit maintenant $f(x)$ une fonction entière quelconque de x dont le degré ne dépasse pas $p - 2$; par la substitution précédente on aura

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}, \tag{7}$$

$f_1(t)$ désignant une fonction entière de t dont le degré ne dépasse pas $D(p-2)+\Delta$, c'est-à-dire $q-2$, d'après la formule (6).

On pourrait démontrer plus simplement cette propriété en remarquant que, l'intégrale

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$$

étant de première espèce, l'intégrale

$$\int \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

qui lui est égale, devra rester finie pour toute valeur de t et par suite $f_1(t)$ ne pourra être de degré supérieur à $q-2$.

6. De la formule (7) il résulte que l'intégrale hyperelliptique de première espèce et de genre $q-1$

$$\int \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

se ramène par la substitution $\varphi(t)=x$ à une autre intégrale hyperelliptique de première espèce et de genre $p-1$. En rapprochant ce résultat des précédents, on arrive aux conclusions suivantes :

1° Il existe une infinité de polynômes d'un degré donné, supérieur à quatre, tels qu'en choisissant convenablement un polynôme $f_1(t)$ l'intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{b_1(t)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

se réduise, par une substitution rationnelle, à une intégrale elliptique de première espèce; le degré de cette substitution peut être aussi grand qu'on le voudra.

2° Les seules substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale hyperelliptique à une autre intégrale hyperelliptique de même genre sont les substitutions linéaires.

3° Il n'existe qu'un nombre *fini* de types de substitutions rationnelles conduisant d'une intégrale hyperelliptique de genre $p-1$ à une intégrale hyperelliptique de genre $q-1$ $(q>p)$.

4° Les coefficients d'un type réductible de genre $q-1$, ramené à la forme normale dépendent au plus de $q-1$ paramètres arbitraires.

7. Je considère le cas le plus simple, celui où $p=2$, $q=3$, qui correspond à des cas de réduction des intégrales hyperelliptiques du second genre. D'après un beau résultat, dû à M. Picard (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XI), s'il existe une intégrale de la forme

$$\int \frac{\alpha t+\beta}{\sqrt{Q(t)}}\,dt,$$

où $Q(t)$ est un polynôme du cinquième ou du sixième degré, qui ait seulement deux périodes, il en existe aussi une seconde. La méthode précédente fournit bien autant d'intégrales réductibles que l'on veut de cette forme, mais elle n'apprend rien sur l'existence de la seconde intégrale et n'indique aucun moyen pour la trouver.

Dans les cas les plus simples, ces deux intégrales se présentent assez facilement.

Exemple I. — Soit $D=2$; posons toujours

$$P(x)=A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4),$$

et soit

$$x=\frac{lt^2+mt+n}{l't^2+m't+n'}=\varphi(t)$$

la substitution considérée. Pour que le polynôme correspondant $Q(t)$ soit du sixième degré, il faut et il suffit que l'une des équations $\varphi(t)=a_i$ ait une racine double. Ce polynôme $Q(t)$ jouira d'une propriété remarquable. On sait, en effet, que les deux racines t_1, t_2 de l'équation $\varphi(t)=\lambda$ sont liées, quel que soit λ, par une relation d'involution

$$Lt_1t_2+M(t_1+t_2)+N=0, \tag{8}$$

dont il serait facile d'avoir les coefficients. Les six racines du polynôme $Q(t)$, y compris $t=\infty$, si Q est du cinquième degré, doivent donc pouvoir être associées deux par deux, de façon à vérifier une relation de la forme (8). Je dirai, pour abréger, que le polynôme $Q(t)$ est *symétrique,* et la définition s'étend évidemment à un polynôme de degré quelconque.

Tout polynôme symétrique peut être ramené, par une substitution linéaire, à ne contenir que les puissances paires de la variable. En effet, on peut ramener par la substitution

$$t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

les deux points doubles de l'involution (8) à coïncider avec les points o et ∞ et la relation (8) devient

$$z_1 + z_2 = 0.$$

Dans le cas actuel, les intégrales hyperelliptiques se ramènent aux deux suivantes

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^6 + Az^4 + Bz^2 + C}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^6 + Az^4 + Bz^2 + C}},$$

que la même substitution $z^2 = x$ réduit aux intégrales elliptiques.

Plus généralement, $Q(t)$ désignant un polynôme symétrique du sixième ordre, les deux intégrales

$$\int \frac{(t - u_1)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}, \quad \int \frac{(t - u_2)\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

où u_1, u_2 désignent les deux points doubles de l'involution (8), sont réductibles aux intégrales elliptiques par la substitution

$$\left(\frac{t - u_1}{t - u_2}\right)^2 = x.$$

A ce cas se rattache l'exemple de Jacobi (*Journal de Crelle,* t. 8), où

$$Q(t) = t(1 - t)(1 - at)(1 - bt)(1 - abt);$$

les trois couples de quantités o, ∞ ; $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$; 1, $\frac{1}{ab}$ vérifient en effet la relation $t_1 t_2 = \frac{1}{ab}$, qui est bien de la forme (8). Les points doubles de l'involution sont ici $+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$ et les intégrales réductibles sont bien en effet

$$\int \frac{(1+\sqrt{abt})\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-at)(1-bt)(1-abt)}},$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{abt})\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-at)(1-bt)(1-abt)}}.$$

Étant donnée une forme binaire du sixième degré, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les racines soient en involution est exprimée par l'équation $E = 0$; E désigne l'invariant gauche du quinzième ordre (Salmon, *Algèbre supérieure*, traduction Bazin, p. 198 et 247).

Exemple II. — Soit $D = 3$. Les trois équations $\varphi(t) = a_2$, $\varphi(t) = a_3$, $\varphi(t) = a_4$ auront une racine simple et une racine double. Supposons de plus $a_1 = 0$, et supposons que l'équation $\varphi(t) = \infty$ ait aussi une racine double. On pourra, par une substitution linéaire effectuée sur t, prendre la transformation sur la forme suivante

$$x = \frac{t^3 + at + b}{3t - p};$$

cette équation aura une racine double pour les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$4(3x - a)^3 - 27(b + px)^2 = 0. \tag{9}$$

Ces racines doubles appartiennent à l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6t^3 - 3pt^2 - (ap + 3b)}{(3t - p)^2} = 0.$$

Il suit de là que le premier membre de l'équation (9) doit être divisible par

$$[6t^3 - 3pt^2 - (ap + 3b)]^2.$$

On a, en effet, l'identité

$$\left\{\begin{aligned} &4(3x - a)^3 - 27(b + px)^2 \\ &\quad = [6t^3 - 3pt^2 - (ap + 3b)]^2 [3t^3 + 3pt^2 + 4(ap + 3b)] \times \frac{1}{(3t - p)^3}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Si donc, dans la différentielle elliptique

$$\frac{dx}{\sqrt{x[4(3x - a)^3 - 27(b + px)^2]}},$$

on fait le changement de variable

$$(11) \qquad x = \frac{t^3 + at + b}{3t - p},$$

on trouve

$$\frac{dx}{\sqrt{x[4(3x - a)^3 - 27(b + px)^2]}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

où

$$Q(t) = (t^3 + at + b)[t^3 + pt^2 + \tfrac{3}{4}(ap + 3b)].$$

L'intégrale hyperelliptique de première espèce

$$(12) \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{(t^3 + at + b)(t^3 + pt^2 + q)}},$$

où l'on a

$$(13) \qquad q = 4b + \tfrac{4}{3}ap,$$

se ramène donc à une intégrale elliptique par le changement de variable (11). La seconde intégrale hyperelliptique

$$(14) \qquad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{(t^3 + at + b)(t^3 + pt^2 + q)}}$$

se ramène aussi à une intégrale elliptique; car, si l'on pose $t = \frac{1}{u}$, elle devient

$$(15) \qquad \frac{-1}{\sqrt{bq}} \int \frac{du}{\sqrt{(u^3 + a'u + b')(u^3 + p'u^2 + q')}},$$

a', b', p', q' ayant respectivement pour valeurs

$$a' = \frac{p}{q}, \quad b' = \frac{1}{q}, \quad p' = \frac{a}{b}, \quad q' = \frac{1}{b}.$$

Mais de la relation (13) on tire aussi

$$\frac{1}{b} = \frac{4}{q} + \frac{4}{3} \frac{ap}{bq},$$

c'est-à-dire

$$q' = 4b' + \tfrac{4}{3}p'a'.$$

La nouvelle intégrale (15) est donc de même forme que l'intégrale (12) et par suite se ramènera aussi à une intégrale elliptique. On verrait par un calcul identique au précédent que l'intégrale (14) se réduit, par la substitution

$$(16) \qquad \frac{t^3+pt^2+q}{at^3-3bt^2}=x,$$

à l'intégrale elliptique

$$(17) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x[4(p+3bx)^3+27q(1-ax)^2]}}.$$

Les substitutions (11) et (16) s'appliquent aux intégrales (12) et (14) alors même que quelques-unes des quantités a, a', b seraient nulles. Si l'on suppose b différent de zéro, on pourra prendre $b=1$ et il ne restera en réalité que deux paramètres arbitraires a et p. Si b est nul, on pourra prendre $a=-1$ et il n'y aura qu'un seul paramètre arbitraire. Si l'on change ensuite t en $\frac{1}{z}$, on trouve que les deux intégrales

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où

$$R(z)=(z^2-1)(4z^3-3z+l),$$

se ramènent à des intégrales elliptiques : résultat que l'on doit à M. Hermite. Les substitutions propres à réduire ces intégrales se déduisent bien simplement des précédentes. Ainsi l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x[(x-l)^2-1]}}=3\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(4z^3-3z+l)}},$$

en posant

$$x=4z^3-3z+l$$

et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x[4(lx-1)^3+27x^2]}}=\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2-1)(4z^3-3z+l)}},$$

en posant

$$x=\frac{z^2-1}{z^3+l^2}.$$

Exemple III. — Soit $D=4$. On obtiendra une substitution indécomposable du quatrième degré, conduisant à une intégrale hyperelliptique du second genre, en considérant une fonction rationnelle $\varphi(t)$ telle que l'une des équations $\varphi(t)=a_i$ ait deux racines doubles et les trois autres deux racines simples et une racine double. On pourra prendre, en supposant $a_1 = 0$,

$$x = \varphi(t) = \frac{(t^2 + at + b)^2}{t^2 + ct + d}.$$

et prendre pour a_2, a_3, a_4 les trois autres valeurs de x, sauf 0 et ∞, pour lesquelles l'équation précédente a une racine double; mais la méthode ne donne pas la seconde intégrale irréductible.

Voici à cet égard le résultat qui a été obtenu tout récemment par M. O. Bolza (*Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg*).

Soient α, β, γ trois paramètres arbitraires et α', β', γ' les trois fonctions suivantes de ces paramètres :

$$(18)\qquad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{-18\alpha^2\gamma - 4\alpha\beta^2 + 12\beta\gamma}{27\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma + 8\beta^3}, \\ \beta' = \dfrac{-3\alpha^2\beta + 9\alpha\gamma + 8\beta^2}{27\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma + 8\beta^3}, \\ \gamma' = \dfrac{-2\alpha^3 + 4\alpha\beta + 4\gamma}{27\gamma^2 + 27\alpha\beta\gamma + 8\beta^3}. \end{cases}$$

Posons en outre

$$(19)\qquad \begin{cases} R(x, \alpha, \beta, \gamma) = \gamma' x^6 - 3\alpha\gamma' x^5 + (4\beta\gamma' - \alpha\beta')x^4 \\ \qquad - (\alpha\alpha' + 5\gamma\gamma')x^3 + (4\beta'\gamma - \alpha'\beta)x^2 - 3\alpha'\gamma x + \gamma; \end{cases}$$

les deux intégrales

$$(20)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}}$$

se ramènent à des intégrales elliptiques par des substitutions rationnelles du quatrième degré. On a en effet, pour la première,

$$(21)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{R_1(z, \alpha, \beta, \gamma)}},$$

où

$$\begin{aligned} R_1(z, \alpha, \beta, \gamma) = {} & (\alpha z + 2\gamma)\gamma' z^3 + (-\tfrac{27}{4}\alpha^2\gamma' + 6\beta\gamma' - \alpha\beta')z^2 \\ & + (-27\alpha\gamma\gamma' + 12\beta'\gamma - 4\alpha'\beta)z + \gamma(4\beta\beta' - 3\alpha\alpha') \end{aligned}$$

et

$$(22)\qquad z = \frac{2\alpha x^4 - 4\alpha\gamma x - 2\beta\gamma}{2\alpha x^2 + 2\alpha^2 x + (\alpha\beta + \gamma)}.$$

Maintenant, si l'on observe que α, β, γ s'expriment de la même manière, au moyen des quantités α', β', γ' que α', β', γ' au moyen de α, β, γ, on voit immédiatement que par le changement de x en $\frac{1}{x}$ la seconde intégrale reproduira $-\int \frac{dx}{\sqrt{R(x, \alpha', \beta', \gamma')}}$. Il en résulte que

$$(23) \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x, \alpha, \beta, \gamma)}} = -\frac{\sqrt{\alpha'}}{2} \int \frac{dz'}{\sqrt{R_1(z', \alpha', \beta', \gamma')}},$$

en posant

$$(24) \qquad z' = \frac{2\alpha' - 4\alpha'\gamma' x^3 - 2\beta'\gamma' x^4}{2\alpha' x^4 + 2\alpha'^2 x^3 + (\alpha'\beta' + \gamma')x^4}.$$

Pour ne laisser que deux paramètres arbitraires, il suffira de faire

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = k, \quad \frac{\gamma}{\alpha^3} = \lambda, \quad x = \alpha t.$$

Exemple IV. — Soit $D = 5$. Soit $x = \varphi(t)$ une substitution rationnelle répondant à la question; pour trois valeurs particulières de x l'équation $\varphi(t) = x$ devra avoir deux racines doubles et une racine simple. Par deux substitutions linéaires effectuées à la fois sur x et sur t, on peut faire que ces trois valeurs de x soient 0, 1, ∞ et que les racines simples des trois équations $\varphi(t) = 0$, $\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) = \infty$ soient elles-mêmes 0, 1, ∞. On aura donc une identité de la forme

$$P^2 - tQ^2 = (t-1)R^2,$$

P, Q, R étant trois fonctions entières du second degré. Par un calcul qu'il est inutile de reproduire, on trouve facilement la formule

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(2\alpha - 1)t^2 + (2\alpha\beta - \alpha^2 - 2\beta)t - \beta^2]^2 \\ \quad - t[t^2 + (\alpha^2 + 2\beta - 2\alpha)t + \beta^2 - 2\alpha\beta]^2 = (1-t)[t^2 + (2\beta - \alpha^2)t + \beta^2]^2, \end{array} \right.$$

et la fonction $\varphi(t)$ se déduira de cette identité par une substitution linéaire.

8. Prenons encore le cas de $p = 2$, $q = 4$. La transformation la plus générale du second degré conduit d'une intégrale elliptique à une intégrale hyperelliptique de genre 3, où le polynôme $Q(t)$ sera symétrique.

Inversement, si $Q(t)$ est un polynôme symétrique du huitième degré, il existe une intégrale hyperelliptique correspondante qui se réduit à une intégrale elliptique. Nous avons vu en effet que par un changement linéaire de variable on pouvait ramener $Q(t)$ à n'avoir que des termes de degré pair. Des trois intégrales de première espèce

$$\int\frac{dt}{\sqrt{Q(t)}},\quad \int\frac{t\,dt}{\sqrt{Q(t)}},\quad \int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{Q(t)}},$$

il est clair que la seconde se réduit à une intégrale elliptique par la substitution $t^2 = x$ et que les deux autres se ramènent à des intégrales hyperelliptiques de genre 2 par la même substitution.

Soit

$$Q(t) = (1-t^2)(1-k^2t^2)(1-l^2t^2)(1-m^2t^2);$$

on aura, en posant $t^2 = x$,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{Q(t)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}},$$

$$\int\frac{t\,dt}{\sqrt{Q(t)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}},$$

$$\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{Q(t)}} = \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}}.$$

Si k^2, l^2, m^2 sont quelconques, il n'y aura pas d'intégrales de première espèce contenant l'irrationalité

$$\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)}$$

qui se réduise, par une substitution algébrique, à une intégrale elliptique. Donc il n'y aura pas non plus d'autre intégrale réductible aux intégrales elliptiques parmi celles qui contiennent l'irrationalité $\sqrt{Q(t)}$.

En général, si le polynôme $Q(t)$ est symétrique et de degré $2q$, on pourra le ramener à n'avoir que des termes de degré pair. Toutes les intégrales de première espèce correspondantes se ramènent par la substitution $t^2 = x$ à des intégrales hyperelliptiques de genre $\frac{q-1}{2}$ ou $\frac{q-1}{2} - 1$, si q est impair, et à des intégrales de genre $\frac{q}{2}$ ou $\frac{q}{2} - 1$, si q est pair.

En combinant les différents cas de réduction connus, on par-vient à de nouveaux cas offrant un plus grand nombre d'intégrales réductibles.

Tel serait le cas d'un polynôme de degré pair tel que les racines puissent être associées deux à deux de plusieurs manières différentes, de façon à vérifier une relation d'involution, polynôme que l'on pourrait appeler *doublement symétrique*. Ainsi, dans le cas de l'irrationalité $\sqrt{t(1-t)(1+t)(1+at)(1-at)}$, on peut associer les six quantités 0, 1, -1, $\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{a}$, ∞ de façon à vérifier soit la relation $t_1 t_2 = \frac{1}{a}$, soit la relation $t_1 t_2 = -\frac{1}{a}$. On aura donc quatre intégrales réductibles

$$\int \frac{1 \pm \sqrt{at}}{\sqrt{t(1-t)(1+t)(1+at)(1-at)}},$$

$$\int \frac{1 \pm \sqrt{a}\sqrt{-1}\,t}{\sqrt{t(1-t)(1+t)(1+at)(1-at)}}\,dt.$$

D'après un théorème de M. Poincaré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. C), il y en aura une infinité.

Tel serait le cas d'un polynôme du huitième degré

$$Q(t) = (1-t^2)(1-k^2t^2)(1-l^2t^2)(1-k^2l^2t^2);$$

en posant $t^2 = x$, l'intégrale $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$ se réduit, comme nous l'avons déjà remarqué, à une intégrale elliptique, tandis que les deux intégrales

$$\int \frac{(1 \pm klt^2)\,dt}{\sqrt{Q(t)}}$$

deviennent

$$\frac{1}{2}\int \frac{(1 \pm klx)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-k^2l^2x)}}$$

et rentrent dans l'exemple de Jacobi. Une nouvelle substitution rationnelle du second degré les ramènera donc aux intégrales elliptiques.

D'un autre côté, les deux substitutions linéaires

$$t = \frac{1}{\sqrt{kl}}\,\frac{1+z}{1-z}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{-1}\sqrt{kl}}\,\frac{1+z}{1-z}$$

conduisent du polynôme $Q(t)$ à un polynôme de degré pair en z de même forme que $Q(t)$. On connaîtra donc dans ce cas *neuf* intégrales réductibles par des substitutions rationnelles aux intégrales elliptiques dont trois par des substitutions du deuxième degré et six par des substitutions du quatrième degré. D'après le théorème de M. Poincaré, il y en aura encore une infinité. Il me paraît superflu de multiplier davantage les exemples.

Une théorie toute semblable est applicable aux intégrales

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}(x-1)^{\frac{1}{2}}};$$

il existe une infinité d'intégrales abéliennes de la forme

$$\int \frac{f(t)\,dt}{(t-\alpha_1)^{\lambda_1}(t-\alpha_2)^{\lambda_2}\cdots(t-\alpha_p)^{\lambda_p}},$$

qui se déduisent par des substitutions rationnelles de l'une de ces intégrales, pour une valeur déterminée du nombre entier p. La démonstration se trouve implicitement contenue dans le Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale,* 3^{e} série, t. II).