Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MINORATION DU SPECTRE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

Pierre Jammes

Tome 140
Fascicule 2

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 237-255

Bull. Soc. math. France
140 (2), 2012, p. 237–255

MINORATION DU SPECTRE DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE DIMENSION 3

PAR PIERRE JAMMES

RÉSUMÉ. — Soit M une variété hyperbolique compacte de dimension 3, de diamètre d et de volume $\leq V$. Si on note $\mu_i(M)$ la i-ième valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les 1-formes coexactes de M, on montre que $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ et $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$, où $c > 0$ est une constante ne dépendant que de V, et k est le nombre de composantes connexes de la partie mince de M. En outre, on montre que pour toute 3-variété hyperbolique M_∞ de volume fini avec cusps, il existe une suite M_i de remplissages compacts de M_∞, de diamètre $d_i \to +\infty$ telle que et $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.

ABSTRACT (*Lower bound of the spectrum on hyperbolic 3-manifolds*)

Let M be a compact hyperbolic 3-manifold of diameter d and volume $\leq V$. If $\mu_i(M)$ denotes the i-th eigenvalue of the Hodge laplacian acting on coexact 1-forms of M, we prove that $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ and $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$, where $c > 0$ depends only on V, and k is the number of connected component of the thin part of M. Moreover, we prove that for any finite volume hyperbolic 3-manifold M_∞ with cusps, there is a sequence M_i of compact fillings of M_∞ of diameter $d_i \to +\infty$ such that $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.

Texte reçu le 10 mars 2011, accepté le 9 juin 2011.

PIERRE JAMMES, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Université Nice Sophia Antipolis — CNRS (UMR 6621), Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France • *E-mail :* `pjammes@unice.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 35P15, 58J50, 53C21, 57M50.

Mots clefs. — laplacien de Hodge-de Rham, formes différentielles, variétés hyperboliques.

L'auteur a bénéficié du soutien du projet ANR Geodycos ANR-07-BLAN-0140-01.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2012/237/$ 5.00

1. Introduction

L'objet de cet article est d'étudier le comportement des premières valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles, sur une suite de variétés hyperboliques compactes qui dégénère à volume majoré. Plus précisément on va donner une minoration du spectre en fonction du diamètre de la variété. En dimension 2, le spectre du laplacien de Hodge-de Rham se déduit du spectre du laplacien usuel agissant sur les fonctions, et en dimension supérieure ou égale à 4, à volume majoré, il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques compactes, le problème se réduit donc à la dimension 3.

Rappelons quelques résultats connus sur le spectre des variétés hyperboliques, en commençant par le laplacien agissant sur les fonctions. Pour une suite de métriques hyperboliques sur une surface compacte donnée convergeant vers une variété avec un ou plusieurs cusps, B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [6] qu'en restriction à l'intervalle $[0,\frac{1}{4}[$, les valeurs propres convergent vers le spectre de la surface limite. En dimension 3 on ne peut pas déformer la métrique d'une variété compacte dans la classe des métriques hyperboliques, mais W. Thurston a montré qu'une variété avec cusps était limite d'une suite de variétés hyperboliques compactes (voir les rappels fait en section 2). Dans ce contexte, Colbois et Courtois [8] montrent qu'on a convergence du spectre dans l'intervalle $[0,1[$. Dans [18], F. Pfäffle montre un résultat analogue pour l'opérateur de Dirac en dimension 2 et 3. Par ailleurs, R. Schoen donne dans [19] en toute dimension supérieure ou égale à 3 une minoration uniforme du spectre du laplacien agissant sur les fonctions à volume majoré (voir aussi [12], [10] et [3]).

Dans le cas du laplacien de Hodge agissant sur les p-formes, une variété hyperbolique non compacte de dimension n possède un spectre continu formé de la demi-droite $[\frac{(n-2p-1)^2}{4},+\infty[$, $p<\frac{n}{2}$. Si $n=3$, le spectre continu pour les 1-formes est donc $[0,+\infty[$, on s'attend donc a ce que des valeurs propres tendent vers 0 quand une suite de variétés compactes tend vers une variété non compacte. On sait que c'est effectivement le cas ([7], théorème 0.3), et J. McGowan et J.Dodziuk ont étudié plus en détail ce phénomène dans [17] et [11].

Avant d'énoncer les résultats, précisons quelques notations. Sur une variété riemannenne (M,g) compacte sans bord, le laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les p-formes est défini par $\Delta=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d}$ où d désigne la différentielle extérieure et δ la codifférentielle, adjoint L^2 de d. C'est un opérateur positif dont le noyau est canoniquement isomorphe à la cohomlogie de Rham $H^p(M)$ de la variété. Le cas $p=0$ correspond au laplacien usuel sur les fonctions, dont on notera $0<\lambda_1(M,g)\leq\lambda_2(M,g)\leq\dots$ le spectre non nul. Pour $p=1$, on a la décomposition de Hodge $\Omega^1(M) = \mathrm{d}\Omega^0(M) \oplus \operatorname{Ker}\Delta \oplus \delta\Omega^2(M)$, le spectre non nul est donc la réunion du spectre $(\lambda_i(M,g))$ du laplacien restreint à $\mathrm{d}\Omega^0(M)$ et du spectre restreint à $\delta\Omega^2(M)$ qu'on notera $0 < \mu_1(M,g) \leq \mu_2(M,g) \leq \cdots$. En dimension 3, par dualité de Hodge, le spectre en degré 2 et 3 est le même qu'en degré 1 et 0 respectivement, on est donc ramené à l'étude des $(\mu_i(M,g))$.

Avec ces notations, on peut énoncer les résultats de J. McGowan comme suit :

THÉORÈME 1.1 ([17]). — *Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ et $V > 0$ telles que si M, g est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 de diamètre d et de volume inférieur à V, alors*

1. $\#\left\{\mu_i(M,g) \leq \dfrac{1}{C_1 V(1+d^2)}\right\} \leq C_2 V$;
2. $\#\left\{\mu_i(M,g) \leq \dfrac{1}{d^2}\right\} \geq C_3 V$.

Ce résultat a été précisé dans [11] en donnant une estimée du nombre de valeurs propres dans un intervalle $[0,x]$ pour une suite de variétés qui dégénère en fonction de la géométrie des différentes composantes de la partie mince de la variété (voir section 2 pour la définition de cette notion), généralisant des résultats analogues pour les fonctions dans l'intervalle $[1, 1+x]$ ([5]), mais en laissant ouvert la question d'une minoration explicite de la première valeur propre en fonction du diamètre.

Le but de l'article est d'y apporter une réponse en démontrant deux résultats de minoration du spectre. Le premier donne une minoration générale qui est exponentielle par rapport au diamètre de la variété pour la première valeur propre, et quadratique pour la $(k+1)$-ième, où k est le nombre de parties minces :

THÉORÈME 1.2. — *Pour tout réel $V > 0$, il existe une constante $c(V) > 0$ telle que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 de volume inférieur à V, de diamètre d et possédant k parties minces, alors $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ et $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$.*

Les estimées de J. Dodziuk et J. McGowan pouvaient laisser espérer une minoration de la première valeur propre qui soit quadratique par rapport au diamètre. Le second résultat de l'article consiste à montrer que pour certaines variétés, on a effectivement une telle minoration :

THÉORÈME 1.3. — *Pour toute variété hyperbolique M_∞ non compacte de dimension 3 et de volume fini, il existe une constante $c > 0$ et une suite (M_i) de remplissages compacts de M_∞, de diamètre $d_i \to +\infty$ et telle que $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.*

Un remplissage compact de M_∞ est une variété hyperbolique compacte dont la partie épaisse est topologiquement identique à M_∞ (voir section 2), en particulier le volume des M_i est uniformément majoré.

Si on essaie de généraliser la démonstration de cette minoration à toutes les variétés hyperboliques, une difficulté liée à l'interaction entre les cohomologies des parties mince et épaisse de la variété apparaît. Cet aspect topologique du problème n'avait pas été mis en évidence par les travaux de McGowan et Dodziuk.

Ces résultats laissent la possibilité qu'il existe pour chaque partie mince une petite valeur propre à décroissance exponentielle par rapport au diamètre, mais cette valeur propre n'apparaÓtrait que pour des topologies particulières. Comme en dimension 2, l'existence d'une partie mince n'implique pas forcément l'existence d'une valeur propre exponentiellement petite par rapport au diamètre.

Les résultats de [17] et [11] reposent sur une technique de minoration du spectre (dont l'idée remonte à Cheeger) faisant intervenir un recouvrement de la variété par des ouverts ([17], lemme 2.3). Cette technique échouait à minorer la première valeur propre si la cohomologie des intersections des ouverts du recouvrement était non triviale. Les théorèmes 1.2 et 1.3 reposent sur une amélioration du lemme de McGowan qui permet de minorer cette première valeur propre. Dans une autre direction, le principe d'utiliser des recouvrements pour minorer le spectre du laplacien de Hodge-de Rham a déjà conduit à des résultats très généraux ([4], [16]), mais peu précis quand le rayon d'injectivité est petit, en particulier dans le contexte des variétés hyperboliques de dimension 3.

L'article est organisé comme suit : on fait dans la section 2 des rappels sur la géométrie et la topologie des variétés hyperboliques de dimension 3, la section 3 est consacrée à des minorations du spectre sur les parties mince et épaisse, la généralisation du lemme de McGowan est montré dans la section 4 et pour finir la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3 est donnée dans la section 5.

Je remercie B. Colbois et F. Naud d'avoir attiré mon attention sur ce problème, le rapporteur de l'article d'avoir permis par ses remarques d'améliorer le texte et le laboratoire de mathématiques de l'université d'Avignon de son hospitalité pendant que je menais ce travail à bien.

2. Topologie, géométrie et cohomologie des variétés hyperboliques de dimension 3

2.1. Géométrie et topologie des variétés hyperboliques. — Nous allons rappeler ici plusieurs aspects de la topologie et de la géométrie des variétés hyperboliques de dimension 3 qui interviendront dans la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3. On se référera principalement à [13] et [1].

Pour toute variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini et tout réel $a > 0$, on notera $M_a = \{x \in M, \mathrm{inj}(x) > a\}$ l'ensemble des points de M dont le rayon d'injectivité est plus grand que a.

Selon le lemme de Margulis, il existe une constante $c_{\mathscr{M}} > 0$ telle que la topologie et la géométrie de la partie mince de M, c'est-à-dire le complémentaire M_m de $M_{c_{\mathscr{M}}}$, soient simples. Plus précisément, la partie mince M_m possède un nombre fini de composantes connexes, chacune étant soit un cusp (isométrique à $T^2 \times [0, +\infty[$ muni d'une métrique $g = e^{-2x} g_T \oplus \mathrm{d}x^2$, où g_T est une métrique plate sur le tore T^2), soit un voisinage tubulaire $\mathscr{T}$ d'une géodésique fermée de longueur l. Ce tube $\mathscr{T}$ est difféomorphe à $B^2 \times S^1$ et isométrique au produit $B^2(R) \times [0, l]$ muni de la métrique

$$g = \cosh^2 r \ \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\theta^2 \tag{1}$$

où t désigne la coordonnée le long de la géodésique, r la coordonnée radiale sur la boule B^2 et θ la coordonnée angulaire, les bord $B \times \{0\}$ et $B \times \{l\}$ étant identifiés par une isométrie de B^2.

Si on se donne une borne V sur le volume, il existe qu'un nombre fini de types de difféomorphisme possibles pour la partie épaisse de la variété ([1], théorème E.4.8). De plus, si on considère une suite infinie de variétés compactes distinctes, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers une variété avec un ou plusieurs cusps.

On peut déduire en particulier de ce qui précède que l'ensemble des métriques induites sur une partie épaisse (ou plus généralement sur M_a) de topologie fixée est borné :

FAIT 2.1. — *Soit $a > 0$ et $V > 0$. Il existe une constante $\tau(V) > 0$ telle que si (M, g) et (M', g') sont deux variétés hyperboliques de dimension 3 de volume inférieur à V et telles que M_a et M'_a soient difféomorphes, alors $\frac{1}{\tau} g' \leq g \leq \tau g'$ en restriction à M_a et M'_a.*

Si on considère une suite de variétés hyperboliques dont la partie épaisse est de topologie donnée et dont le diamètre tend vers l'infini, la topologie des éléments de la suite dépend de la manière dont les tubes $\mathscr{T} \simeq B^2 \times S^1$ sont recollés sur la bord de la partie épaisse. Pour chaque composante de la partie mince, les recollements possibles (topologiquement) sont paramétrés par une élément de

$$\mathscr{P} = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux}\} \cup \infty \tag{2}$$

(voir [1], section E.4). Comme le fait 2.1 s'applique au bord de la partie épaisse, la géométrie, donc l'aire, du bord du tube reste contrôlée, et converge quand $R \to +\infty$. Ceci implique que le produit de la circonférence du tube avec la longueur tend vers une constante. Compte tenu de l'expression de la métrique sur le tube donnée en (1), on a donc

$$le^{2R} \to c^{te} \tag{3}$$

quand $R \to +\infty$.

Enfin, W. Thurston a montré ([21], théorème E.5.1 de [1]) qu'une variété de volume fini possédant k cusps est la limite d'une suite de variétés compactes ayant la même partie épaisse (on parle alors de remplissage compact de la variété non compacte). Plus précisément, comme le bord d'un cusp est un tore T^2, on peut remplir topologiquement ce cusp par un tube $\simeq B^2 \times S^1$, chaque remplissage étant paramétré par un élément $(p_k, q_k) \in \mathscr{P}$. Thurston montre alors qu'il existe $K > 0$ tel que si $p_k, q_k > K$ pour tout k, alors la variété compacte obtenue peut être munie d'une métrique hyperbolique. En particulier, si la variété initiale n'a qu'un seul cusp, alors presque tout remplissage est hyperbolique.

2.2. Un lemme cohomologique. — Dans la démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3, l'interaction entre les cohomologies des parties mince et épaisse de la variété et de leur frontière joue un rôle crucial. Pour comprendre cette interaction, on aura besoin du lemme suivant qui sera appliqué à la partie épaisse de la variété.

LEMME 2.2. — *Si M est une variété compacte de dimension 3, alors l'image de l'application $H^1(M) \to H^1(\partial M)$ est de dimension $b_1(\partial M)/2$.*

La démonstration s'appuie sur la suite exacte longue

$$\to H^{k-1}(\partial M) \to H^k_c(M) \to H^k(M) \to H^k(\partial M) \to \tag{4}$$

dont on peut trouver la démonstration dans [20] (eq. (9.67) p. 370, $H^k_c(M)$ désigne la cohomologie à support compact de M). On commence par établir une propriété générale de cette suite :

LEMME 2.3. — *Les applications $H^k(M) \to H^k(\partial M)$ et $H^{n-k-1}(\partial M) \to H^{n-k}_c(M)$ sont les transposées l'une de l'autre pour la dualité de Poincaré.*

Démonstration. — Rappelons d'abord la définition de ces deux applications. La première, $\Psi_1 : H^k(M) \to H^k(\partial M)$, est naturellement induite par l'injection $i : \partial M \to M$. La seconde se construit de la manière suivante : si $\alpha \in \Omega^{n-k-1}(\partial M)$ est fermée, on se donne une forme $\alpha' \in \Omega^{n-k}(M)$ telle que $i^*(\alpha') = \alpha$ et $\mathrm{d}\alpha' = 0$ au voisinage de ∂M, et on pose $\Psi_2([\alpha]) = [\mathrm{d}\alpha']$ (on peut vérifier que la classe de cohomologie de $\mathrm{d}\alpha'$ ne dépend que de celle de α, voir [20]).

Si $[\alpha] \in H^{n-k-1}(\partial M)$ et $[\beta] \in H^k(M)$, le calcul du crochet de dualité $\langle \Psi_2([\alpha]), [\beta] \rangle$ donne, en utilisant la formule de Stokes et le fait que β est fermée,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_2([\alpha]), [\beta] \rangle &= \int_M \mathrm{d}\alpha' \wedge \beta = \int_{\partial M} i^*(\alpha' \wedge \beta) \\ &= \int_{\partial M} \alpha \wedge i^*(\beta) = \langle [\alpha], \Psi_1([\beta]) \rangle, \end{aligned} \tag{5}$$

ce qui est précisément l'énoncé du lemme. □

Démonstration du lemme 2.2. — Dans la suite (4), on considère les deux flèches

$$H^1(M) \to H^1(\partial M) \to H^2_c(M). \tag{6}$$

La dimension de l'image de la première est égale à la codimension du noyau de la seconde car les deux applications sont transposées l'une de l'autre, et elle est aussi égale à la dimension du noyau de la seconde par exactitude de la suite. Cette dimension est donc nécessairement $b_1(\partial M)/2$. □

3. Spectres des parties minces et épaisse

La minoration du spectre d'une variété hyperbolique se fera en se basant sur des minorations des spectres de sa partie épaisse et de sa partie mince. Ces minorations seront combinées dans la section suivante pour obtenir une minoration globale en utilisant la technique développée par McGowan dans [17].

Dans cette section et la suivante, le spectre des variétés à bord sera toujours considéré avec les conditions de bord absolues, qui généralise la condition de Neumann sur les fonctions. Si on note $j : \partial M \to M$ l'injection canonique et N un champ de vecteur normal au bord, cette condition peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} j^*(\iota_N \omega) = 0 \\ j^*(\iota_N \mathrm{d}\omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} j^*(*\omega) = 0 \\ j^*(*\mathrm{d}\omega) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Avec cette condition de bord, le laplacien de Hodge est elliptique (cf. [20]) et son spectre est discret. On conservera les notations (λ_i) et (μ_i) pour désigner ses valeurs propres.

Rappelons d'abord une caractérisation variationnelle du spectre remontant à J. Dodziuk et déjà exploitée par J. McGowan :

Proposition 3.1 ([9], [17]). — *Sur une variété compacte sans bord ou avec condition de bord (A), on a*

$$\mu_i = \inf_{V_i} \sup_{\varphi \in V_i \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\varphi\|^2}{\|\omega\|^2},\ \mathrm{d}\omega = \varphi \right\},$$

où V_i parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension i dans l'espace des 2-formes exactes lisses.

Remarquons que dans cet énoncé, on n'exige pas que les formes ω et φ vérifient la condition de bord (A).

J. Dodziuk en déduit le résultat qui suit et qui nous sera aussi utile :

Corollaire 3.2 ([9]). — *Soit g et g' deux métriques riemanniennes sur une variété compacte M de dimension n, et τ une constante strictement positive. Si les deux métriques vérifient $\frac{1}{\tau}g \leq g' \leq \tau g$, alors*

$$\frac{1}{\tau^{n+3}}\mu_i(M,g) \leq \mu_i(M,g') \leq \tau^{n+3}\mu_i(M,g)$$

pour tout entier $i > 0$.

Commençons par montrer qu'à volume majoré, le spectre des 1-formes est uniformément minoré sur la partie épaisse de la variété, et plus généralement sur M_a pour a donné, ainsi que le spectre des fonctions sur $M_a \backslash M_{c_{\mathscr{M}}}$:

Lemme 3.3. — *Pour tout $V > 0$ et tout $a \in]0, c_{\mathscr{M}}[$, il existe des constantes $c_1(V,a) > 0$ et $c_2(V,a) > 0$ telles que si M est une variété hyperbolique compacte de dimension 3, alors $\mu_1(M_a) \geq c_1$ et $\lambda_1(M_a \backslash M_{c_{\mathscr{M}}}) \geq c_2$.*

Démonstration. — Si on fixe la topologie de la partie épaisse de la variété, la famille de métriques à considérer est contrôlée (cf. fait 2.1) D'après le corollaire 3.2, la valeur propre $\mu_{1,1}(M_a)$ est donc uniformément minorée pour cette famille. Comme il n'existe qu'un nombre fini de topologies possibles pour la partie épaisse, la minoration uniforme de $\mu_{1,1}(M_a)$ s'en déduit immédiatement.

Le fait 2.1 reste valable pour $M_a \backslash M_{c_{\mathscr{M}}}$, donc le raisonnement précédent s'applique aussi à $mu_{0,1}(M_a \backslash M_{c_{\mathscr{M}}})$. □

On passe maintenant la la minoration du spectre sur la partie mince.

Lemme 3.4. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que si $\mathscr{T}$ est une composante connexe compacte de la partie mince d'une variété hyperbolique de dimension 3, alors $\mu_{1,1}(\mathscr{T}) \geq \frac{c}{R^2}$, où R est le rayon de $\mathscr{T}$.*

La minoration du spectre des parties minces est plus technique. On utilisera le fait que la métrique sur une composante connexe de la partie mince est T^2-invariante pour se ramener à un problème unidimensionnel à l'aide du lemme qui suit :

Lemme 3.5 ([14]). — *Soit M est une variété compacte M dont la métrique g est S^1-invariante et L la borne supérieure des longueurs des orbites de l'action de S^1. Si λ est une valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham vérifiant $\lambda < (2\pi/L)^2$, alors les formes propres associées sont S^1-invariantes.*

Démonstration du lemme 3.4. — Rappelons que la métrique sur une composante connexe compacte $\mathscr{T}$ de la partie mince de M_m s'écrit

$$g = \cosh^2 r\ \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r\ \mathrm{d}\theta^2 \tag{8}$$

où t désigne la coordonnée le long de la géodésique, r la coordonnée radiale sur la boule B^2 et θ la coordonnée angulaire.

L'expression (8) est indépendante de t et θ, ce qui signifie que la métrique est invariante sous l'action du tore T^2, paramétré par t et θ. Nous allons d'abord montrer qu'il suffit d'étudier le spectre en restriction aux formes différentielles invariantes sous cette action. Pour ce faire, il suffit de décomposer l'action du tore en l'action de deux cercles dont la longueur des orbites est bornée, pour ensuite appliquer le lemme 3.5.

Les orbites de l'action de T^2 sont les courbes de niveau de la fonction r, qu'on notera T_r (T_r est un cercle pour $r = 0$ et un tore sinon). Pour $r = R$, cette orbite est le bord du tube. Comme sa géométrie est contrôlée selon le fait 2.1, son diamètre est majoré en fonction du volume de la variété M. On peut facilement décomposer T^2 en deux cercles dont les orbites en restriction à $r = R$ sont bornées par le diamètre du tore, donc par le volume de M. Pour $r < R$, la métrique g_r induite sur T_r par la métrique de M vérifie $g_r < g_R$, donc les longueurs des orbites des actions de S^1 sont uniformément majorée par celles de T_R.

On va minorer le spectre de la partie mince en appliquant le lemme 3.1. On peut vérifier que le spectre restreint aux formes T^2-invariantes peut se calculer avec la formule du lemme en supposant ω et φ invariantes.

On est donc ammené à étudier le quotient $\mathscr{R}(\omega) = \frac{\|\mathrm{d}\omega\|^2}{\|\omega\|^2}$ où ω est une forme invariante. En posant $\omega = a_1(r)\mathrm{d}t + a_2(r)\mathrm{d}r + a_3(r)\mathrm{d}\theta$, on a $\mathrm{d}\omega = a_1'\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}t + a_3'\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$. La continuité de ω en $r = 0$ et le fait qu'elle soit invariante imposent que $a_3(0) = 0$. Comme on veut minimiser la norme de ω pour $\mathrm{d}\omega$ fixé, on peut se restreindre au cas où $a_2 = 0$. Compte tenu de l'expression (8) de la métrique, on cherche donc à minorer

$$\mathscr{R}(\omega) = \frac{\displaystyle\int_0^R \left(\frac{\sinh r}{\cosh r}a_1'^2 + \frac{\cosh r}{\sinh r}a_3'^2\right)\mathrm{d}r}{\displaystyle\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_0^R \left(\frac{\sinh r}{\cosh r}(a_1 - c)^2 + \frac{\cosh r}{\sinh r}a_3^2\right)\mathrm{d}r} \tag{9}$$

On va maintenant traiter séparément les cas $a_1 = 0$ et $a_3 = 0$ avant de combiner les deux résultats. On va d'abord étudier le quotient de Rayleigh

$$\frac{\int_0^R a_1'(r)^2 \tanh r\ \mathrm{d}r}{\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_0^R (a_1(r) - c)^2 \tanh r\ \mathrm{d}r}. \tag{10}$$

Il s'agit d'un quotient de Rayleigh en dimension 1 pour lequel la mesure de Lebesgue est remplacée par $\tanh(r)\mathrm{d}r$. Malheureusement la densité de cette mesure dégénère en 0, ce qui empêche de se ramener classiquement à un laplacien de Witten. Ce problème a déjà été résolu dans [11] (section 6) mais on va le traiter ici par des techniques plus élémentaires.

On veut éliminer le terme $\tanh r$ dans le quotient de Rayleigh. Pour préparer cette élimination, et pour se ramener à un intervalle de longueur fixe, on va commencer par faire un changement de variable. On pose $I(R) = \int_0^R \tanh^{-\frac{2}{3}}(r)\mathrm{d}r$ (cette intégrale est bien convergente et en outre $I(R) \sim R$ quand $R \to \infty$), on fait le changement de variable $\mathrm{d}r/\tanh^{\frac{2}{3}} r = \mathrm{d}x/I(R)$ et les changements de fonctions $f(x) = a_1(r)$ et $\eta(x) = \tanh^{\frac{1}{3}} r$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{\int_0^R \left(\frac{\partial a_1}{\partial r}\right)^2 \tanh r \ \mathrm{d}r}{\int_0^R (a_1 - c)^2 \tanh r \ \mathrm{d}r} &= \frac{\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 \eta^5 \mathrm{d}x}{\int_0^1 (f-c)^2 \eta^5 \mathrm{d}x} \\
&= \frac{1}{I(R)^2} \frac{\int_0^1 f'^2 \eta \mathrm{d}x}{\int_0^1 (f-c)^2 \eta^5 \mathrm{d}x} \\
&\geq \frac{1}{I(R)^2} \frac{\int_0^1 f'^2 \eta \mathrm{d}x}{\int_0^1 (f-c)^2 \mathrm{d}x} \qquad (11)
\end{aligned}$$

en utilisant pour cette dernière inégalité que $\eta \leq 1$. La fonction η dépend de R, mais comme $r \geq x(r)$ pour tout r si R est suffisamment grand, on a $\eta^3(x) = \tanh r \geq \tanh x$. On est donc ramené à majorer $\inf_c \int_0^1 (f-c)^2 \mathrm{d}x$ en fonction de $\int_0^1 f'^2 \tanh^{\frac{1}{3}} r \ \mathrm{d}x$.

En dimension 1 on a l'inégalité $\inf_c \|f - c\|_\infty \leq \|f'\|_1$ qui découle de l'inégalité des accroissement finis, et *a fortiori* les inégalités de Sobolev sont vraies quels que soient les exposants. En particulier on peut écrire, en appliquant une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\inf_c \|f-c\|_2^2 \leq \|f'\|_1^2 &= \left(\int_0^1 |f'(x)| \tanh^{\frac{1}{6}} x \cdot \tanh^{-\frac{1}{6}} x \ \mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leq \int_0^1 f'(x)^2 \tanh^{\frac{1}{3}} x \ \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \tanh^{-\frac{1}{3}} x \ \mathrm{d}x \qquad (12)
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré l'existence d'une constante C_1 telle que si R est suffisamment grand, alors

$$\int_0^R a_1'(r)^2 \tanh r \ \mathrm{d}r \geq \frac{C_1}{R^2} \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_0^R (a_1(r) - c)^2 \tanh r \ \mathrm{d}r. \qquad (13)$$

Le cas de la fonction a_3 se traite de manière similaire. Le même changement de variable et le changement de fonction $f(x) = a_3(r)$ donne

$$\frac{\int_0^R \left(\frac{\partial a_3}{\partial r}\right)^2 \tanh^{-1} r \, \mathrm{d}r}{\int_0^R a_3^2 \tanh^{-1} r \, \mathrm{d}r} = \frac{1}{I(R)^2} \frac{\int_0^1 f'^2 \eta^{-5} \mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2 \eta^{-1} \mathrm{d}x} \geq \frac{1}{I(R)^2} \frac{\int_0^1 f'^2 \mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2 \eta^{-1} \mathrm{d}x}$$

$$\geq \frac{1}{I(R)^2} \frac{\int_0^1 f'^2 \mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2 \tanh^{-\frac{1}{3}} x \, \mathrm{d}x} \tag{14}$$

Comme $f(0) = a_3(0) = 0$, on a $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2$, et donc

$$\int_0^1 f^2 \tanh^{-\frac{1}{3}} x \, \mathrm{d}x \leq \|f\|_\infty^2 \int_0^1 \tanh^{-\frac{1}{3}} x \, \mathrm{d}x \leq C \cdot \int_0^1 f'^2 \mathrm{d}x \tag{15}$$

On en déduit l'existence d'une constante C_2 telle que si R est suffisamment grand, alors

$$\int_0^R a_3'(r)^2 \tanh^{-1} r \, \mathrm{d}r \geq \frac{C_2}{R^2} \int_0^R a_3(r)^2 \tanh^{-1} r \, \mathrm{d}r. \tag{16}$$

En sommant (13) et (16), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^R \left(\frac{\sinh r}{\cosh r} a_1'^2 + \frac{\cosh r}{\sinh r} a_3'^2 \right) \mathrm{d}r \\ &\geq \frac{C_1 + C_2}{R^2} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_0^R \left(\frac{\sinh r}{\cosh r} (a_1 - c)^2 + \frac{\cosh r}{\sinh r} a_3^2 \right) \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{17}$$

L'application du lemme 3.1 permet alors de conclure. □

4. Minoration du spectre à l'aide d'un recouvrement d'ouverts

Dans cette partie, les variétés ne seront pas supposées hyperboliques, ni de dimension 3, et les formes différentielles considérées pourront être de degré supérieur ou égal à 2. On notera $\mu_{p,i}$ la i-ième valeur propre du laplacien de Hodge en restriction aux p-formes coexactes. La proposition 3.1 de Dodziuk reste valable pour $\mu_{p,i}$ si on impose à V_i d'être un sous-espace des $p+1$-formes.

J. McGowan a développé dans [17] une technique de minoration du spectre du laplacien de Hodge-de Rham se basant sur un recouvrement de la variété par des ouverts sur lesquels le spectre est bien contrôlé. Cette technique a eu depuis de nombreuses autres applications.

Cependant, le lemme de McGowan souffre du défaut de ne pas permettre de minorer la première valeur propre si la cohomologie des intersections des ouverts du recouvrement est non triviale. Nous allons ici améliorer ce résultat en montrant qu'on peut toujours minorer la première valeur propre à condition de contrôler la manière dont interagissent les cohomologies des ouverts et de leurs intersections. Le procédé a déjà été utilisé dans [15] pour une situation très particulière, nous allons le généraliser.

Précisons d'abord les données de la démonstration. On considère un recouvrement (U_i) de la variété M par des ouverts dont on supposera qu'ils n'ont pas d'intersection d'ordre supérieur ou égal à 3, et on pose $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Sous cette hypothèse, on a une suite exacte de Mayer-Vietoris

$$(18) \qquad \to H^p(M) \to \bigoplus_i H^p(U_i) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i,j} H^p(U_{ij}) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(M) \to,$$

cf. [2], ch. 1, § 1 et 2.

L'obstruction à minorer la première valeur propre dans la démonstration de McGowan est la cohomologie $\oplus H^p(U_{ij})$. Plus précisément, à partir d'une forme $\omega \in \Omega^{p+1}(M)$, J. McGowan construit un élément $\varphi_{ij} \in \oplus\Omega^p(U_{ij})$ qui est fermé et montre que s'il est exact, on peut contruire une forme $\varphi \in \Omega^p(M)$ telle que $\mathrm{d}\varphi = \omega$ et dont la norme est contrôlée, puis appliquer la proposition 3.1.

Par construction, la classe $\varphi_{ij} \in \oplus H^p(U_{ij})$ est dans l'image de δ (cette affirmation sera justifiée plus loin). L'idée permettant d'améliorer le résultat de McGowan consiste à utiliser une section de la flèche δ, ou une section partielle, définie sur un sous-espace de l'image de δ. Plus précisément, en identifiant une classe de cohomologie avec son représentant harmonique, on se donne un sous-espace $E \subset \operatorname{Im}\delta \subset \oplus\mathscr{H}^p(U_{ij})$ (où $\mathscr{H}^p(U_{ij})$ désigne l'espace des p-formes harmoniques de U_{ij}), et une application $T : E \to \oplus\Omega^p(U_i)$ telle que pour tout $h \in E$, $\mathrm{d}T(h) = 0$ et $\delta[T(h)] = [h]$. On peut alors minorer une valeur propre dont le rang est alors d'autant plus petit que la dimension de E est grande (la première valeur propre si $E = \operatorname{Im}\delta$). Le lemme qui suit explicite cette minoration, qui fait intervenir la norme de l'application T :

Lemme 4.1. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n, (U_i) un recouvrement de M par des ouverts n'ayant pas d'intersection d'ordre 3 ou plus, p un entier $\leq n$ et $\mu(U_i)$ (resp. $\mu(U_{ij})$) la première valeur propre du laplacien restreint aux p-formes coexactes de U_i (resp. aux $p-1$-formes coexactes de U_{ij}) pour la condition de bord absolue. Si on se donne une partition de l'unité (ρ_i) associée à (U_i), un espace E et une application T comme ci-dessus, alors*

$$\mu_{p,k+1}(M,g) \geq \frac{1}{\sum_i \left(\frac{1}{\mu(U_i)} + \sum_j \left(\frac{1}{\mu(U_i)} + \frac{1}{\mu(U_j)}\right)\left(8 + \frac{8c_\rho}{\mu(U_{ij})} + 4C_T\right)\right)},$$

avec $k = \dim\operatorname{Im}\delta - \dim E$, $C_T = \|T\|^2$ et $c_\rho = \sup_i \|\nabla\rho_i\|_\infty$.

Démonstration. — Comme rappelé plus haut, le principe consiste, pour toute forme $\omega \in \Omega^{p+1}(M)$, à construire une primitive de ω dont la norme est contrôlée et d'appliquer la proposition 3.1. Cette construction se fait par une chasse dans le complexe de Čech-de Rham ci-dessous (Cf. [2]) :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \Omega^{p+1}(M) & \to & \bigoplus_i \Omega^{p+1}(U_i) & \to & \bigoplus_{ij} \Omega^{p+1}(U_{ij}) & \to 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & \Omega^{p}(M) & \to & \bigoplus_i \Omega^{p}(U_i) & \to & \bigoplus_{ij} \Omega^{p}(U_{ij}) & \to 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & \Omega^{p-1}(M) & \to & \bigoplus_i \Omega^{p-1}(U_i) & \to & \bigoplus_{ij} \Omega^{p-1}(U_{ij}) & \to 0
\end{array}
\tag{19}
$$

On va d'abord traiter le cas où $E = \operatorname{Im}\delta$.

Soit $\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ une forme exacte. Le but est de construire une primitive de ω dont la norme soit contrôlée. On va d'abord voir comment la construire, puis comment majorer sa norme.

La restriction de ω à chaque U_i est une forme exacte qu'on notera ω_i. Si φ_i est une primitive de ω_i pour tout i, alors les formes $\varphi_{ij} \in \Omega^p(U_{ij})$ définies par $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$ sont fermées par définition, et la construction de la suite de Mayer-Vietoris assure que la classe $\{[\varphi_{ij}]\} \in \oplus_{ij} H^p(U_{ij})$ est bien dans l'image de l'application δ. Chaque φ_{ij} se décompose donc en une somme $\varphi_{ij} = \alpha_{ij} + h_{ij}$, où α_{ij} est exacte et h_{ij} est harmonique (avec condition de bord absolue). Si pour tout i et j, $\beta_{ij} \in \Omega^{p-1}(U_{ij})$ est une primitive de α_{ij} (en prenant soin de choisir $\beta_{ji} = -\beta_{ij}$), on définit $\gamma_i \in \Omega^{p-1}(U_i)$ par $\gamma_i = \sum_j \rho_j \beta_{ij}$. On a alors $\beta_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$, et par commutativité du diagramme (19), on a $\mathrm{d}\gamma_i - \mathrm{d}\gamma_j = \alpha_{ij}$.

Par ailleurs, on peut décomposer l'application T en une somme $\sum_i T_i$ avec $T_i : \oplus_{ij} H^p(U_{ij}) \to \Omega^p(U_i)$. Par conséquent, à chaque h_{ij}, on peut associer la famille $T_i(h_{ij}) \in \oplus_i \Omega^p(U_i)$.

Si on pose maintenant $\bar\varphi_i = \varphi_i - \mathrm{d}\gamma_i - \sum_j T_i(h_{ij})$, on a $\bar\varphi_i - \bar\varphi_j = \varphi_{ij} - \alpha_{ij} - h_{ij} = 0$. Les $\bar\varphi_i$ sont donc les restrictions d'une forme globale $\bar\varphi \in \Omega^p(M)$ telle que $\mathrm{d}\bar\varphi = \omega$. Il reste a majorer la norme de $\bar\varphi$ en fonction de ω et des données. On commence par écrire

$$
\begin{aligned}
\|\bar\varphi\|^2 &\le \sum_i \|\bar\varphi_i\|^2 = \sum_i \|\varphi_i\|^2 + \sum_i \|\mathrm{d}\gamma_i + T_i(\sum_j h_{ij})\|^2 \\
&\le \sum_i \|\varphi_i\|^2 + 2\sum_i \|\mathrm{d}\gamma_i\|^2 + 2\sum_i \|T_i(\sum_j h_{ij})\|^2
\end{aligned}
\tag{20}
$$

en utilisant le fait que φ_i est coexacte, donc orthogonale aux formes fermées (dans cette inégalité, chaque norme est relative au domaine sur lequel la forme est définie). Par construction de φ_i, on a

$$
\|\varphi_i\|^2 \le \frac{\|\omega_i\|^2}{\mu(U_i)} \le \frac{\|\omega\|^2}{\mu(U_i)},
\tag{21}
$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned}\|T_i(\sum_j h_{ij})\|^2 &\leq C_T \sum_j \|h_{ij}\|^2 \leq C_T \sum_j \|\varphi_{ij}\|^2 \\ &\leq 2C_T \sum_j (\|\varphi_i\|^2 + \|\varphi_j\|^2) \\ &\leq 2C_T \|\omega\|^2 \sum_j \Big(\frac{1}{\mu(U_i)} + \frac{1}{\mu(U_j)}\Big). \qquad (22)\end{aligned}$$

La majoration de $\|\mathrm{d}\gamma_i\|$ s'effectue comme dans [17] :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{d}\gamma_i\|^2 = \|\mathrm{d}\sum_j \rho_j\beta_{ij}\|^2 &\leq \|\sum_j (\mathrm{d}\rho_j \wedge \beta_{ij} + \rho_j \mathrm{d}\beta_{ij})\|^2 \\ &\leq 2\sum_j (c_\rho \|\beta_{ij}\|^2 + \|\mathrm{d}\beta_{ij}\|^2) = 2\sum_j (c_\rho \frac{\|\alpha_{ij}\|^2}{\mu_{ij}} + \|\alpha_{ij}\|^2) \\ &\leq 2\sum_j (\frac{c_\rho}{\mu_{ij}} + 1)\|\varphi_{ij}\|^2 \leq 4\sum_j (\frac{c_\rho}{\mu_{ij}} + 1)(\|\varphi_i\|^2 + \|\varphi_j\|^2). \qquad (23)\end{aligned}$$

En combinant les majorations (20) à (23), on obtient

(24)

$$\|\bar\varphi\|^2 \leq \|\omega\|^2 \sum_i \left(\frac{1}{\mu(U_i)} + \sum_j \Big(\frac{1}{\mu(U_i)} + \frac{1}{\mu(U_j)}\Big)\Big(8 + \frac{8c_\rho}{\mu(U_{ij})} + 4C_T\Big)\right).$$

On en déduit une minoration de $\|\omega\|^2/\|\bar\varphi\|^2$ qui donne le résultat souhaité, en appliquant le lemme 3.1.

Le cas $E \neq \operatorname{Im}\delta$ se traite comme dans [17] : pour tout espace $V \subset \Omega^{p+1}(M)$ constitué de formes exactes et de dimension $k+1$, il existe une forme $\omega \in V\backslash\{0\}$ telle que la forme harmonique $\sum h_{ij}$ soit dans E. On peut alors effectuer les calculs précédents sur ω et l'application du lemme 3.1 donne une minoration de $\mu_{p,k+1}(M,g)$. □

5. Spectre des variétés hyperboliques

On peut maintenant démontrer les deux résultats annoncés dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1.2. — On va appliquer le lemme 4.1 à un recouvrement de la variété par deux ouverts. L'ouvert U_1 sera M_a pour un $a < c_{\mathcal{M}}$ fixé (donc U_1 englobe la partie épaisse de M) et U_2 sera la réunion M_m des parties minces de M. Les valeurs propres $\mu(U_1)$ et $\mu(U_{12})$ sont uniformément minorés d'après le lemme 3.3 (les mêmes arguments pemettent de majorer uniformément la constante c_ρ). Celui de $\mu(U_2)$ étant minoré grâce au lemme 3.4, on est essentiellement ramené au contrôle de la constante C_T dans le lemme 4.1.

On va commencer par la minoration de la $(k+1)$-ième valeur propre. On définit E comme étant l'image de l'application $H^1(U_1) \to H^1(U_{12})$, et T comme étant la réciproque de cette application, en identifiant chaque classe de cohomologie à son représentant harmonique. Comme la géométrie de U_1 est contrôlée, la norme C_T est uniformément majorée, et d'après le lemme 2.2 la dimension de E est k. Le lemme 4.1 donne donc la minoration

$$\mu_{k+1}(M,g) \geq \frac{C}{C' + R^2} \tag{25}$$

où $C, C' > 0$ sont deux constantes ne dépendant que de V et R^2 étant le plus grand rayon des composantes connexes de M_m. Comme le diamètre d de la variété est uniformément minoré (on a nécessairement $d \geq c_{\mathcal{M}}$) et que $d > R$, on peut trouver une constante c telle que $\mu_{k+1}(M,g) \geq \frac{c}{d^2}$.

Pour la minoration de la première valeur propre, nous allons d'abord traiter le cas où la partie mince de la variété ne compte qu'une seule composante connexe, c'est-à-dire que $k = 1$. On verra ensuite comment la démonstration se généralise.

Si $k = 1$, l'espace de cohomologie $H^1(U_{ij}) = H^1(U_{12})$ est alors de dimension 2, et les images des deux applications $H^1(U_i) \to H^1(U_{12})$ sont de dimension 1.

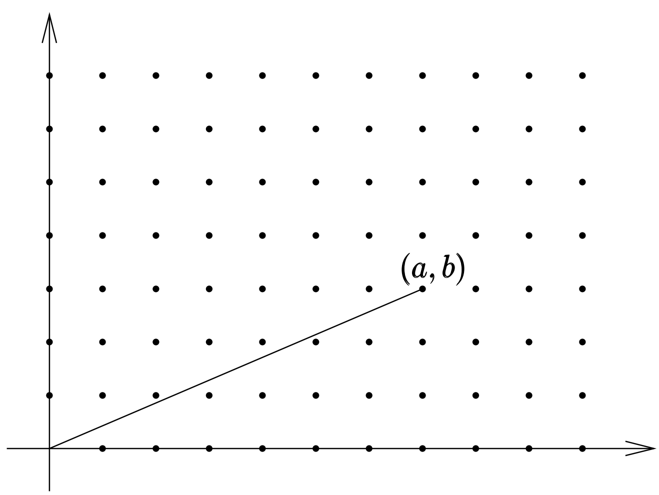

FIGURE 1.

La figure 1 représente $H^1(U_{12})$, en choisissant l'image de $H^1(U_1)$ comme axe des abscisses. Comme les deux applications $H^1(U_i) \to H^1(U_{12})$ envoient classe entière sur classe entière, l'image de $H^1(U_2)$ est déterminée par un couple d'entier (a,b) qui est l'image d'un générateur g_2 de $H^1(U_2,\mathbb{Z})$ (par exemple la forme $\frac{1}{l}\mathrm{d}t$ de l'expression (1)). Le couple (a,b) correspond, à un changement de base près, au paramètre (p,q) défini en (2) et caractérisant la topopogie de la variété à partie épaisse fixée. Il est possible que $b=0$, mais comme il n'y a qu'une seule variété (à partie épaisse fixée) vérifiant cette propriété, on peut exclure ce cas sans nuire à la généralité. Si de plus on note $g_1 \in H^1(U_1)$ un élément dont l'image est $(1,0)$, on pose $E = H^1(U_{12})$ et on cherche une section $T : E \to \langle g_1, g_2\rangle$.

La matrice de $\oplus H^1(U_i) \to H^1(U_{12})$ restreinte à $\langle g_1, g_2\rangle$ est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b\end{smallmatrix}\right)$. Celle de T est son inverse

$$T : \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

On veut majorer la norme de T en fonction de celle de sa matrice. Pour cela, on doit contrôler la norme de chaque composante $T_i : H^1(U_{12}) \to H^1(U_i)$ de T en fonction de celle de la colonne de T correspondante. Comme les métriques sur $U_1 = M_a$ et U_{12} sont contrôlées, la norme de $T_1 : H^1(U_{12}) \to H^1(U_1)$ est uniformément majorée. Dans le cas de U_2, on doit estimer la norme de la forme harmonique $\mathrm{d}t$ pour la métrique (8) en fonction de la norme de cette forme en restriction à U_{12}. Or

$$\|\mathrm{d}t\|^2_{U_2} = \int_{U_2} |\mathrm{d}t|^2 \mathrm{d}v_g = \int_{U_2} \cosh^{-2} r \mathrm{d}v_g = 2\pi l \int_0^R \tanh r \mathrm{d}r \tag{27}$$

et

$$\|\mathrm{d}t\|^2_{U_{12}} = \int_{U_{12}} |\mathrm{d}t|^2 \mathrm{d}v_g = 2\pi l \int_{R_a}^R \tanh r \mathrm{d}r, \tag{28}$$

où R_a est la coordonnée du bord de M_a dans la partie mince. R_a dépend de R mais $|R-R_a|$ converge quand $R \to +\infty$, donc il existe une constante $c>0$ telle que $\|\mathrm{d}t\|^2_{U_2}/\|\mathrm{d}t\|^2_{U_{12}} \leq cR$. On obtient donc qu'il existe une constante $c'>0$ telle que

$$C_T \leq c' \max(1, R|\frac{a}{b}|^2) \leq c' R a^2. \tag{29}$$

Pour finir, on remarque que a^2+b^2 est asymptotiquement de l'ordre de $|\mathrm{d}t/l|^2$, cette norme étant calculée le long du bord du tube (c'est-à-dire qu'on prend $r=R$ dans l'expression (1) de la métrique), et donc que $a^2+b^2 \sim l^{-2}e^{-2R}$. On en déduit, en utiliant la relation (3) qu'il existe une constante c''

telle que $a^2 \leq c'' e^{2R}$, et donc $C_T \leq c'c'' R e^{2R}$. En appliquant le lemme 4.1, on obtient l'existence de constantes C_i, $i = 1, 2, 3$ telles que

$$\mu_1(M) \geq \frac{1}{(C_1 + R^2)(C_2 + C_3 R e^{2R})} \tag{30}$$

Le théorème s'en déduit.

On passe maintenant au cas d'un nombre k quelconque de parties minces. L'espace $H^1(U_{12})$ est alors de dimension $2k$, et les images des deux applications $H^1(U_i) \to H^1(U_{12})$ sont de dimension k. On ne peut pas exclure le cas où ces deux images ne sont pas en somme directe (cas $b = 0$ dans ce qui précède). On va donc noter E l'image de $H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \to H^1(U_{12})$ et l sa dimension. On note en outre $g_1, \ldots, g_k$ une base du supplémentaire F de $\mathrm{Ker}(H^1(U_1) \to H^1(U_{12}))$ formée de classes entières, et $g_{k+1}, \ldots, g_{2k}$ des générateurs de chacune des composantes de la partie mince.

On va maintenant écrire la matrice de $F \oplus H^1(U_2) \to E$. La matrice A de $F \to E$ a k colonnes de l lignes, et l'image de chaque g_{k+i} est un vecteur à l composantes qu'on notera B_i. On obtient une matrice de la forme

$$\left(A \middle| B_1 \; B_2 \; \ldots \; B_k \right). \tag{31}$$

Cette matrice à $2k$ colonnes et l lignes, elle n'est donc pas nécessairement carrée. Mais comme l'application $F \to E$ est injective, on peut rendre la matrice (31) carrée et inversible en enlevant $2k - l$ des colonnes B_i. On obtient la matrice

$$P = \left(A \middle| B'_1 \; B'_2 \; \ldots \; B'_{l-k} \right), \tag{32}$$

les vecteurs colonnes $B'_1, \ldots B'_{l-k}$ étant l'image d'une sous familles $g'_1, \ldots g'_{l-k}$ de $g_{k+1}, \ldots g_{2k}$.

On choisit l'application T comme étant l'inverse de celle définie par la matrice P. Elle va donc de E dans $F \oplus \langle g'_1, \ldots g'_{l-k} \rangle$ et sa matrice est P^{-1}. Comme P est à coefficients entiers, que $|\det P| \geq 1$ et que $P^{-1} = (\det P)^{-1} \cdot \overline{P}$ où $\overline{P}$ désigne la comatrice de P, il suffit de majorer la norme de $(\det P) \cdot T$ dont la matrice est $\overline{P}$. Or, les coefficients de $\overline{P}$ sont des polynômes de degré 1 par rapport à chacun des B'_i, on peut donc écrire

$$\|\overline{P}\| \leq c \cdot \prod_{i=1}^{k-l} \|B'_i\|, \tag{33}$$

où c est une constante ne dépendant que de A.

Comme dans le cas $k = 1$, la norme de la composante $T_1 : E \to H^1(U_1)$ est majorée par celle de $\overline{P}$, et chacune des composantes $T'_i : E \to \langle g'_i \rangle$ est majorée par $c' R^{1/2} \|\overline{P}\|$ où c' ne dépend que de la topologie de la partie épaisse. Pour finir, toujours comme dans le cas $k = 1$, la norme $\|B'_i\|$ est majorée par $c'' e^{R_i}$, où R_i est le rayon de la partie mince correspondante.

On obtient finalement que

$$C_T \leq CR\|\overline{P}\|^2 \leq C'Re^{2(k-l)R}, \tag{34}$$

où C et C' ne dépendent que de la topologie de la partie épaisse. On conclut ensuite comme dans le cas $k = 1$. □

Démonstration du théorème 1.3. — Si la variété M a plusieurs cusps, on commence par tous les remplir sauf un en utilisant le théorème de Thurston ([13], théorème 4.A) et on note M' la variété obtenue. Un remplissage du dernier cusp est alors paramétré par un élément $(p,q) \in \mathscr{P}$ auquel correspond un élément (a,b) de $H^1(T^2)$ comme sur la figure 1.

On peut alors appliquer les résultats de la démonstration précédente à la variété compacte M'' ainsi obtenue en remplaçant $M''_{c_\mathcal{M}}$ (resp. M''_a), par le même domaine de M'' auquel on ajoute les composantes de la parties minces obtenues par le remplissage des premiers cusps. En particulier, si on choisit $|b| \geq R|a|$, l'inégalité (29) donne une majoration uniforme de C_T, auquel cas la minoration (25) s'applique à la première valeur propre.

Il suffit donc de choisir une suite M_i de variétés données par la suite $(a_i, b_i) = (1, i)$. Pour i assez grand la variété M_i est bien hyperbolique, on a $a_i^2 + b_i^2 \sim e^{2R}$ donc $b_i \sim e^R$ et la condition $|b| \geq R|a|$ est bien vérifiée. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Benedetti & C. Petronio – *Lectures on hyperbolic geometry*, Universitext, Springer, 1992.

[2] R. Bott & L. W. Tu – *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Math., vol. 82, Springer, 1982.

[3] P. Buser, B. Colbois & J. Dodziuk – « Tubes and eigenvalues for negatively curved manifolds », *J. Geom. Anal.* **3** (1993), p. 1–26.

[4] S. Chanillo & F. Treves – « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian », *J. Differential Geom.* **45** (1997), p. 273–287.

[5] I. Chavel & J. Dodziuk – « The spectrum of degenerating hyperbolic 3-manifolds », *J. Differential Geom.* **39** (1994), p. 123–137.

[6] B. Colbois & G. Courtois – « Les valeurs propres inférieures à $\frac{1}{4}$ des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité », *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), p. 349–362.

[7] ______, « A note on the first nonzero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms », *Manuscripta Math.* **68** (1990), p. 143–160.

[8] ______, « Convergence de variétés et convergence du spectre du Laplacien », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **24** (1991), p. 507–518.

[9] J. Dodziuk – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. Amer. Math. Soc.* **85** (1982), p. 437–443.

[10] ———, « A lower bound for the first eigenvalue of a finite-volume negatively curved manifold », *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **18** (1987), p. 23–34.

[11] J. Dodziuk & J. McGowan – « The spectrum of the Hodge Laplacian for a degenerating family of hyperbolic three manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), p. 1981–1995.

[12] J. Dodziuk & B. Randol – « Lower bounds for λ_1 on a finite-volume hyperbolic manifold », *J. Differential Geom.* **24** (1986), p. 133–139.

[13] M. Gromov – « Hyperbolic manifolds (according to Thurston and Jørgensen) », in *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, Lecture Notes in Math., vol. 842, Springer, 1981, p. 40–53.

[14] P. Jammes – « Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores », prépublication http://math.unice.fr/~pjammes/publications/vol04.pdf, 2004.

[15] ———, « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), p. 521–537.

[16] T. Mantuano – « Discretization of Riemannian manifolds applied to the Hodge Laplacian », *Amer. J. Math.* **130** (2008), p. 1477–1508.

[17] J. McGowan – « The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.* **297** (1993), p. 725–745.

[18] F. Pfäffle – « Eigenvalues of Dirac operators for hyperbolic degenerations », *Manuscripta Math.* **116** (2005), p. 1–29.

[19] R. Schoen – « A lower bound for the first eigenvalue of a negatively curved manifold », *J. Differential Geom.* **17** (1982), p. 233–238.

[20] M. E. Taylor – *Partial differential equations. I*, Applied Mathematical Sciences, vol. 115, Springer, 1996.

[21] W. P. Thurston – *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, Princeton Mathematical Series, vol. 35, Princeton Univ. Press, 1997.