Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INDUCTION AUTOMORPHE GLOBALE POUR LES CORPS DE NOMBRES

Guy Henniart

Tome 140
Fascicule 1

2012

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-17

Bull. Soc. math. France
140 (1), 2012, p. 1–17

INDUCTION AUTOMORPHE GLOBALE POUR LES CORPS DE NOMBRES

PAR GUY HENNIART

RÉSUMÉ. — Soit F un corps de nombres et soit E une extension cyclique de F, de degré d. L'induction automorphe associe à une représentation automorphe cuspidale τ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale. La représentation π est caractérisée par le fait qu'à presque toute place v de F, le facteur $L(\pi_v, s)$ est le produit des facteurs $L(\tau_w, s)$, w parcourant les places de E au–dessus de v. Par la correspondance conjecturale de Langlands, cette opération doit correspondre à l'induction, de E à F, des représentations galoisiennes.

Nous prouvons l'existence de l'induite automorphe π de τ, et étudions les fibres et l'image de ce processus d'induction. Pour cela nous utilisons et étendons les résultats d'Arthur et Clozel sur le processus de changement de base, qui correspond à la restriction de E à F des représentations galoisiennes, et nous précisons le lien entre ces deux processus. De plus, nous prouvons que l'opération d'induction automorphe globale est compatible aux places finies à l'opération locale construite par R. Herb et l'auteur.

ABSTRACT (*Global automorphic induction for number fields*). — Let F be a number field, E a finite cyclic extension of F, d its degree. Automorphic induction associates to a cuspidal automorphic representation τ of $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ an automorphic representation π of $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induced from cuspidal, and characterized by the fact that at almost all places v of F, the factor $L(\pi_v, s)$ is the product of the factors $L(\tau_w, s)$, where w runs through the places of E above v. By the correspondence conjectured by Langlands, that process should correspond to inducing Galois representations from E to F.

We prove here that the representation π automorphically induced from τ exists, and we study the fibres and the image of automorphic induction. For that we use

Texte reçu le 12 janvier 2009, révisé et accepté le 13 mars 2009.

GUY HENNIART, Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay Cedex 91405 France • *E-mail :* `Guy.Henniart@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E55, 22E50.

Mots clefs. — Représentations automorphes, conjectures de Langlands, changement de base, induction automorphe.

and extend the results of Arthur and Clozel on base change, which corresponds to restricting Galois representations from F to E, and we clarify the relations between the two processes. Moreover we prove that global automorphic induction is compatible, at finite places, with the local automorphic induction defined by R. Herb and the author.

1. Introduction

1.1. — Soient F un corps de nombres, E une extension cyclique de F, d le degré de E sur F. Arthur et Clozel [1] ont établi un processus de changement de base, de F à E, qui à une représentation automorphe cuspidale unitaire π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ associe une représentation automorphe $\pi_{E/F}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, de sorte qu'en presque toute place w de E, le facteur L de $\pi_{E/F}$ en w soit le produit des facteurs $L(\chi\pi_v,\ s)$, où v est la place de F au–dessous de w et où χ parcourt les caractères de $F_v^\times$ triviaux sur les normes de $E_w^\times$.

Dans ([1], chap. III), Arthur et Clozel déterminent l'image et les fibres du changement de base, au moins quand le degré d est un nombre premier.

Nous voulons étudier ici le processus en sens inverse, dit d'induction automorphe, qui à une représentation automorphe cuspidale unitaire τ de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ associe une représentation automorphe $\pi = \tau^{E/F}$ de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, de sorte que pour presque toute place v de F le facteur $L(\pi_v, s)$ soit le produit des facteurs $L(\tau_w, s)$, w parcourant les places de E au–dessus de v.

1.2. — L'existence de ces deux processus se prévoit facilement par l'heuristique de Langlands, dans laquelle les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ correspondent à des représentations galoisiennes de dimension n. Pour être plus précis, les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ qui sont algébriques aux places infinies au sens de Clozel [2] doivent correspondre à des représentations ℓ–adiques de dimension n du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ – où $\overline{F}$ est une clôture algébrique de F –, les représentations automorphes cuspidales correspondant à des représentations irréductibles de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Si E est une extension finie quelconque de F dans $\overline{F}$, et d son degré, alors $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ est un sous–groupe ouvert d'indice d de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. La restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ d'une représentation ℓ–adique de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ donne une représentation ℓ–adique de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$, tandis que l'induction à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ d'une représentation ℓ–adique de dimension m de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ donne une représentation ℓ–adique de dimension md de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.

Le processus de changement de base pour les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est le pendant du processus de restriction des représentations ℓ–adique de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$: la condition sur les facteurs L reflète précisément le comportement de la restriction aux places non ramifiées. De même le processus d'induction automorphe est le pendant du processus d'induction des représentations galoisiennes, d'où son nom ; la condition sur les facteurs L reflète également le comportement de l'induction galoisienne aux places non ramifiées.

1.3. — Il faut noter que le changement de base n'est pas établi pour toutes les extensions finies E de F : le cas connu où E/F est cyclique permet de traiter celui où E est une extension galoisienne de F à groupe de Galois résoluble ([1], chap. III), mais le cas général est pour l'heure hors d'atteinte. De même, l'induction automorphe ne peut être établie pour l'instant que dans des situations d'inductions cycliques successives.

1.4. — Pour E/F cyclique le changement de base est obtenu par comparaison de deux formules des traces, l'une pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, l'autre pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ mais « tordue » par l'action d'un générateur σ de $\mathrm{Gal}(E/F)$. L'induction automorphe, toujours pour E/F cyclique, doit s'obtenir également par comparaison de deux formules des traces, l'une pour $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, l'autre pour $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}/F)$, mais « tordue » par l'action d'un caractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ qui définisse l'extension E/F. C'est d'ailleurs par la comparaison de telles formules des traces que les théories locales du changement de base ([1, chap. I]) et de l'induction automorphe [5], ont été construites. Cependant les formules des traces de [5] sont utilisées dans des cas particuliers où elles ont une écriture et une démonstration relativement simples. Ce n'est pas le cas des formules établies dans ([1], chap. II) pour le changement de base. Nous avons reculé pour l'instant devant la tâche d'utiliser les travaux ultérieurs d'Arthur : l'induction automorphe peut s'interpréter en termes d'endoscopie.

1.5. — Plus simplement, nous déduisons ici la construction et les propriétés de l'induction automorphe cyclique, de celles du changement de base. Du point de vue de l'heuristique de Langlands, nous utilisons un procédé de « descente galoisienne ». Plus précisément, si ρ est une représentation ℓ–adique de dimension m de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$, son induite σ à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, qui est de dimension md, est stable par torsion par les caractères de $\mathrm{Gal}(E/F)$, et la restriction de σ à $\mathrm{Gal}(\overline{F}/E)$ est la somme des conjugués de ρ par le groupe cyclique $\mathrm{Gal}(E/F)$. De plus on voit facilement que ces deux propriétés caractérisent σ.

Si τ est une représentation automorphe cuspidale (unitaire) de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, on va donc tenter de définir son induite automorphe $\pi = \tau^{E/F}$ comme la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, qui est stable par torsion par les caractères de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ définissant E/F et dont le changement de base à $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_E)$ est l'induite parabolique de $\otimes_g \tau^g$, g parcourant $\mathrm{Gal}(E/F)$.

1.6. — Pour démontrer l'existence et l'unicité de $\pi = \tau^{E/F}$, et obtenir les propriétés du processus ainsi obtenu, il nous faut connaître complètement les fibres et l'image du changement de base. On sait que les résultats de ([1], chap. III) dans le cas où d est premier ne permettent pas d'atteindre le cas général par descentes galoisiennes successives de degré premier [10], du moins sans travail supplémentaire. C'est pourquoi dans un premier temps, nous reprenons les arguments de ([1], chap. III) pour les compléter en traitant le cas d'une extension cyclique E/F de degré quelconque. Puis nous en déduisons le cas de l'induction automorphe.

Nous énonçons maintenant nos résultats. On fixe une extension cyclique E/F, de degré d, un générateur σ du groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ et un générateur κ du groupe X des caractères de $\mathbb{A}_F^\times$ triviaux sur $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$.

1.7. — Commençons par le changement de base. Si π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, on dit qu'une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, est un changement de base de π (de F à E) si les conditions sur les facteurs L de (1.1) sont vérifiées. Par le théorème de rigidité de Jacquet et Shalika ([7], Theorem 4.4), Π est alors unique à isomorphisme près, et on parlera donc du changement de base Π de π, qu'on pourra noter $\pi_{E/F}$. Par les conditions de (1.1), on voit que Π est stable par l'action de Γ.

On a la compatibilité évidente à l'induction parabolique. Si $n_1, \dots, n_r$ sont des entiers ≥ 1 de somme n, et que pour $i = 1, \dots, r$, π_i est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, on note $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ la représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ obtenue par induction parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$. Si pour $i = 1, \dots, r$, Π_i est un changement de base de π_i, alors $\Pi_1 \times \cdots \Pi_r$ est un changement de base de $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$.

1.8. — Si π est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, on note $X(\pi)$ son stabilisateur dans X, $d(\pi)$ le cardinal de $X(\pi)$. Bien sûr $d(\pi)$ divise d, mais en regardant les caractères centraux on voit que $d(\pi)$ divise aussi n.

Théorème 1. — *Soit π une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, et posons $\delta = d(\pi)$, $n = \delta r$. Alors π possède un changement de base Π, qui est de la forme $\Pi_1 \times \Pi_1^\sigma \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{\delta-1}}$, où Π_1 est une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_E)$, dont le stabilisateur dans Γ est engendré par σ^δ. Les représentations automorphes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induites de* *cuspidale unitaire, dont le changement de base est* Π *sont les tordues de* π *par les caractères de* X.

Ce théorème entraîne que toute représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, a un changement de base. On décrit en 2.5 les fibres du processus ainsi obtenu.

1.9. — Quant à l'image du processus de changement de base, elle est gouvernée par le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit* Π *une représentation automorphe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, *de la forme* $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{\delta-1}}$, *pour un diviseur* δ *de* d *et* n, *où* Π_1 *est une représentation automorphe cuspidale unitaire de* $\mathrm{GL}_{n/\delta}(\mathbb{A}_E)$, *dont le stabilisateur dans* Γ *est engendré par* σ^δ. *Alors* Π *est le changement de base d'une représentation automorphe cuspidale unitaire de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$.

On en tire en particulier que toute représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, qui est stable par σ, est un changement de base (2.5).

1.10. — Les théorèmes 1 et 2 acquis, nous pouvons alors procéder par descente galoisienne pour obtenir l'induction automorphe.

Si τ est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, on dit qu'une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, est induite automorphe de τ (dans l'extension E/F) si les conditions sur les facteurs L de (1.1) sont satisfaites. Par rigidité, π est alors unique à isomorphisme près, et on peut parler de l'induite automorphe de τ, et la noter $\tau^{E/F}$. Par les conditions de (1.1), π est stable par torsion par κ.

THÉORÈME 3. — *Soit* τ *une représentation automorphe de* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, *induite de cuspidale unitaire. Il existe une représentation automorphe* π *de* $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, *induite de cuspidale unitaire, qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) *le changement de base de* π *est* $\tau \times \tau^\sigma \times \cdots \times \tau^{\sigma^{d-1}}$;
(ii) π *est stable par torsion par* κ.

La représentation π *est unique à isomorphisme près, et est induite automorphe de* τ.

On décrira aussi les fibres et l'image du processus d'induction automorphe ainsi obtenu (2.7).

1.11. — Comme nous l'avons rappelé plus haut, une théorie locale du changement de base cyclique est établie dans ([1], chap. I) pour les corps locaux de caractéristique nulle ; cette version est étendue aux corps locaux de caractéristique non nulle dans [6, chap. II].

Plus précisément, si L/K est une extension cyclique de corps locaux, la théorie du changement de base, de L à K, associe à toute classe d'isomorphisme π de représentations unitaires irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_n(K)$, une classe d'isomorphisme $\pi_{L/K}$ de représentations unitaires irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_n(L)$. Les représentations π et $\pi_{L/K}$ vérifient une identité de caractères, l'identité de Shintani ([1], [chap. 1, def. 6.1), qui détermine $\pi_{L/K}$ à partir de π. De plus l'on sait que par la correspondance de Langlands, ce processus traduit la restriction au groupe de Weil–Deligne de L des représentations de dimension n du groupe de Weil–Deligne de κ [3]. La théorie s'étend de façon simple aux cas d'une algèbre cyclique L sur un corps local K (cf. [9], § 9, et [6, chap. II]).

1.12. — De façon analogue, une théorie de l'induction automorphe locale a été établie pour les extensions cycliques de corps locaux non archimédiens, ou plus généralement pour une algèbre cyclique L sur un corps local non archimédien K ([5] et [6, chap. III et IV]). Plus précisément, cette théorie associe à toute classe d'isomorphisme τ de représentations unitaires irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_m(L)$ une classe d'isomorphisme $\tau^{L/K}$ de représentations unitaires irréductibles génériques de $\mathrm{GL}_{md}(K)$, où d est le degré de L sur K. Les représentations τ et $\tau^{L/K}$ sont reliées par une identité de caractères [5, § 4] qui détermine $\tau^{L/K}$ à partir de τ. De plus, quand L est une extension cyclique de K, l'on sait que ce processus correspond bien, par la correspondance de Langlands, à l'induction de K à L des représentations de dimension m du groupe de Weil–Deligne de L [3, 4].

1.13. — Il convient alors d'étudier les liens entre les processus locaux de changement de base et d'induction automorphe, ainsi que la compatibilité de ces processus locaux aux processus globaux.

En ce qui concerne le changement de base, la compatibilité locale–globale est connue si d est un nombre premier ([1], chap. I, p. 69 et chap. III § 5). Nous étendons les arguments de loc. cit. pour obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit π une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, et soit Π son changement de base de F à E. Soit v une place de F, et voyons l'algèbre $E_v = E \otimes_F F_v$ comme une F_v–algèbre cyclique de groupe Γ. Alors la représentation Π_v de $\mathrm{GL}_n(E_v)$ est le changement de base de π_v.*

Remarque. — La dernière assertion équivaut au fait que pour chaque place w de E au–dessus de v, π_w est le changement de base de π_v, pour l'extension cyclique E_w/F_v.

1.14. — Nous démontrons aussi l'analogue de ce résultat pour l'induction automorphe.

Théorème 5. — *Soit τ une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$, induite de cuspidale unitaire, et soit $\pi = \tau^{E/F}$ l'induite automorphe de τ. Soit v une place* finie *de F. Alors π_v est l'induite automorphe (locale) de la représentation τ_v de $\mathrm{GL}_m(E_v)$.*

Remarque. — 1) Pour un corps global de caractéristique non nulle, les énoncés analogues aux théorèmes 4 et 5 sont établis dans [4].

2) La preuve du théorème 5 s'étend directement au cas d'une place infinie de F, aussitôt la théorie de l'induction automorphe établie pour les corps archimédiens [4].

1.15. — En fait, étant donnée la construction de l'induction automorphe globale, le théorème 5 découlera du théorème 4 et de la compatibilité des processus locaux de changement de base et d'induction automorphe.

Théorème 6. — *Soit v une place finie de F, et soit τ une représentation lisse irréductible, générique et unitaire de $\mathrm{GL}_m(E_v)$. Alors il existe une représentation lisse irréductible générique unitaire π de $\mathrm{GL}_{md}(F_v)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *le changement de base de π (pour l'algèbre cyclique E_v/F_v) est $\tau \times \tau^{\sigma} \times \cdots \tau^{\sigma^{d-1}}$.*

(ii) *π est stable par torsion par κ_v.*

La représentation π est unique à isomorphisme près, et est induite automorphe de τ.

1.16. — Grosso modo nous démontrons nos résultats dans l'ordre indiqué. Au chapitre 2 nous généralisons les considérations de ([1], chap. III) au cas cyclique de degré non nécessairement premier, pour obtenir les théorèmes 1 et 2 et la description générale de l'image et des fibres du changement de base. Nous en tirons aussi le théorème 3, et décrivons l'image et les fibres de l'induction automorphe. Le chapitre 3 est consacré à la preuve des théorèmes 4 à 6.

Le lecteur aura remarqué, comme le rapporteur l'a noté, que nous n'avons pas rappelé les identités de caractères précises qui déterminent les processus locaux de changement de base ou d'induction automorphe. Le point est que ces relations ne nous servent pas ici. Dans les arguments du chapitre 3, de nature locale–globale, nous utilisons seulement que ces processus peuvent être définis de manière locale, et que dans certaines circonstances déjà établies ([1, chap. I], [5]), ils sont compatibles aux processus globaux.

1.17. — Cet article est écrit lors d'un congé pour recherches accordé par l'Université Paris–Sud. Je voudrais remercier I. Badulescu, L. Clozel, B. Lemaire et F. Shahidi pour des discussions relatives à cet article. Je remercie également le rapporteur pour ses remarques perspicaces.

1.18. — Dans la suite, on garde la situation précédente. Ainsi F est un corps de nombres, E une extension cyclique de F, de degré d. On pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ et on fixe un générateur σ de Γ ; on note X le groupe des caractères de $\mathbb{A}_F^\times$ triviaux sur $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times)$ et on en fixe un générateur κ. On note $|\ |_F$ la valeur absolue adélique sur $\mathbb{A}_F$.

Si v est une place de F, on pose $E_v = E \otimes_F F_v$; c'est le produit des complétés E_w quand w parcourt les places de E au–dessus de w, et c'est une F_v–algèbre cyclique de groupe Γ. On utilise les notations habituelles pour les corps locaux non archimédiens.

Les entiers m et n, strictement positifs, sont généralement considérés comme fixés. Les représentations automorphes que nous considérons sont en général unitaires, mais nous précisons toujours ce point, pour la commodité du lecteur.

2. Changement de base et induction automorphe

2.1. — Dans ce chapitre, nous reprenons les arguments de ([1], chap. III) pour prouver les théorèmes 1 et 2. Ces arguments comportent deux aspects : une comparaison de formules des traces d'une part, et des considérations de pôles de fonctions L de paires d'autre part. Alors que ces deux aspects sont entrelacés dans [loc. cit], nous nous efforçons ici de séparer leur rôle, ce qui, outre l'avantage de la clarté, permet de généraliser les résultats de [loc. cit.] à tout degré d.

Nous considérons principalement ici des représentations automorphes induites de cuspidale unitaire au sens de [loc. cit., chap. II, def. 4.1]. Rappelons qu'une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est dite *induite de cuspidale unitaire* si elle est obtenue par induction parabolique d'une représentation automorphe cuspidale unitaire τ d'un sous–groupe de Levi de GL_n. Un tel sous–groupe de Levi est isomorphe à $\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}$, où $n_1 + \cdots + n_r = n$, et τ est de la forme $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ où pour $i = 1, \ldots, r$, π_i est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_F)$. On note en ce cas $\pi = \pi_1 \times \cdots \pi_r$ et on dit que $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ est le *support cuspidal* de π ; ce support cuspidal est bien défini à isomorphisme et permutation des facteurs près [loc. cit., chap. III, 2.4]. Ce résultat d'unicité découle de considérations de fonctions L de paires, et les mêmes raisonnements donnent aussi le phénomène de rigidité : si π' est une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, et telle que π'_v soit isomorphe à π_v pour presque toute place v de F, alors π' est isomorphe à π.

REMARQUE. — En une place v de F, le composant π_v de π est générique et unitaire. Ecrivant $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ comme plus haut, π_v est l'induite parabolique $\pi_{1,v} \times \cdots \times \pi_{r,v}$, dont on sait qu'elle est irréductible. Par [8], on voit que pour que le phénomène de rigidité ci–dessus soit valide, il n'est pas nécessaire que la représentation automorphe π' soit induite de cuspidale unitaire.

Noter que pour les places finies, la classification des représentations lisses irréductibles génériques est due à Zelevinsky [13, § 9], et celle des représentations lisses irréductibles unitaires à Tadić [12].

2.2. — Cependant, les représentations automorphes qui peuvent intervenir dans la formule des traces – ou plutôt sa partie discrète, qui est la seule qui joue un rôle dans ([1], chap. III) – ne sont pas toutes induites de cuspidale.

Nous dirons qu'une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ est *discrète* si elle intervient dans la partie discrète de $L^2(\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F), \omega)$ pour une caractère unitaire ω de $\mathbb{A}_F^\times$ trivial sur $F^\times$. Mœglin et Waldspurger [11] ont classifié les représentations discrètes en termes de représentations automorphes cuspidales unitaires. Plus précisément, si π est une représentation automorphe discrète de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, il existe un diviseur r de n, $n = rs$, et une représentation automorphe cuspidale unitaire σ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_F)$, tels qu'à toute place v de F le composant π_v soit l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique

$$\rho_v \mid \mid_v^{(s-1)/2} \times \cdots \times \rho_v \mid \mid_v^{(1-s)/2} .$$

En particulier, si v est finie et que ρ_v est non ramifiée, paramétrée par une matrice diagonale A_v de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, alors π_v est paramétrée par la matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonale par blocs $A_v\ q_v^{(1-s)/2}, \ldots, A_v\ q_v^{(1-v)/2}$ (ici $\mid\,\mid_v$ désigne la norme de F_v, et q_v le cardinal du corps résiduel de O_{F_v}). Remarquons que tous les composants locaux de ρ sont génériques et unitaires ce qui dans le cas précédent implique que les valeurs propres α de A_v vérifient $q_v^{-1/2} < |\alpha| < q_v^{1/2}$: on voit donc que l'entier r est déterminé par π. Mais des arguments de fonctions L de paires prouvent que π détermine aussi ρ à isomorphisme près. Il s'ensuit également que les représentations discrètes vérifient le phénomène de rigidité.

En fait les représentations automorphes qui interviennent dans la partie discrète de la formule des traces de ([1], chap. II) sont induites de série discrète : remplacer, dans la définition de 2.1, « cuspidale unitaire » par « discrète ». Les induites de série discrète vérifent également le phénomène de rigidité.

2.3. — Nous démontrons les théorèmes 1 et 2 par récurrence sur n, le cas $n = 1$ découlant de la théorie globale du corps de classes.

Tout d'abord, une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ induite de cuspidale unitaire possède un changement de base : pour π cuspidale, cas où l'on se restreint aussitôt, cela est prouvé dans [loc. cit., chap. III, Thm. 4.2]. La démonstration pp. 203–204 (preuve du Thm. 4.2(a)) n'utilise pas que d est premier : le point important est qu'à cause du phénomène de rigidité π intervient dans la formule des traces pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ avec un coefficient non nul. (Bien sûr, on peut obtenir le résultat pour d quelconque à partir du cas où d est premier, par extensions successives de degré premier ; mais cela ne vaudrait pas pour le cas qui va suivre).

En sens inverse, soit Π une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ de la forme $\Pi_1 \times \Pi_1^{\sigma} \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{\delta-1}}$ où δ est un diviseur de d et n, Π_1 étant une représentation cuspidale automorphe unitaire de $\mathrm{GL}_{n/\delta}(\mathbb{A}_E)$, de stabilisateur dans Γ engendré par σ^{δ}. Alors la preuve du Thm. 4.2(e) dans [loc. cit., pp. 207–209] s'applique et donne que π est un changement de base : il suffit de prendre δ à la place de l'entier ℓ de [loc. cit.].

Remarque. — Au début de leur preuve, Arthur et Clozel notent que $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_1^{\sigma^{\delta-1}}$ donne une contribution non nulle à la formule des traces tordues. Il convient de remarquer qu'à cause du phénomène de rigidité cette contribution ne peut être annulée par aucune autre.

2.4. — Nous pouvons maintenant compléter la démonstration des théorèmes 1 et 2, en utilisant comme dans [loc. cit.] les fonctions L de paires. Rappelons que X désigne le groupe des caractères de $\mathbb{A}_F^{\times}$ triviaux sur $F^{\times} N_{E/F}(\mathbb{A}_E^{\times})$.

Soit d'abord π une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ et soient $\delta = d(\pi)$, $n = \delta r$. Soit Π le changement de base de π et $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_t$ son support cuspidal ; comme Π est stable par σ, $\Pi_1^{\sigma} \otimes \cdots \otimes \Pi_t^{\sigma}$ est isomorphe à $\Pi_1 \otimes \cdots \otimes \Pi_t$, à l'ordre près des facteurs. Soit ε le diviseur de d tel que le stabilisateur de Π_1 dans Γ soit engendré par σ^{ε} ; on peut alors supposer $\Pi_i = \Pi_1^{\sigma^{i-1}}$ pour $i = 1, \ldots, \varepsilon$. Il s'agit de prouver que $\varepsilon = \delta = t$. Supposons d'abord $\varepsilon < t$. Alors $\Pi' = \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{\varepsilon-1}}$ est, par l'hypothèse de récurrence, le changement de base d'une représentation automorphe cuspidale unitaire π' de $\mathrm{GL}_{n'}(\mathbb{A}_F)$ pour un entier $n' < n$. Si S est un ensemble fini de places de F, assez grand, on a l'égalité

$$L^S(\Pi \times \Pi'^{\vee},\ s) = \prod_{\chi \in X} L^S(\chi\pi \times \pi'^{\vee},\ s)\,.$$

Mais le facteur de gauche a un pôle d'ordre au moins ε en $s = 1$, tandis que celui de droite n'en a pas. Ainsi on a bien $\varepsilon = t$, et on considère alors l'égalité

$L^S(\Pi \times \Pi^\vee,\ s) = \prod_{\chi \in X} L^S(\chi\pi \times \pi^\vee,\ s)$: le membre de gauche a un pôle d'ordre ε en $s = 1$ et celui de droite un pôle d'ordre δ, d'où $\varepsilon = \delta$.

Soit π' une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, et de même changement de base que π ; soit $\pi'_1 \otimes \cdots \otimes \pi'_t$ le support cuspidal de π'. Alors Π est isomorphe à $\Pi'_1 \times \cdots \times \Pi'_t$ où pour $i = 1, \ldots, t$ Π'_i est le changement de base de π'_i ; regardant l'action de Γ, cela implique déjà $t = 1$: ainsi π' est cuspidale et l'égalité

$$L^S(\Pi \times \Pi^\vee,\ s) = \prod_{\chi \in X} L^S(\chi\pi \times \pi'^\vee,\ s)$$

entraîne que π' est de la forme $\chi\pi$ pour un $\chi \in X$. Bien sûr chaque $\chi\pi$ a pour changement de base Π. Cela prouve le théorème 1.

2.5. — Il nous reste à terminer la preuve du théorème 2. Avec ses notations, nous avons déjà vu en 2.3 que Π est le changement de base d'une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ induite de cuspidale unitaire. Mais alors, vu ce qui précède, le fait que le support cuspidal de Π forme une seule orbite sous Γ implique que π est cuspidale. □

Les mêmes arguments permettent de décrire l'image et les fibres du changement de base, pour les induites de cuspidales unitaires. Voici le résultat.

PROPOSITION. — *Une représentation automorphe* Π *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$*, induite de cuspidale unitaire, est un changement de base si et seulement si son support cuspidal est stable par* Γ*. Si* $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$*, où les* π_i *sont cuspidales unitaires, a* Π *pour changement de base, alors les autres représentations automorphes de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$*, induites de cuspidale unitaire, ayant* Π *pour changement de base, sont les* $\chi_1\pi_1 \times \cdots \times \chi_r\pi_r$*, où les* χ_i *parcourent* X*.*

2.6. — Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 3. Soit ainsi τ une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ induite de cuspidale unitaire, et soit $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ son support cuspidal. Pour $i = 1, \ldots, r$, soit δ_i le diviseur de d tel que le stabilisateur de τ_i dans Γ soit engendré par σ^{δ_i}, et posons $d = \delta_i\ s_i$. Alors le support cuspidal de $\Pi = \tau \times \tau^\sigma \times \cdots \times \tau^{\sigma^{d-1}}$ est formé des orbites des τ_i dans Γ, chacune répétée s_i fois. Si π_i est cette représentation automorphe cuspidale unitaire dont le changement de base est $\tau_i \times \tau_i^\sigma \times \cdots \times \tau_i^{\sigma^{\delta_i - 1}}$, les représentations automorphes π de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induites de cuspidale unitaire, dont le changement de base est Π sont celles qui ont un support cuspidal de la forme

$$\chi_{11}\ \pi_1 \otimes \cdots \otimes \chi_{1s_1}\ \pi_1 \otimes \chi_{21}\ \pi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_{2s_2}\ \pi_2 \otimes \cdots \otimes \chi_{r1}\ \pi_r \otimes \cdots \otimes \chi_{rsr}\ \pi_r$$

où les χ_{ij}, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s_i$ sont dans X. Imposer que π soit stable par X revient à imposer que son support cuspidal le soit, autrement dit que chaque

$\chi\pi_i$ pour $\chi \in X$ apparaisse autant de fois que π_i. Comme le stabilisateur de π_i dans X a pour cardinal δ_i, c'est clairement possible, et détermine le support cuspidal de π à l'ordre près.

Soit v une place finie de F telle que π_v soit non ramifiée. Puisque le changement de base de π est $\tau \times \tau^\sigma \times \cdots \times \tau^{\sigma^{d-1}}$, on a

$$\prod_{\chi \in X} L(\chi_v \pi_v, s) = \prod_{w|v} L(\tau_w \times \tau_w^\sigma \times \cdots \times \tau_w^{\sigma^{d-1}}) = \prod_{w|v} L(\tau_w, s)^d$$

et chacune des représentations τ_w est non ramifiée. Comme π est stable par torsion par κ, on en déduit $L(\pi_v, s) = \prod_{w|v} L(\tau_w, s)$. Cela prouve bien que π est induite automorphe de τ.

2.7. — Comme plus haut, on en tire maintenant l'image et les fibres du processus de changement de base.

PROPOSITION. — *Une représentation automorphe* π *de* $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$*, induite de cuspidale unitaire, est une induite automorphe si et seulement si elle est stable par* X*. C'est l'induite automorphe d'une représentation cuspidale unitaire de* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ *si et seulement si son support cuspidal forme une seule orbite sous* X*. Si* $\tau_1, \ldots, \tau_r$ *sont des représentations automorphes cuspidales unitaires telles que* π *soit l'induite automorphe de* $\tau_1 \times \cdots \times \tau_r$*, alors les représentations automorphes de* $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ *dont l'induite automorphe est* π *sont celles dont le support cuspidal a la forme* $\tau_1^{g_1} \times \cdots \times \tau_r^{g_r}$ *avec* $g_1, \ldots, g_r$ *dans* Γ.

Démonstration. — La stabilité par X est certainement une condition nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit de prouver la seconde assertion. Soit donc π une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, dont le support cuspidal forme une seule orbite sous X. Il existe donc un diviseur s_i de d et une représentation automorphe cuspidale unitaire π_i de $\mathrm{GL}_{md/si}(\mathbb{A}_F)$, dont le stabilisateur dans X est engendré par κ^{s_i}, tels que π soit isomorphe à $\pi_1 \times \kappa\pi_1 \times \cdots \times \kappa^{s_i-1}\pi_1$.

Comme $d(\pi_1) = d/s_i = \delta_i$, le changement de base de π_1 est de la forme $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{\delta_i-1}}$ où Π_1 est une représentation automorphe cuspidale unitaire, de stabilisateur dans Γ engendré par σ^{δ_i}. Le changement de base des $\kappa^a\pi_1$ étant le même, celui de π est bien $\Pi_1 \times \cdots \times \Pi_1^{\sigma^{d-1}}$ et π est l'induite automorphe de Π_1. Il reste à déduire les fibres de l'induction automorphe, i.e. la dernière assertion de la proposition. Certainement, par construction, les représentations de la forme $\tau_1^{g_1} \times \cdots \times \tau_r^{g_r}$ ont même induite automorphe que $\tau_1 \times \cdots \times \tau_r$. Mais le support cuspidal du changement de base de π est

$$\tau_1 \otimes \tau_1^\sigma \otimes \cdots \otimes \tau_1^{\sigma^{d-1}} \otimes \tau_2 \otimes \cdots \otimes \tau_2^{\sigma^{d-1}} \otimes \cdots \otimes \tau_r \otimes \cdots \otimes \tau_r^{\sigma^{d-1}},$$

et si, avec des notations évidentes, π est aussi induite automorphe de $\tau'_1 \times \cdots \times \tau'_s$ alors le support cuspidal du changement de base de π est aussi

$$\tau'_1 \otimes \tau_1'^{\sigma} \otimes \cdot \otimes \tau_1'^{\sigma^{d-1}} \otimes \tau'_2 \otimes \cdots \otimes \tau_2'^{\sigma^{d-1}} \otimes \cdots \otimes \tau'_s \otimes \cdots \otimes \tau_s'^{\sigma^{d-1}} ;$$

il s'ensuit aisément que $s = r$ et que, à permutation près $\tau'_1 \otimes \cdots \otimes \tau'_s$ est de la forme $\tau_1^{g_1} \otimes \cdots \otimes \tau_r^{g_r}$ avec les g_i dans Γ. □

3. Compatibilités

3.1. — Ce dernier chapitre est consacré à la preuve des théorèmes 4 à 6. Le théorème 4 est démontré dans ([1], chap. III, Thm. 5.1) dans le cas où d est premier. Si d n'est pas premier, mais que π est une représentation automorphe cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ telle que $d(\pi) = 1$ – ce qui équivaut au fait que le changement de base Π de π est encore cuspidal – alors la démonstration de [loc. cit. p. 212] se transpose sans changement et donne le résultat. Nous ramenons le cas général à ces cas déjà connus.

Pour cela, on remarque que par construction le changement de base global est transitif : si F' est une extension intermédiaire entre E et F, on a $\pi_{E/F} \simeq (\pi_{F'/F})_{E/F'}$ pour toute représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire. Il suffit de voir qu'il en est de même du changement de base local, le cas général du théorème 4 découlant alors, par extensions cycliques successives de degré premier, du cas où d est premier. (Bien entendu, une fois établi le théorème 4 en général, la transitivité du changement de base local, au moins pour les composants locaux de représentations automorphes induites de cuspidale unitaire, en découle).

Malheureusement, la transitivité du changement de base local ne figure pas explicitement dans ([1], chap. I). Il convient donc de l'établir ici. C'est par ailleurs fort utile.

3.2.

Proposition. — *Soit K un corps commutatif localement compact de caractéristique nulle, et soit L une extension cyclique de K, de groupe Δ. Soit Δ' un sous–groupe de Δ, et K' le sous–corps de L fixé par Δ'. Soit ρ une représentation lisse irréductible générique et unitaire de $\mathrm{GL}_n(K)$, ρ' son changement de base de K à K', ρ'' le changement de base de ρ' de K' à L. Alors ρ'' est aussi le changement de base de ρ de K à L.*

Le cas archimédien est clair : on a alors $|\Delta| \leq 2$. On suppose donc que K est non archimédien.

La représentation ρ est de la forme $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$, où ρ_i est essentiellement de carré intégrable, $\rho_i = \rho_i^\circ \mid |_K^{s_i}$ avec ρ_i° de carré intégrable et $|s_i| < 1/2$. Si, de K à K', ρ_i° a pour changement de base $\rho_i'^\circ$ (qui est tempéré), alors ρ a pour changement de base $\rho' = \rho_i'^\circ|\ |_L^{s_1} \times \cdots \times \rho_r'^\circ|\ |_L^{s_r}$ ([1], chap. 1, § 6.4) et on a un résultat analogue pour ρ''. On est donc réduit au cas où ρ est de carré intégrable. On peut même supposer que ρ est cuspidale unitaire ([1], chap. I, lemma 6.12).

On peut alors choisir une extension cyclique $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ de corps de nombres, de degré $[L:K]$, avec une place finie v de $\mathscr{F}$ donnant un isomorphisme ι de $\mathscr{E}_v/\mathscr{F}_v$ avec L/K. On peut aussi choisir une représentation automorphe cuspidale unitaire τ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathscr{F}})$ dont le composant en v corresponde à ρ via ι. On peut même supposer que le composant de τ en une place finie de $\mathscr{F}$ scindée dans $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ est cuspidal ; cela implique que le changement de base de τ à $\mathscr{E}$, ou à toute extension intermédiaire, est cuspidal. Notons τ' le changement de base de τ à $\mathscr{F}'$, où $\mathscr{F}'$ est l'extension intermédiaire de $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ fixée par Δ' – noter que $\mathscr{E}/\mathscr{F}$ est une extension cyclique de groupe Δ –, et notons τ'' le changement de base de τ' à $\mathscr{E}$, qui est aussi le changement de base de τ à $\mathscr{E}$. Par le cas déjà connu du théorème 4, τ_v' est le changement de base de τ_v dans $\mathscr{F}'_v/\mathscr{F}_v$, τ_v'' celui de τ_v' dans $\mathscr{E}_v/\mathscr{F}'_v$, et également celui de τ_v dans $\mathscr{E}_v/\mathscr{F}_v$. Transportant via ι, on obtient la proposition, ce qui termine aussi la preuve du théorème 4.

3.3. — Passons à la démonstration du théorème 6. Notons qu'il s'agit d'un énoncé local : nous aurions pu remplacer E_v/F_v par une algèbre cyclique L/K quelconque, de groupe Γ, sur un corps commutatif local non archimédien K (de caractéristique nulle). Nous utilisons cette notation et posons $\eta = \kappa_v$.

L'algèbre cyclique L/K apparaît comme un produit de corps $L' \times \sigma L' \times \cdots \times \sigma^{e-1}L'$, où e est un diviseur de d, $d = ed'$, et où L' est une extension cyclique de K, de groupe engendré par $\sigma' = \sigma^e$. Le caractère η définit l'extension L'/K, qui est de degré d'.

Soit τ une représentation lisse irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_m(L)$; il existe des représentations lisses irréductibles génériques unitaires $\tau_1, \ldots, \tau_e$ de $\mathrm{GL}_m(L')$, telles que τ soit isomorphe à $\tau_1 \otimes \tau_2 \circ \sigma^{-1} \otimes \cdots \otimes \tau_e \circ \sigma^{1-e}$. Dire que le changement de base de π, pour l'algèbre cyclique L/K, est $\tau \times \tau^\sigma \times \cdots \times \tau^{\sigma^{d-1}}$ signifie que le changement de base de π, pour l'extension cyclique L'/K, est

$$(\tau_1 \times \tau_1^{\sigma'} \times \cdots \times \tau_1^{\sigma'^{d'-1}}) \times (\tau_2 \times \tau_2^{\sigma'} \times \cdots \times \tau_2^{\sigma'^{d'-1}}) \times \cdots \times (\tau_e \times \tau_e^{\sigma'} \times \cdots \times \tau_e^{\sigma'^{d''-1}})\,.$$

Pour prouver l'existence et l'unicité de π, on est donc ramené au cas où L est une extension cyclique de K. D'autre part l'induite automorphe $\tau^{L/K}$ de τ (pour l'algèbre cyclique L/K) n'est autre que $\tau_1^{L'/K} \times \tau_2^{L'/K} \times \cdots \times \tau_e^{L'/K}$, de sorte que pour démontrer l'égalité $\pi = \tau^{L/K}$ on peut aussi supposer que L est une extension cyclique de K.

3.4. — On suppose donc que L/K est une extension cyclique. L'existence et l'unicité de π découlent alors, comme dans la preuve de théorème 3, de la connaissance de l'image et des fibres du changement de base local, pour les représentations lisses irréductibles génériques unitaires de $\mathrm{GL}_m(K)$. Le théorème 6.2 et la proposition 6.7 de ([1], chap. I) ne traitant que le cas des représentations tempérées, il nous faut maintenant compléter les arguments.

Proposition. — *On suppose que L/K est une extension cyclique de corps locaux non archimédiens.*

(a) *Toute représentation lisse irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_n(L)$ qui est σ–stable est le changement de base d'une représentation lisse irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_n(K)$.*
(b) *Soit ρ une représentation lisse irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_n(K)$, de la forme $\rho_1 \times \cdots \times \rho_r$ où les ρ_i sont essentiellement de carré intégrable. Les représentations lisses irréductibles génériques unitaires de $\mathrm{GL}_n(K)$ ayant même changement de base que ρ sont les représentations $\chi_1\rho_1 \times \cdots \times \chi_r\rho_r$, où les χ_i parcourent les puissances de η.*

3.5. — Prouvons cette proposition. Il est clair qu'un changement de base est σ–stable. En sens inverse soit τ une représentation lisse irréductible générique unitaire de $\mathrm{GL}_n(L)$, que nous écrivons $\tau = \tau_1 \times \cdots \times \tau_r$ où les τ_i sont essentiellement de carré intégrable. Si τ est σ–stable, on peut supposer que les premiers τ_i, disons $\tau_1, \ldots, \tau_k$, forment l'orbite de τ_1 sous l'action de σ ; si $k < r$, alors $\tau_{k+1} \times \cdots \times \tau_r$ est aussi σ–stable. Pour prouver que τ est un changement de base, on peut donc supposer que les τ_i forment une seule orbite sous σ. Par torsion par un caractère non ramifié, on se ramène alors au cas où τ est tempéré, qui est donné par ([1], chap. I, Thm. 6.2). Cela donne (a). Prouvons maintenant (b). Il est clair que les représentations susdites ont même changement de base que ρ. Ecrivons $\rho_i = \rho_i^\circ|\ |_K^{s_i}$ avec ρ_i° de carré intégrable, et notons τ_i° le changement de base de ρ_i°, qui est tempéré. Le changement de base de ρ est alors $\tau_1^\circ|\ |_L^{s_i} \times \cdots \times \tau_r^\circ|\ |_L^{s_r}$. Si une représentation lisse irréductible générique et unitaire ρ' de $\mathrm{GL}_n(K)$ a même changement de base que ρ, on écrit ρ' de la même façon, de sorte qu'avec des notations évidentes on a

$$\tau_1^\circ|\ |_L^{s_1} \times \cdots \times \tau_r^\circ|\ |_L^{s_r} \simeq \tau_1'^\circ|\ |_L^{s_1'} \times \cdots \times \tau_{r'}'^\circ|\ |_L^{s_{r'}'} .$$

On sépare alors suivant les différentes valeurs des s_i et s_i' pour se ramener au cas où ρ est tempérée, qui est donné par [loc.cit. chap. I, propo. 6.7] □

3.6. — Les mêmes arguments que pour le théorème 3 donnent donc l'existence et l'unicité de π dans le théorème 6. Il reste à prouver que π est l'induite automorphe de τ. Nous pouvons continuer à supposer que L/K est une extension cyclique. On se ramène aussitôt au cas où τ est de carré intégrable.

On utilise alors que pour τ de carré intégrable, l'induite automorphe de τ est construite dans [5] par un procédé global. On peut supposer que L/K est l'extension cyclique E_v/F_v – on supposera, pour se conformer à [5], que E/F est déployé aux places infinies – et que τ est le composant local en v d'une représentation automorphe cuspidale unitaire T de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ qui vérifie les autres propriétés imposées par ([5], § 8). Alors $\tau^{L/K}$ est le composant en v de la représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}_{md}(\mathbb{A}_F)$, induite de cuspidale unitaire, qui est l'induite automorphe de T. Par le théorème 3, le changement de base de F à E de Π est $T \times T^{\sigma} \times \cdots \times T^{\sigma^{d-1}}$. Regardant à la place v, on constate que le changement de base de $\tau^{L/K}$, pour l'extension L/K, n'est autre que $\tau \times \tau^{\sigma} \times \cdots \times \tau^{\sigma^{d-1}}$. Comme $\tau^{L/K}$ est stable par torsion par η on a bien $\tau^{L/K} = \pi$.

3.7. — Il ne nous reste qu'à prouver le théorème 5. Mais c'est une conséquence immédiate de la construction de l'induction automorphe globale donnée par le théorème 3, et du théorème 6.

Remarque. — Nous avons établi [4] l'induction automorphe locale dans le cas archimédien, et prouvé l'équivalent du théorème 6. Le théorème 5 est donc valable pour les places infinies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Arthur & L. Clozel – *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Math. Studies, vol. 120, Princeton Univ. Press, 1989.

[2] L. Clozel – « Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité », in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, 1990, p. 77–159.

[3] G. Henniart – « Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), p. 167–187.

[4] ———, « Induction automorphe pour $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ », *J. Funct. Anal.* **258** (2010), p. 3082–3096.

[5] G. Henniart & R. Herb – « Automorphic induction for $\mathrm{GL}(n)$ (over local non-Archimedean fields) », *Duke Math. J.* **78** (1995), p. 131–192.

[6] G. Henniart & B. Lemaire – « Changement de base et induction automatique pour GL_n en caractéristique non nulle », *Mémoires de la S.M.F.* **124** (2011).

[7] H. Jacquet & J. A. Shalika – « On Euler products and the classification of automorphic forms. II », *Amer. J. Math.* **103** (1981), p. 777–815.

[8] R. P. Langlands – « On the notion of an automorphic representation », *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **33** (1979), p. 203–207.

[9] ______, *Base change for* GL(2), Annals of Math. Studies, vol. 96, Princeton Univ. Press, 1980.

[10] E. Lapid & J. Rogawski – « On twists of cuspidal representations of GL(2) », *Forum Math.* **10** (1998), p. 175–197.

[11] C. Mœglin & J.-L. Waldspurger – « Le spectre résiduel de $\mathrm{GL}(n)$ », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1989), p. 605–674.

[12] M. Tadić – « Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case) », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 335–382.

[13] A. V. Zelevinsky – « Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$ », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), p. 165–210.