BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

# Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 12 (1884), p. 48-51
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__48_0>

# *Sur la forme des intégrales des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de certains points critiques;* par M. Émile Picard.

(Séance du 4 avril 1884.)

Dans leurs mémorables recherches sur les équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI), MM. Briot et Bouquet ont étudié certains cas où le coefficient différentiel devient indéterminé. Soit considérée l'équation

$$(1) \qquad z\frac{du}{dz} = f(u, x),$$

et supposons que, pour $z = 0$, $u = 0$, le second membre s'annule; soit, d'ailleurs, une fonction holomorphe de $u$ et de $z$ dans le voisinage de $u = 0$, $z = 0$.

Écrivons les premiers termes du développement de $f(u, z)$

$$f(u, z) = az + bu + \ldots.$$

MM. Briot et Bouquet ont établi que, si le coefficient $b$ n'est pas égal à un nombre entier positif, l'équation différentielle admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de l'origine et s'annulant en ce point. De plus, si la partie réelle de $b$ est positive, il existera une infinité d'autres intégrales s'annulant pour $z = 0$; il n'en existe, au contraire, aucune autre si la partie de $b$ est négative.

Arrêtons-nous sur le cas où la partie réelle de $b$ est positive et plus grande que 1 (nous pouvons faire cette dernière hypothèse sans restreindre la généralité, *voir* le Mémoire cité). On peut montrer que l'équation différentielle admet une infinité d'intégrales, s'annulant pour $z = 0$ et se présentant sous forme de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $z$ et $z^{b-1}$; c'est ce que nous avons établi simultanément, M. Poincaré et moi, il y a plusieurs années (Poincaré, *Journal de l'École Polytechnique*, XLV[e] Cahier, et Picard, *Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage* *de certains points critiques, Comptes rendus,* septembre et novembre 1878) [1]. Rappelons la démonstration de ce résultat.

Si l'on désigne par $u_1$ l'intégrale holomorphe dont nous avons parlé plus haut et que l'on pose $u = u_1 + v$, l'équation (1) prendra la forme

$$(2) \qquad z\frac{dv}{dz} = v[b + \varphi(v, z)],$$

$\varphi(v, z)$ désignant une série, sans terme constant, ordonnée suivant les puissances croissantes de $v$ et de $z$. Posons maintenant $v = \lambda z^b$, et l'équation (2) pourra s'écrire

$$(3) \qquad \frac{d\lambda}{dz} = \lambda \mathrm{P}(z, z^{b-1}, \lambda),$$

P désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z$ et $z^{b-1}$ et $\lambda$. Considérons alors l'équation aux dérivées partielles

$$z\frac{\partial\lambda}{\partial z} + (b-1)\frac{\partial\lambda}{\partial y}y = \lambda z \mathrm{P}(z, y, \lambda),$$

où $\lambda$ est une fonction des deux variables indépendantes $z$ et $y$. On établit que cette équation admet une intégrale holomorphe par rapport à $z$ et $y$, qui prend, pour $z = 0$, $y = 0$, la valeur arbitraire $\lambda_0$ ; soit

$$\lambda = \lambda_0 + \mathrm{A}z + \mathrm{B}y + \ldots.$$

Si l'on pose dans cette série $y = z^{b-1}$, $\lambda$ devient une fonction de $z$, qui satisfait à l'équation (3).

On obtient ainsi une infinité d'intégrales de l'équation

$$z\frac{dv}{dz} = v[b + \varphi(v, z)],$$

qui prennent la valeur zéro pour $z = 0$. Obtient-on de cette manière *toutes les intégrales qui s'annulent pour* $z = 0$? Il en est effectivement ainsi : c'est ce que j'énonçais dans une des Notes citées plus haut. Je me propose d'en développer ici la démonstration, qui est bien simple.

---

[1] Je traite dans ces articles des équations différentielles du second ordre; le cas des équations du premier ordre n'est évidemment qu'un cas particulier de ce cas plus général.

Il importe d'abord de préciser les intégrales dont il s'agit. Nous supposons que ce sont des fonctions analytiques de $z$, qui, dans un certain domaine autour de l'origine, n'ont d'autre point singulier que ce dernier point; de plus, elles tendent vers zéro, quand $z$ tend vers zéro, pourvu toutefois que son argument reste fini.

Ceci posé, je dis d'abord que, si $v$ est une intégrale de l'équation (2) qui s'annule pour $z = 0$, la limite de $\frac{v}{z^b}$, quand $z$ tend vers zéro, est une quantité finie différente de zéro. Suivons, pour le faire voir, une marche analogue à celle qui a été employée par MM. Briot et Bouquet, dans le cas où $b$ était un nombre négatif. Nous écrirons l'équation sous la forme

$$z\frac{dv}{dz} = bv[1 + \psi(v) + z\chi(v, z)],$$

où $\psi$ est une série ordonnée suivant les puissances de $v$, et sans terme constant. En divisant par $1 + \psi(v)$ les deux membres, nous aurons

$$\frac{dv}{v}(1 + \alpha v + \alpha^1, v^2 + \ldots) = b\frac{dz}{z} + \chi_1(v, z)\,dz,$$

$\chi_1$ étant une série ordonnée suivant les puissances de $v$ et $z$.

Prenons un point $z_1$, dans le voisinage de l'origine, où une des déterminations $v_1$ de l'intégrale considérée $v$ soit différente de zéro. Joignons ce point à l'origine par un chemin arbitraire C (la ligne droite, par exemple), et soit $z_1^b$ une des déterminations de la fonction $z^b$ au point $z_1$. En intégrant le long du chemin C, depuis le point $z_1$ jusqu'à un point variable $z$, nous aurons

$$\frac{v}{v_1} = \frac{z^b}{z_1^b}e^t,$$

$t$ étant une fonction de $z$, qui, pour l'origine, a une valeur finie. Par suite, quand $z$ partant du point $z_1$ ($z^b$ ayant au début la détermination $z_1^b$) tend vers zéro en suivant le chemin C, $\frac{v}{z^b}$ tend vers une valeur finie parfaitement déterminée et différente de zéro, que nous désignerons par $\lambda_0$.

Nous poserons maintenant $v = \lambda z^b$, la détermination de $z^b$ sur le chemin C étant celle qui a été précédemment considérée; nous avons dit que $\lambda$ satisfera à l'équation

$$\frac{d\lambda}{dz} = \lambda P\left(z, \frac{z^b}{z}, \lambda\right).$$

Nous voulons considérer les intégrales de cette équation, qui tendent vers $\lambda_0$ quand $z$ tend vers zéro, en suivant le chemin C. Nous avons obtenu, sous forme de série, une intégrale $\lambda_1$ remplissant cette condition, il faut montrer qu'il n'y en a pas d'autre. Posons $\lambda = \lambda_1 + \mu$, $\mu$ satisfera à une équation de la forme

$$\frac{d\mu}{dz} = \mu Q(z, z^{b-1}, \mu).$$

S'il existe une intégrale autre que $\lambda_1$, cette dernière équation admettra une intégrale $\mu$, qui tendra vers *zéro* quand $z$ se rapprochera de l'origine en suivant le chemin C. Mais cela est impossible; on le voit par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut; on a

$$\frac{d\mu}{\mu} = Q(z, z^{b-1}, \mu);$$

et en intégrant sur le chemin C depuis un point $z_1$, où $\mu$ a une valeur différente de zéro jusqu'à un point variable $z$, on voit que le premier membre augmenterait indéfiniment, tandis que le second resterait fini.

L'équation (2) n'a donc d'autres intégrales égales à zéro, pour $z = 0$, que celles qui sont données par les développements en série, procédant suivant les puissances croissantes de $z$ et $z^{b-1}$.