Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

APPROXIMATIONS RELIÉES À LA COHOMOLOGIE GALOISIENNE

David Harari

Tome 135
Fascicule 4

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 549-563

Bull. Soc. math. France
135 (4), 2007, p. 549–563

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'APPROXIMATION RELIÉES À LA COHOMOLOGIE GALOISIENNE D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE FINI

PAR DAVID HARARI

RÉSUMÉ. — On étudie différentes propriétés d'approximation pour des espaces homogènes X (à stabilisateur fini) de GL_n sur un corps de nombres. On discute également du lien avec le problème de Galois inverse et on établit une formule pour le groupe de Brauer non ramifié de X.

ABSTRACT (*Some approximation properties related to Galois cohomology of a finite algebraic group*)

We prove some results about miscellaneous approximation properties for homogeneous spaces X (with finite stabilizer) of GL_n over a number field. We also discuss a link to the inverse Galois problem and we give a formula for the unramified Brauer group of X.

Soient k un corps de nombres, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et k_v le complété de k en une place v. Si v est une place non archimédienne de k, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de k_v et $\mathbb{F}_v$ son corps résiduel. L'extension maximale non ramifiée de k_v sera notée k_v^{nr}. On appelle $\mu(k)$ le groupe des racines de l'unité appartenant à k.

On considère un k-groupe algébrique fini G. On note $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k et $H^1(k,G) := H^1(\Gamma_k, G(\bar{k}))$ l'ensemble pointé

Texte reçu le 15 février 2007, révisé le 18 septembre 2007

DAVID HARARI, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France
E-mail : David.Harari@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11E72, 11G35.

Mots clefs. — Approximation faible, espace homogène, Groupe de Brauer.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2007/549/$ 5.00

de cohomologie galoisienne associé (cf. [?], I.5). Le but de cet article est d'étudier l'image de l'application diagonale

$$j_S : H^1(k,G) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v,G)$$

en relation avec des propriétés de type « approximation faible » sur le quotient de GL_n par G pour une représentation fidèle de G.

1. Différentes propriétés d'approximation

1.1. Approximation faible et très faible. — On dira que G vérifie la propriété (AF) (pour « approximation faible ») si pour tout ensemble fini S de places de k, l'application diagonale

$$j_S : H^1(k,G) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v,G)$$

est surjective. On dit que G vérifie la propriété (ATF) (pour « approximation très faible ») s'il existe un ensemble fini S_0 de places de k, tel que pour tout ensemble fini de places S disjoint de S_0, l'application j_S soit surjective. Comme on le verra plus bas, ces notions sont liées à des propriétés d'approximation sur une certaine variété algébrique, d'où la terminologie employée ici.

Voici quelques résultats connus concernant ces propriétés :

a) Si G est abélien, alors il vérifie (ATF) et on peut prendre pour S_0 l'ensemble constitué des places de mauvaise réduction de G et des places divisant l'exposant de $G(\bar{k})$ (cf. Neukirch [?]).

b) Pour $k = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{Z}/8$ (vu comme k-groupe constant) et $S = \{2\}$, l'application j_S n'est pas surjective (cf. Wang [?]).

c) Si G est constant (i.e. $G(k) = G(\bar{k})$), résoluble et d'exposant premier au cardinal de $\mu(k)$, alors G vérifie (AF) (cf. Neukirch [?]).

Comme l'a remarqué Colliot-Thélène, la propriété (ATF) pour un groupe constant G implique que G est groupe de Galois sur k. Une légère modification de son argument permet d'obtenir la même conclusion sous une hypothèse plus faible, voir la section 4

Notons aussi qu'on ne connaît aucun k-groupe fini G qui soit un contre-exemple à (ATF). Il semble en tout cas raisonnable de conjecturer que tout k-groupe fini G avec $G(\bar{k})$ résoluble vérifie cette propriété, en accord avec le théorème de Shafarevitch qui dit que tout groupe fini résoluble est groupe de Galois sur k. Le but de cet article est de présenter quelques nouveaux résultats (théorèmes 1 et 2 énoncés plus bas) dans cette direction, en utilisant notamment la notion d' *obstruction de Manin* à l'approximation faible.

1.2. Interprétation géométrique. — Si X est une k-variété, on notera $H^1(X,G)$ l'ensemble de cohomologie, défini via les cocycles de Čech pour la topologie étale (cf. [?], 2.2). Cet ensemble classifie les X-torseurs sous G, et on notera $[Y]$ la classe d'un tel torseur dans $H^1(X,G)$. Rappelons que si X est une k-variété lisse, on dit que X vérifie *l'approximation très faible* (notion due à Serre) s'il existe un ensemble fini de places S_0 de k tel que pour tout ensemble fini S de places de k disjoint de S_0, tout point $(P_v)_{v\in S}$ de $\prod_{v\in S} X(k_v)$ soit dans l'adhérence de $X(k)$ pour la topologie produit. On dit que X vérifie *l'approximation faible* si on peut prendre $S_0=\varnothing$ dans la définition ci-dessus. Les deux propriétés sont invariantes par transformation k-birationnelle entre variétés lisses.

Le lien avec les propriétés correspondantes définies précedemment pour un k-groupe fini G est le suivant. On considère une représentation linéaire fidèle de G, i.e. un morphisme injectif de k-groupes $G\to \mathrm{GL}_n$, et on s'intéresse au quotient $V=\mathbb{A}^n_k/G$ associé. On peut également considérer le quotient GL_n/G, ou encore prendre un plongement de G dans SL_n et le quotient associé SL_n/G. D'après le lemme sans nom (cf. [?], corollaire 3.9), on obtient toujours, à stable équivalence k-birationnelle près, la même k-variété V, et celle-ci ne dépend pas non plus de la représentation fidèle choisie.

D'autre part, si par exemple on travaille avec $X=\mathrm{SL}_n/G$ (la même chose vaut si on remplace SL_n/G par un ouvert lisse de $V=\mathbb{A}^n_k/G$ ou de GL_n/G), alors comme la cohomologie galoisienne de SL_n est triviale (théorème de Hilbert 90) le G-torseur $\mathrm{SL}_n\to\mathrm{SL}_n/G$ est *versel*, au sens de [?], I.5 : cela signifie que pour toute extension de corps K/k, toute classe $\alpha\in H^1(K,G)$, et tout ouvert de Zariski non vide U de SL_n/G, l'application d'évaluation $U(K)\to H^1(K,G)$ qui à P associe $[\mathrm{SL}_n](P)$ est surjective. On en déduit immédiatement le résultat bien connu suivant (cf. [?]) : la surjectivité de $j_S: H^1(k,G)\to \prod_{v\in S} H^1(k_v,G)$ est équivalente à la densité de $X(k)$ dans $\prod_{v\in S} X(k_v)$. Ainsi la propriété que G vérifie (AF) (resp. (ATF)) est équivalente à la propriété analogue pour X (et ceci vaut aussi en remplaçant SL_n/G par tout ouvert lisse de $V=\mathbb{A}^n_k/G$ ou de GL_n/G).

1.3. Lien avec l'obstruction de Manin. — Il va maintenant être utile d'introduire une propriété intermédiaire entre (AF) et (ATF). Si X est une variété lisse et géométriquement intègre sur k, on note $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} X$ son *groupe de Brauer non ramifié* (cf. [?], §5), qui est aussi le groupe de Brauer [(1)] d'une compactification lisse de X. On pose $\overline{X}=X\times_k \bar{k}$. Soit Ω l'ensemble des places de k, puis $j_v:\mathrm{Br}\,k_v\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'invariant local ; on note $X(k_\Omega)=\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$, et $X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$

(1) Dans tout ce texte, groupe de Brauer signifie groupe de Brauer cohomologique.

l'*ensemble de Brauer-Manin* de X, qui est le sous-ensemble de $X(k_\Omega)$ constitué des points $(P_v)_{v\in\Omega}$ qui vérifient

$$\sum_{v\in\Omega} j_v\big(\alpha(P_v)\big) = 0 \tag{1}$$

pour tout élément α de $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X$ (noter que la somme est toujours finie, cf. [?], 5.2). Plus généralement, si C est un sous-groupe de $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X$, on notera $X(k_\Omega)^C$ l'ensemble des points de $X(k_\Omega)$ qui vérifient (1) pour tout α de C. D'après la loi de réciprocité du corps de classes global, l'ensemble $X(k_\Omega)^{\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}}$ contient l'adhérence $\overline{X(k)}$ de $X(k)$ dans $X(k_\Omega)$ pour la topologie produit des topologies v-adiques. Cette loi de réciprocité permet aussi de définir $X(k_\Omega)^C$ quand C est un sous-groupe du quotient $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X/\operatorname{Br} k$, puisque (1) vaut toujours si α est un élément de $\operatorname{Br} k$.

On dira que l'*obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule* pour X si $\overline{X(k)} = X(k_\Omega)^{\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}}$ (cette propriété se conserve également par transformation k-birationnelle entre variétés lisses). Quand $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X/\operatorname{Br} k$ est fini (par exemple si X est $\bar{k}$-unirationnelle), ceci implique que X vérifie l'approximation très faible. On dira qu'un k-groupe fini G vérifie *la propriété (BM)* si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour un ouvert lisse X du quotient $V = \mathbb{A}^n_k/G$ défini comme ci-dessus (ou encore pour GL_n/G ou SL_n/G) , qui est une variété k-unirationnelle. On a donc, pour un k-groupe fini G, les implications suivantes :

$$(AF) \Longrightarrow (BM) \Longrightarrow (ATF).$$

Par exemple quand G est abélien, la variété V est stablement k-birationnelle à un k-tore (cf. [?], th. 1 et rem. p. 85) et G vérifie (BM) d'après [?].

L'interprétation de la propriété (BM) en termes de la cohomologie galoisienne de G est plus compliquée que pour (AF) ou (ATF), et est liée au calcul du sous-groupe $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}1} X = \ker[\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X \to \operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} \overline{X}]$ de $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X$. Voir la section 5 pour un résultat dans cette direction. On ne connaît pas d'exemple de k-groupe fini G qui ne vérifie pas (BM), mais les résultats de la section 5 sembleraient plutôt aller dans le sens de l'existence de ce type de groupes.

1.4. Énoncé des résultats principaux. — Le but de cet article est d'établir que certains groupes G obtenus comme des extensions vérifient (BM). Plus précisément le résultat est le suivant.

Théorème 1. — *Soit*

$$1 \to A \longrightarrow E \longrightarrow G \to 1$$

une extension scindée de k-groupes finis, avec A abélien. Alors :

– *si G vérifie* (BM)*, la même propriété vaut pour E ;*

– *si G vérifie* (ATF), *il en va de même de E.*

On obtient par exemple que la première propriété est vraie pour les groupes diédraux, ou plus généralement pour les groupes qui sont obtenus à partir du groupe trivial par une suite de produits semi-directs par un groupe abélien.

REMARQUE. — L'énoncé du théorème 1 rappelle bien entendu les problèmes dits de plongement (cf. [?], [?]), dans lesquels on se donne une classe g appartenant à $H^1(k, G)$ qu'on essaie de relever en une classe dans $H^1(k, E)$ satisfaisant certaines conditions locales, en supposant que la restriction de g à $H^1(k_v, G)$ provient (pour toute place v) de $H^1(k_v, E)$. La différence est qu'ici on ne fixe pas cette classe g, ce qui fait qu'il y a *a priori* une infinité d'images possibles pour l'image dans $H^1(k, G)$ des classes que l'on cherche dans $H^1(k, E)$. C'est cette difficulté qui rend malaisée l'utilisation directe de la propriété (ATF) et justifie l'introduction de (BM), voir aussi la remarque suivant la preuve du théorème 3.

Nos méthodes permettent également de considérer une action *multiplicative* (voir aussi [?], 8. pour les définitions). On considère ici une action d'un k-groupe fini constant G par automorphismes sur le k-tore déployé $\mathbb{G}_m^r$, et on s'intéresse à la k-variété quotient de $\mathbb{G}_m^r$ par l'action de G. Le résultat est alors le suivant :

THÉORÈME 2. — *Avec les notations ci-dessus :*

– *si G vérifie* (ATF), *alors un modèle lisse X de $V = \mathbb{G}_m^r/G$ vérifie l'approximation très faible ;*
– *si G vérifie* (BM) (*ex. G est abélien*), *alors l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour X.*

REMARQUE. — Déjà avec $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$, il y a dans le cas multiplicatif des exemples (dus à Saltman [?]) où la variété V n'est pas géométriquement rationnelle car le groupe de Brauer non ramifié de $V \times_k \bar{k}$ n'est pas nul (voir [?], 8.12). En particulier V n'est alors pas stablement k-birationnelle à $\mathbf{A}_k^n/G$, dont le groupe de Brauer non ramifié sur $\bar{k}$ est nul via le théorème de Fischer vu que G est ici abélien.

Un ingrédient essentiel dans la preuve de ces résultats va être un théorème sur les variétés fibrées, qui fait l'objet de la section suivante.

2. Un résultat sur les variétés fibrées

On commence par un lemme, très proche d'un résultat d'Ekedahl [?]. On note $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k et $\mathcal{O}_{k,S}$ (pour S fini) l'anneau des entiers en dehors de S.

Si V est une k-variété intègre, un sous-ensemble H de $V(k)$ est dit *hilbertien élémentaire* s'il existe un ouvert de Zariski non vide U de V et un revêtement étale $\rho : U' \to U$ avec U' intègre tel que H soit l'ensemble des k-points de U en lesquels la fibre de ρ est connexe (i.e. intègre puisqu'elle est lisse) ; un sous-ensemble de $V(k)$ est dit *hilbertien* s'il est intersection finie d'ensembles hilbertiens élémentaires.

Lemme 1. — *Soit B une k-variété lisse et géométriquement intègre telle que $B(k_\Omega) \neq \varnothing$. On suppose que B vérifie l'approximation faible en dehors d'un ensemble fini S_0 de places. Soient S un ensemble fini de places (pouvant rencontrer S_0) et $(P_v)_{v\in S}$ une famille de points locaux de B telle que, pour tout ensemble fini de places S_1 disjoint de $(S \cup S_0)$ et toute famille $(M_v)_{v\in S_1}$, la famille $(R_v)_{v\in (S\cup S_1)}$ réunion des P_v et des M_v, soit dans l'adhérence de $B(k)$ pour la topologie produit.*

Alors si H est un sous-ensemble hilbertien de $B(k)$, il existe un point de H arbitrairement proche des P_v pour v dans S.

Nous utiliserons ce lemme dans deux situations :

a) quand S est disjoint de S_0 ;

b) quand l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour B, avec $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, B/\operatorname{Br} k$ fini ; en effet, dans ce dernier cas, on choisit un système de représentants fini E de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, B/\operatorname{Br} k$. Si S_0 contient les places de mauvaise réduction des éléments de E, l'hypothèse est alors vérifiée dès que $(P_v)_{v\in S}$ est la projection d'un point de $B(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ car pour $v \notin S_0$, on a $\alpha(M_v) = 0$ pour tout $\alpha \in E$ et tout $M_v \in B(k_v)$.

Preuve du lemme. — La méthode est exactement celle de [?]. Soit $\rho : U' \to U$ un revêtement étale, (avec U' intègre et ρ galoisien de groupe J) au-dessus d'un ouvert U de B, tel que H contienne l'ensemble des points où la fibre de ρ est connexe. On étend ρ en un revêtement étale $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ de groupe J (avec $\mathcal{U}$ lisse), au-dessus d'un ouvert de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$ contenant $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$. On se ramène comme dans [?], prop. 3.2, au cas où U' est géométriquement intègre : en effet il suffit d'appliquer la méthode ci-dessous en ne choisissant dans S_1 que des places totalement décomposées dans k'/k, où k' est la clôture algébrique de k dans le corps de fonctions $k(U')$ de U'. Il y a un nombre infini de telles places d'après le théorème de Cebotarev.

Alors d'après le lemme principal de [?], presque toute place v de k vérifie : pour chaque classe de conjugaison c de J, il existe un $\mathbb{F}_v$-point $\widetilde{M_v}$ de $\mathcal{U}$, tel que le Frobenius correspondant soit dans la classe c. Par le lemme de Hensel, un tel point se relève en un point M_v de $U(k_v)$.

Soit alors $(P_v)_{v\in S}$ comme dans le lemme. Pour chaque classe de conjugaison de J, choisissons une place v non dans $(S\cup S_0)$ et un point $M_v \in U(k_v)$ correspondant comme ci-dessus. Appelons S_1 l'ensemble des places ainsi obtenues. D'après l'hypothèse, il existe un point rationnel $m\in U(k)$ arbitrairement proche des P_v pour v dans S, et des M_v pour v dans S_1. Mais alors, la fibre de ρ en m est connexe, car pour toute classe de conjugaison c de J, il existe une place v de S_1 tel que le Frobenius de la réduction de m modulo v soit dans c, ce qui implique que le sous-groupe de décomposition de J en m contient au moins un élément dans toutes les classes de conjugaison de J. Or, la réunion des conjugués d'un sous-groupe strict d'un groupe fini ne peut être le groupe tout entier (cf. [?]). Finalement $m\in H$. □

Une étape-clé dans la preuve des théorèmes principaux de cet article est la généralisation suivante du théorème 4.3.1. de [?] (voir aussi [?]) :

Théorème 3. — *Soit $f : Z \to B$ un morphisme dominant de k-variétés lisses et géométriquement intègres, avec $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} B/\operatorname{Br} k$ fini. Soit Z_η la fibre générique, Z_η^c un modèle projectif lisse de Z_η sur le corps des fonctions K de B, $Z_{\overline{K}}^c := Z_\eta^c \times_K \overline{K}$, où $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K. On suppose que Z_η possède un K-point, que $\operatorname{Br} Z_{\overline{K}}^c$ est fini et $\operatorname{Pic} Z_{\overline{K}}^c$ sans torsion (c'est le cas par exemple si Z_η est K-unirationnelle). On fait enfin l'hypothèse que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour les k-fibres de f en dehors d'un ouvert de Zariski non vide de B. Alors :*

1) *Si B vérifie l'approximation très faible, il en va de même de Z.*
2) *Si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour B, alors Z possède cette même propriété.*

Démonstration. — La preuve est calquée sur celle du théorème 4.3.1 de [?] (pour lequel on supposait que B vérifiait l'approximation faible). Pour le confort du lecteur, nous reproduisons ici l'argument. Quitte à restreindre Z et B, on peut supposer que le morphisme f est lisse et que pour toutes ses k-fibres, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule. Les hypothèses sur la fibre générique impliquent que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} Z_\eta/\operatorname{Br} K$ est fini (en effet $\operatorname{Br} Z_{\overline{K}}^c$ est fini et $\ker[\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} Z_\eta/\operatorname{Br} K \to \operatorname{Br} Z_{\overline{K}}^c]$ est isomorphe à $H^1(K, \operatorname{Pic} Z_{\overline{K}}^c)$, cf. [?], 1.5), on en choisit un système de représentants $C\subset \operatorname{Br}(k(Z))$. La fibre générique Z_η possède un K-point m_K, et on peut supposer que $\alpha(m_K)=0$ pour tout α de C, quitte à modifier les éléments de C par des éléments de $\operatorname{Br} K$.

On note $b \mapsto s(b)$ la section $B \to Z$ associée à m_K (on peut la supposer définie sur B tout entier). Enfin on choisit un système de représentants D dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, Z$ du groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, Z/\operatorname{Br} k$; ce dernier groupe est fini car d'une part $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, B/\operatorname{Br} k$ et $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, Z_\eta/\operatorname{Br} K$ sont finis, d'autre part un élément de $\operatorname{Br} K$ dont l'image dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, Z_\eta$ est non ramifiée est lui-même non ramifié via la section s (si R est un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et contenant k, alors la section s s'étend par propreté en une section $\operatorname{Spec} R \to Z'$, ou Z' est un modèle projectif lisse de Z). Fixons un point rationnel θ de Z, on peut supposer que $\beta(\theta) = 0$ pour tout β de D.

D'après le théorème 2.3.1 de [?] (voir aussi [?] pour le cas où $\operatorname{Br} Z^c_{\overline{K}} = 0$), il existe un ensemble hilbertien H de $B(k)$ tel que pour tout point m de H, les spécialisations des éléments de C en la fibre Z_m engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, Z_m/\operatorname{Br} k$. Soit S_0 un ensemble fini de places en dehors duquel B vérifie l'approximation faible, et tel que les éléments d'un système de représentants (fixé) de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, B/\operatorname{Br} k$ soient non ramifiés en dehors de S_0.

Soit alors $(Q_v)_{v\in\Omega}$ dans $Z(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$, qu'on veut approximer en un ensemble fini de places S. D'après le lemme formel 2.6.1 de [?], on peut supposer que $\sum_{v\in S} j_v(\alpha(Q_v)) = 0$ pour tout $\alpha \in C$, quitte à rajouter à S des places qui ne sont pas dans S_0 et à modifier Q_v pour $v \notin S$. La projection $(P_v)_{v\in\Omega}$ de (Q_v) est alors dans $B(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ par fonctorialité. On applique alors le lemme 1. Si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour B, on peut approximer $(P_v)_{v\in S}$ par un point rationnel m de H ; si on suppose juste que B vérifie l'approximation très faible, on peut faire de même à condition de supposer que S est disjoint de S_0.

Maintenant par le théorème des fonctions implicites v-adique, la fibre Z_m possède des points locaux Q'_v proches de Q_v pour v dans S, donc vérifiant $\sum_{v\in S} j_v(\alpha(Q'_v)) = 0$ pour α dans C. On complète (Q'_v) aux places de $\Omega \setminus S$ par la spécialisation $s(m)$ de la section s. On obtient un point de $Z_m(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ car les spécialisations des éléments de C à la fibre Z_m engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, Z_m/\operatorname{Br} k$ et s'annulent en $s(m)$. D'après l'hypothèse sur les k-fibres, ce point peut être approximé par un point rationnel aux places de S.

En résumé, si l'on est dans le cas 2), tout point $(Q_v)_{v\in\Omega}$ de $Z(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ peut être approximé par un point rationnel aux places de S, ce qui prouve 2. Si l'on est dans le cas 1), la même assertion vaut à condition que S ne rencontre pas S_0. Comme il existe un ensemble fini S' de places en dehors duquel les éléments de D sont non ramifiés, tout point $(Q_v)_{v\in S}$ de Z peut être approximé par un point rationnel si S ne rencontre pas $S' \cup S_0$ (on complète (Q_v) par le point rationnel θ aux places de $\Omega \setminus (S_0 \cup S')$ pour obtenir un point de $Z(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$). □

Remarque. — Même pour 1), il ne semble pas possible de relâcher l'hypothèse sur les fibres en supposant juste qu'elles vérifient l'approximation très faible, car on ne contrôle alors plus l'ensemble des mauvaises places, qui peut varier selon les fibres.

Le cas particulier qu'on va notamment utiliser est celui d'une fibration en tores.

COROLLAIRE 1. — *Soit B une k-variété lisse et géométriquement intègre, de corps des fonctions K. Soit $f : \mathcal{T} \to B$ un k-morphisme dominant avec $\mathcal{T}$ lisse et géométriquement intègre. On suppose que la fibre générique $\mathcal{T}_\eta$ de f est un K-tore. Alors si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour B (resp. B vérifie l'approximation très faible), il en va de même de $\mathcal{T}$.*

Démonstration. — Pour un k-tore, on sait (voir [?]) que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule. D'autre part, un k-tore est k-unirationnel, ce qui permet d'appliquer le théorème 3. □

3. Preuves des théorèmes principaux

3.1. Preuve du théorème 1. — On commence par fixer un ouvert de Zariski non vide X' (resp. B') de $\mathbb{A}_k^n$ (resp. $\mathbb{A}_k^m$) sur lequel E (resp. G) agit librement ([?], 4.18). On peut alors prendre $X = X'/E$ et $B = B'/G$. Soit Y le quotient de X' par l'action du sous-groupe A, on a alors $X = Y/G$. On considère Y comme un X-torseur à droite sous G et B' comme un B-torseur à gauche sous G.

On forme le *produit contracté* $Z = Y \times^G B'$: c'est le quotient de $(Y \times B')$ par l'action simultanée (à droite) de G, donnée par $(y, b') \cdot g = (y \cdot g, g^{-1} \cdot b')$, $y \in Y$, $b' \in B'$, $g \in G$. Posons $Y_B = Y \times B$ et $X_B = X \times B$. Soit ξ un cocycle de $Z^1(B, G)$ correspondant à la classe dans $H^1(B, G)$ du torseur $B' \to B$ (qui est *versel* au sens de [?], I.5), et soit ξ_X son image dans $Z^1(X_B, G)$. Alors Z est le *tordu* du G-torseur $Y_B \to X_B$ par ξ_X (cf. [?], ex. 2, p. 20).

On remarque que Z est stablement k-birationnel à $X = Y/G$ car Z est un ouvert de $(Y \times \mathbb{A}_k^m)/G$, qui est un fibré vectoriel au-dessus de X via la première projection, et tout fibré vectoriel est localement trivial pour la topologie de Zariski (je remercie J.-L. Colliot-Thélène pour cet argument). Pour montrer les propriétés d'approximation faible voulues sur X, il suffit donc de le faire pour Z.

Considérons le k-morphisme $f : Z \to B = B'/G$ induit par la deuxième projection. Soit $k(B)$ le corps des fonctions de B, posons $X_{k(B)} = X \times_k k(B)$ et $Y_{k(B)} = Y \times_k k(B)$. Alors la fibre générique Z_η de f est le tordu du torseur $Y_{k(B)} \to X_{k(B)}$ par la restriction [2] $\xi_{k(B)}$ de ξ_B à $Z^1(k(B), G)$. Fixons une

(2) I.e. par son image dans $Z^1(X_{k(B)}, G)$

section $s : G \to E$ de la suite exacte $1 \to A \to E \to G \to 1$ et appelons $c_{k(B)} = s(\xi_{k(B)})$ le cocycle de $Z^1(k(B), E)$ correspondant. Soit $(\mathbb{A}^n_{k(B)})^{c_{k(B)}}$ le tordu de $\mathbb{A}^n_{k(B)}$ par le cocycle $c_{k(B)}$.

Par construction, le tordu $(X'_{k(B)})^{c_{k(B)}}$ de $X' \times_k k(B)$ par $c_{k(B)}$ est un torseur sur $Y^{\xi_{k(B)}}_{k(B)} = Z_\eta$ sous le $k(B)$-groupe tordu ${}_{c_{k(B)}}A$. Ainsi Z_η est un ouvert du quotient de $(\mathbb{A}^n_{k(B)})^{c_{k(B)}}$ par l'action de ${}_{c_{k(B)}}A$. En particulier Z_η est $k(B)$-unirationnelle car $(\mathbb{A}^n_{k(B)})^{c_{k(B)}}$ est $k(B)$-isomorphe à $\mathbb{A}^n_{k(B)}$ d'après le théorème de Hilbert 90. D'autre part, le même argument montre que la fibre en $\theta \in B$ de f s'identifie à un ouvert du quotient de $(\mathbb{A}^n_k)^c \simeq \mathbb{A}^n_k$ par le k-groupe abélien ${}_cA$ (agissant linéairement), où c est la spécialisation en θ du cocycle $s(\xi)$. En particulier l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour toute k-fibre de f. On conclut en appliquant le théorème 3, vu que la k-variété B est k-unirationnelle, donc satisfait $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}} B/\operatorname{Br} k$ fini. □

3.2. Preuve du théorème 2. — Le raisonnement est très similaire à celui du paragraphe précédent. On fixe une représentation linéaire fidèle de G dans GL_m, puis un ouvert de Zariski non vide B' de $\mathbb{A}^m_k$ sur lequel G agit (à gauche) librement, et on note $B = B'/G$ le quotient étale associé. Le fait que G vérifie (ATF) fournit un ensemble fini S_0 de places tel que $H^1(k, G) \to \prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$ soit surjective pour tout S fini disjoint de S_0 ; autrement dit B vérifie l'approximation faible en dehors de S_0 (cf. [?]).

Fixons un ouvert W de $\mathbb{G}^r_m$ sur lequel G agit (à droite) sans point fixe et posons $U = W/G$ (c'est un ouvert lisse de $V = \mathbb{G}^r_m/G$) Soit $\mathcal{T} = \mathbb{G}^r_m \times^G B'$ le *produit contracté* de $\mathbb{G}^r_m$ avec B' : c'est le quotient (étale) de $\mathbb{G}^r_m \times B'$ par l'action diagonale (à droite) de G, définie par $(x, b') \cdot g = (x \cdot g, g^{-1} \cdot b')$. La projection $\mathcal{T} \to B$ fait de $\mathcal{T}$ un B-tore ; d'après le corollaire 1, la k-variété $\mathcal{T}$ vérifie l'approximation très faible, et si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour B, il en va de même pour $\mathcal{T}$.

On a alors à nouveau que la projection $\mathbb{G}^r_m \times^G \mathbb{A}^m_k \to V$ fait de $\mathbb{G}^r_m \times^G \mathbb{A}^m_k$ un fibré vectoriel au-dessus de V, qui est donc localement trivial pour la topologie de Zariski. De ce fait, la k-variété $\mathcal{T}$ est k-birationnelle à $V \times \mathbb{A}^m_k$. Ainsi si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour $\mathcal{T}$ (resp. si $\mathcal{T}$ vérifie l'approximation très faible), il en va de même pour U, qui est un ouvert lisse de V. □

4. Lien avec le problème de Galois inverse

Dans cette section, quand G est un groupe abstrait, il est sous-entendu qu'il est considéré comme k-groupe constant ; dans ce cas $H^1(k, G)$ est l'ensemble des homomorphismes continus de Γ_k dans G modulo conjugaison par un élément de G.

Soit G un k-groupe fini. Il est dit *non ramifié* en une place non archimédienne v de k si l'action du groupe d'inertie en v sur $G(\bar{k})$ est triviale. Il revient au même de dire que $G \times_k k_v$ s'étend en un $\mathcal{O}_v$-schéma en groupes lisse $\mathcal{G}_v$. Dans ce cas, on note $H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, G)$ le sous-ensemble de $H^1(k_v, G)$ qui est l'image de $H^1(\mathrm{Gal}(k_v^{\mathrm{nr}}/k_v), G(\bar{k}))$. C'est aussi l'image de $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}_v)$ dans $H^1(k_v, G)$.

On dira qu'un k-groupe fini G possède la propriété *d'approximation hyper-faible* (AHF) s'il existe un ensemble fini S_0 de places de k tel que pour tout ensemble fini S de places de k disjoint de S_0, l'image de l'application j_S : $H^1(k, G) \to \prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$ contienne $\prod_{v \in S} H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, G)$.

Le résultat ci-dessous généralise la remarque de Colliot-Thélène reliant la propriété (ATF) au problème de Galois inverse :

PROPOSITION 1. — *Soit G un groupe (vu comme k-groupe constant). Supposons que G vérifie l'approximation hyper-faible. Alors G est groupe de Galois sur k.*

Démonstration. — Soit S_0 un ensemble fini de places de k tel que l'image de j_S contienne $\prod_{v \in S} H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, G)$ pour S disjoint de S_0. Soient $c_1, \dots, c_r$ les classes de conjugaisons de G ; pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, choisissons une place v_i de k non dans S_0 et un élément a_i de $H^1_{\mathrm{nr}}(k_{v_i}, G) \simeq \mathrm{Hom}_c(\widehat{\mathbb{Z}}, G)$ dont l'image rencontre c_i, avec les v_i deux à deux distinctes. Par hypothèse il existe a dans $H^1(k, G)$ dont la restriction à chaque $H^1(k_{v_i}, G)$ est a_i. L'élément a définit à conjugaison près un homomorphisme continu de Γ_k dans G ; soient alors $\tilde{a} : \Gamma_k \to G$ un représentant de a et $H \subset G$ son image. Alors la réunion des conjugués de H rencontre toutes les classes c_i, donc est égale à G tout entier. Ceci implique (d'après le lemme classique déjà rencontré) que $H = G$. De ce fait le noyau de $\tilde{a}$ est de la forme $\mathrm{Gal}(\bar{k}/L)$, où L est une extension finie galoisienne de k de groupe G. □

Il se trouve que la propriété d'approximation hyper-faible se « transmet » *a priori* plus facilement que les autres propriétés de même nature. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 2. — *Soit E un k-groupe fini vérifiant la propriété d'approximation hyper-faible. Alors il en va de même de tout k-groupe G qui est un quotient de E.*

Démonstration. — Par hypothèse il existe un morphisme surjectif p de k-groupes $E \to G$. Soit v une place de k telle que E et G s'étendent en des schémas en groupes $\mathcal{E}_v$, $\mathcal{G}_v$ au-dessus de $\mathcal{O}_v$, dont on note $\widetilde{E_v}$ et $\widetilde{G_v}$ les fibres spéciales respectives au-dessus de $\mathbb{F}_v$. Il suffit de démontrer que l'application

$H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{E}_v) \to H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}_v)$ induite par p est surjective, ou encore (d'après [?], III.3.11) que l'application $H^1(\mathbb{F}_v, \widetilde{E}_v) \to H^1(\mathbb{F}_v, \widetilde{G}_v)$ est surjective. Mais ceci résulte de [?], III.2.4., corollaire 2, vu que le corps fini $\mathbb{F}_v$ est de dimension cohomologique 1. □

On a aussi :

PROPOSITION 3. — *Soit* $1 \to A \to E \to G \to 1$ *une suite exacte scindée de* k*-groupes avec* A *abélien. Alors si* G *possède la propriété d'approximation hyper-faible, il en va de même de* E*.*

Démonstration. — Soit $s : G \to E$ une section de la suite exacte ci-dessus. Soit S_0 un ensemble fini de places de k tel que E (et donc aussi A et G) soient non ramifiés en dehors de S_0, et S_0 contient toutes les places de k au-dessus des entiers divisant l'ordre n de A. Soient S un ensemble fini de places de k disjoint de S_0 et $(e_v)_{v \in S}$ une famille dans $\prod_{v \in S} H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, E)$. Alors l'image g_v de e_v dans $H^1(k_v, G)$ est dans $H^1_{\mathrm{nr}}(k_v, G)$, et par hypothèse il existe un élément g de $H^1(k, G)$ dont l'image dans $\prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$ par l'application diagonale est $(g_v)_{v \in S}$. Posons $e' = s(g)$. Pour tout v de S, l'image e'_v de e' dans $H^1(k_v, E)$ et e_v s'envoient sur le même élément de $H^1(k_v, G)$. D'après [?], I.5.5., corollaire 2, il diffèrent par l'action d'un élément a_v de $H^1(k_v, {}_cA)$, où c est un cocycle de $Z^1(k, G)$ représentant g et ${}_cA$ désigne le k-groupe déduit de A par torsion via l'action de G sur A associée à la suite exacte. Il suffit donc de montrer que l'application diagonale

$$H^1(k, {}_cA) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v, {}_cA)$$

est surjective pour conclure (on modifie ensuite e' par l'action d'un élément de $H^1(k, {}_cA)$ s'envoyant sur $(a_v)_{v \in S}$). Mais ceci résulte de [?], 6.4.b, car pour v dans S, le module galoisien $A' := \mathrm{Hom}({}_cA, \mu_n)$ est non ramifié vu que A, g et μ_n sont par hypothèse non ramifiés en v. □

5. Propriété (BM) et cohomologie de G

On considère un k-groupe fini G, que l'on plonge dans SL_n, et note X la k-variété lisse $X = \mathrm{SL}_n / G$. Soit G^{ab} l'abélianisé de G, i.e. le quotient du k-groupe G par son sous-groupe dérivé G^{der}. Le G-torseur $Y = \mathrm{SL}_n \to X$ est versel ; on appelle Z le quotient de SL_n par l'action du sous-groupe G^{der}. Notons que, SL_n étant un groupe semi-simple et simplement connexe, on a $\bar{k}^*[Y] = \bar{k}^*$ et $\mathrm{Pic}\, \overline{Y} = 0$. Ainsi $\bar{k}^*[X] = \bar{k}^*$ et nous pouvons appliquer les résultats de la théorie de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc (voir [?] et [?], section 2.3.) à X. Soit M le Γ_k-module fini dual du k-groupe fini G^{ab}. Alors on a $M = \mathrm{Pic}\, \overline{X}$ et $Z \to X$ est un *torseur universel* (cf. [?], preuve de la proposition 5.5), de groupe structural G^{ab}. En particulier le sous-groupe $\mathrm{Br}_1 X = \ker[\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X}]$ de $\mathrm{Br}\, X$ vérifie : $\mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}\, k$ est isomorphe à $H^1(k, M)$ (et plus précisément, d'après [?], théorème 4.1.1, les éléments de $\mathrm{Br}_1 X$ sont obtenus comme des cup-produits $a \cup [Z] + \alpha_0$, avec $\alpha_0 \in \mathrm{Br}\, k$ et $a \in H^1(k, M)$).

Définissons le sous-groupe $Ш^1_\omega(M)$ comme le sous-groupe de $H^1(k, M)$ constitué des éléments dont la restriction à $H^1(k_v, M)$ est nulle pour presque toute place v. Alors $Ш^1_\omega(M)$ (qui est fini) correspond à un sous-groupe de $\mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}\, k$, qui est inclus dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X/\mathrm{Br}\, k$ d'après [?], théorème 2.1.1. Notons $Б_\omega(X)$ le sous-groupe de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X$ correspondant. Il se trouve que c'est pour l'obstruction de Manin attachée à ce sous-groupe qu'on a une traduction agréable :

Théorème 4. — *Soit G un k-groupe fini. Alors on a équivalence entre :*

a) $\overline{X(k)} = X(k_\Omega)^{Б_\omega(X)}$ *;*

b) *pour tout ensemble fini S de places de k, l'image de l'application*

$$j_S : H^1(k, G) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^1(k_v, G)$$

est constituée des éléments $(g_v)_{v\in S}$ dont l'image $(a_v)_{v\in S}$ dans $\prod_{v\in S} H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})$ provient de $H^1(k, G^{\mathrm{ab}})$.

Démonstration. — Supposons d'abord qu'on ait a). Comme $Ш^1_\omega(M)$ est fini, on peut trouver un système fini Λ de représentants dans $Б_\omega(X)$ de $Б_\omega(X)/\mathrm{Br}\, k$, tel que tout élément de Λ soit de la forme $a \cup [Z]$ avec $a \in Ш^1_\omega(M)$. Soient S un ensemble fini de places et $(g_v)_{v\in S}$ dans $\prod_{v\in S} H^1(k_v, G)$. On appelle b_v l'image de g_v dans $H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})$ et on fait l'hypothèse qu'il existe b dans $H^1(k, G^{\mathrm{ab}})$ dont la restriction à $H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})$ est b_v pour $v \in S$. Notre but est de trouver un point $(P_v) \in X(k_\Omega)^{Б_\omega(X)}$ tel que $[Y](P_v) = g_v$ pour $v \in S$. En effet on aura alors un point rationnel $P \in X(k)$ arbitrairement proche de P_v pour $v \in S$, ce qui implique que $[Y](P) \in H^1(k, G)$ a pour restriction g_v dans $H^1(k_v, G)$ si $v \in S$.

On peut supposer que pour tout élément $a \cup [Z]$ de Λ, la restriction a_v de a à $H^1(k_v, M)$ est nulle (quitte à aggrandir S). Comme Y est un G-torseur versel, on peut déjà trouver $P_v \in X(k_v)$ avec $[Y](P_v) = g_v$ si $v \in S$. Pour v non dans S, on prend $P_v \in X(k_v)$ arbitraire. Soit alors $\alpha \in Б_\omega(X)$ de la forme $\alpha = a \cup [Z]$. Alors, la somme

$$\sum_{v\in\Omega} j_v\big(\alpha(P_v)\big) = \sum_{v\in\Omega} j_v\big(a_v \cup \big([Z](P_v)\big)\big)$$

ne change pas si on remplace $[Z](P_v)$ par la restriction b_v de b. En effet pour v dans S, on a $[Z](P_v) = b_v$ par hypothèse et pour v non dans S, on a $a_v = 0$. De ce fait

$$\sum_{v\in\Omega} j_v\big(\alpha(P_v)\big) = \sum_{v\in\Omega} j_v(a_v \cup b_v) = 0$$

puisque $a \cup b$ est un élément de $\mathrm{Br}\, k$.

Supposons maintenant qu'on ait b). Soit (P_v) dans $X(k_\Omega)^{\text{Б}_\omega(X)}$. On veut montrer que (P_v) est dans l'adhérence de $X(k)$ dans $X(k_\Omega)$. Soit S un ensemble fini de places. On a alors une suite exacte

$$H^1(k, G^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow \prod_{v\in S} H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow Ш^1_S(M)^D \tag{2}$$

où $Ш^1_S(M) \subset Ш^1_\omega(M)$ est le sous-groupe constitué des classes dont la restriction à $H^1(k_v, M)$ est nulle en dehors de S et ${}^D = \mathrm{Hom}(., \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ désigne le dual. Pour obtenir cette suite exacte, on note que la suite de Poitou-Tate pour le Γ_k-module fini M donne une suite exacte

$$Ш^1_S(M) \longrightarrow \prod_{v\in S} H^1(k_v, M) \longrightarrow H^1(k, G^{\mathrm{ab}})^D$$

qu'il suffit ensuite de dualiser en utilisant la dualité locale (voir [?], II.5). Dans la suite (2), la flèche de droite est donnée par l'accouplement

$$\prod_{v\in S} H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}}) \times Ш^1_S(M) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \big((b_v), a\big) \longmapsto \sum_{v\in S} j_v\big((a_v \cup b_v)\big)$$

qui est nul pour $b_v = [Z](P_v)$ et $a \in Ш^1_S(M)$, vu que c'est aussi

$$\sum_{v\in\Omega} j_v\big((a \cup [Z])(P_v)\big).$$

On en déduit que l'élément $([Z](P_v))_{v\in S}$ provient de $H^1(k, G^{\mathrm{ab}})$.

Maintenant l'hypothèse b) dit que $([Y](P_v))_{v\in S}$ provient de $H^1(k, G)$. Cela signifie qu'il existe un tordu $Y^g \to X$ du torseur Y par un cocycle $g \in Z^1(k, G)$, tel que pour v dans S, les points P_v se relèvent en des k_v-points Q_v de Y^g. Alors Y^g est un k-espace principal homogène de SL_n, donc il est k-isomorphe à SL_n vu que $H^1(k, \mathrm{SL}_n) = 0$. Comme SL_n vérifie l'approximation faible, il ne reste plus qu'a approximer les Q_v par un point rationnel Q et à projeter Q sur X pour obtenir le résultat. $\square$

A priori $\text{Б}_\omega(X)$ est plus petit que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X$ (il serait intéressant d'avoir un exemple explicite où l'inclusion est stricte). Ce dernier groupe admet la description suivante :

Proposition 4. — *Soit* $X = \mathrm{SL}_n/G$. *Alors* $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X/\mathrm{Br}\, k$ *s'identifie au sous-groupe de* $H^1(k, M)$ *constitués des éléments a qui ont la propriété suivante :*

Pour presque tout place v de k, la restriction a_v *de a à* $H^1(k_v, M)$ *est orthogonale (pour l'accouplement local donné par le cup-produit) au sous-ensemble* $\mathrm{Im}[H^1(k_v, G) \to H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})]$ *de* $H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})$.

En particulier si la surjection canonique $G \to G^{\mathrm{ab}}$ admet une section (et plus généralement si l'image de la flèche $[H^1(k_v, G) \to H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})]$ engendre $H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})$ pour presque toute v), on obtient que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X = Б_\omega(X)$, ou encore $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X/\mathrm{Br}\, k \simeq Ш^1_\omega(M)$.

Démonstration. — D'après ce qu'on a vu ci-dessus, il s'agit de voir à quelle condition un élément $\alpha = a \cup [Z]$ de $\mathrm{Br}_1 X$ est dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1} X$. D'après [**?**], théorème 2.1.1, c'est le cas si et seulement si pour presque toute place v de k, on a $(a \cup [Z])(P_v) = 0$ pour tout $P_v \in X(k_v)$. Or l'ensemble des $[Z](P_v)$ pour $P_v \in X(k_v)$ est précisément $\mathrm{Im}[H^1(k_v, G) \to H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})]$ car $[Z](P_v)$ est l'image de $[Y](P_v)$ dans $H^1(k_v, G^{\mathrm{ab}})$ et le G-torseur $Y \to X$ est versel. Le résultat en découle. □

Remerciements. — Je remercie J-L. Colliot-Thélène pour plusieurs pertinentes suggestions et pour l'intêret qu'il a porté à ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Chernousov – « Galois cohomology and weak approximation for the quotient manifolds A^n/G », *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **208** (1995), p. 335–349, Dedicated to Academician Igor′ Rostislavovich Shafarevich on the occasion of his seventieth birthday (Russian).

[2] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc – « La descente sur les variétés rationnelles. II », *Duke Math. J.* **54** (1987), p. 375–492.

[3] ______, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., 2007.

[4] T. Ekedahl – « An effective version of Hilbert's irreducibility theorem », in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989*, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, 1990, p. 241–249.

[5] S. Garibaldi, A. Merkurjev & J-P. Serre – « Cohomological invariants in Galois cohomology », University Lecture Series, vol. 28, American Mathematical Society, 2003, p. 168.

[6] D. Harari – « Méthode des fibrations et obstruction de Manin », *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 221–260.

[7] ———, « Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **125** (1997), p. 143–166.

[8] D. Harari & A. Skorobogatov – « Non-abelian cohomology and rational points », *Compositio Math.* **130** (2002), p. 241–273.

[9] J. S. Milne – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, 1980.

[10] J. Neukirch – « Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie », *Invent. Math.* **21** (1973), p. 59–116.

[11] ———, « On solvable number fields », *Invent. Math.* **53** (1979), p. 135–164.

[12] D. J. Saltman – « Multiplicative field invariants », *J. Algebra* **106** (1987), p. 221–238.

[13] J.-J. Sansuc – « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres », *J. reine angew. Math.* **327** (1981), p. 12–80.

[14] J-P. Serre – *Cohomologie galoisienne*, vol. 1965, Springer, 1965, cinquième édition, révisée et complétée.

[15] A. Skorobogatov – *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, 2001.

[16] V. E. Voskresenskii – « Corps d'invariants de groupes abéliens (en russe) », *Uspehi Mat. Nauk* **4 (172)** (1973), p. 77–102.

[17] S. Wang – « On Grunwald's theorem », *Ann. of Math. (2)* **51** (1950), p. 471–484.