

DISTRIBUTION DES PRÉIMAGES ET DES POINTS PÉRIODIQUES D'UNE CORRESPONDANCE POLYNOMIALE

PAR TIEN-CUONG DINH

À Madame Lê Hồng Sâm

RÉSUMÉ. — Nous construisons pour toute correspondance polynomiale F d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$ une mesure d'équilibre μ . Nous montrons que μ est approximable par les préimages d'un point générique et que les points périodiques répulsifs sont équidistribués sur le support de μ . En utilisant ces résultats, nous donnons une caractérisation des ensembles d'unicité pour les polynômes.

ABSTRACT (*Distribution of preimages and periodic points of a polynomial correspondence*)

We construct an equilibrium measure μ for a polynomial correspondence F of Lojasiewicz exponent $\ell > 1$. We then show that μ can be built as the distribution of preimages of a generic point and that the repelling periodic points are equidistributed on the support of μ . Using these results, we will give a characterization of infinite uniqueness sets for polynomials.

1. Introduction

Un compact K de \mathbb{C} est un *ensemble d'unicité* si pour tout couple de polynômes non constants f et g , la relation $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$ implique $f = g$. Ostrovskii, Pakovitch et Zaidenberg [29] ont montré que si f et g sont deux

Texte reçu le 25 mai 2003, accepté le 3 février 2004

TIEN-CUONG DINH, Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay (France)

E-mail : TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 37F, 32H, 32H30, 32H50.

Mots clefs. — Correspondance, mesure d'équilibre, ensemble exceptionnel, point périodique, ensemble d'unicité.

polynômes de même degré vérifiant $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$ pour un compact K de cardinal au moins deux, alors il existe une rotation R préservant K telle que $f = R \circ g$. Nous avons déterminé dans [9] les polynômes f , g et les compacts K de capacité logarithmique positive vérifiant $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$. Des problèmes analogues pour les fonctions entières ou méromorphes ont été étudiés par Nevanlinna [28], Gross-Yang [21], Shiffman [33], *etc.* Ces auteurs utilisent des méthodes variées.

Ici, à partir de la relation $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$, on déduit que $g \circ f^{-1}(K) = K$ et par conséquent

$$(g \circ f^{-1}) \circ \dots \circ (g \circ f^{-1})(K) = K,$$

ce qui permet de se ramener à l'étude dynamique de la fonction multivaluée $F := f \circ g^{-1}$ qui est en fait une correspondance polynomiale. Les propriétés dynamiques que nous allons étudier permettent de caractériser les ensembles d'unicité infinis (voir le corollaire 5.2).

Clozel et Ullmo étudient dans [7], [6] les correspondances holomorphes sur les surfaces de Riemann et sur les domaines symétriques. Ils en donnent des applications en arithmétique. Ils montrent que les correspondances modulaires sur une courbe holomorphe hyperbolique sont celles qui préservent la forme volume Ω associée à la métrique de Kobayashi. Ils en déduisent que les correspondances, qui commutent avec une correspondance modulaire extérieure, sont modulaires car ces correspondances, elles aussi, doivent préserver Ω .

Depuis les travaux de Julia [24], Fatou [17], Ritt [31], Eremenko [16] (voir aussi [11]), on sait que si deux endomorphismes de \mathbb{P}^k commutent, les objets dynamiques, qui leur sont associés, sont fortement liés. L'étude de ces objets permet de déterminer ou de caractériser ces endomorphismes. Dans le cadre des correspondances holomorphes, une étude dynamique devrait permettre de comprendre les commutateurs (voir le corollaire 2.9).

Nous renvoyons le lecteur à [2], [18], [19], [32], [34], pour les aspects fondamentaux de la théorie d'itération des applications holomorphes et méromorphes de \mathbb{P}^k . Pour les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k ou pour les automorphismes de Hénon de \mathbb{C}^2 par exemple, on sait construire des mesures invariantes, mélangeantes qui maximisent l'entropie. Ces mesures d'équilibre sont obtenues comme intersections de courants invariants positifs fermés de bidegré $(1, 1)$.

Briend-Duval [3], [4] ont montré que la mesure d'équilibre de tout endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$ de \mathbb{P}^k est limite de masses de Dirac portées par les points périodiques répulsifs. C'est aussi la limite de masses de Dirac portées par les préimages de tout point z n'appartenant pas à un ensemble exceptionnel algébrique \mathcal{E} . Antérieurement, Fornæss-Sibony [19] avaient montré que \mathcal{E} est pluripolaire. En dimension 1, ces résultats ont été démontrés par Brolin pour les polynômes [5], Lyubich [26] et Freire-Lopès-Mañé [20] pour les fractions rationnelles. Notons ici que l'étude des endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k , peut se ramener à l'étude des endomorphismes polynomiaux. Il suffit de

considérer le relevé de ces applications à \mathbb{C}^{k+1} . Dans [13], l'auteur et Sibony ont construit pour les applications d'allure polynomiale une mesure invariante d'entropie maximale et généralisé les théorèmes de Briend-Duval pour de grandes familles de telles applications (en particulier pour les applications de degré topologique plus grand qu'un certain degré dynamique et pour les applications polynomiales dont l'exposant de Lojasiewicz est supérieur à 1).

Dans le présent travail, nous allons généraliser ces résultats aux correspondances polynomiales. Notre article s'organise de la manière suivante. Au paragraphe 2 nous définissons les correspondances polynomiales sur \mathbb{C}^k et leurs exposants de Lojasiewicz à l'infini. Nous construisons la mesure d'équilibre μ associée à une correspondance polynomiale F d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$. Cette mesure est F^* -invariante, « mélangeante » à vitesse exponentielle et ne charge pas les ensembles pluripolaires. Nous montrons aussi que toute correspondance polynomiale, qui commute avec F , préserve la mesure d'équilibre μ de F (voir le corollaire 2.9). La construction de μ suit une méthode donnée dans [13] (*méthode par résolution de dd^c*); elle est aussi valable pour les correspondances d'allure polynomiale ou pour les itérations aléatoires (voir aussi [12]). Pour certaines correspondances, on peut construire un courant invariant T positif fermé de bidegré $(1, 1)$. Mais il est peu probable que la mesure T^k (même lorsqu'elle est bien définie) soit invariante quand $k \geq 2$.

Dans le troisième paragraphe, en adaptant une méthode géométrique développée par Lyubich [26] et Briend-Duval [3], [4] Sibony et l'auteur [13], [10]), nous construisons, pour les petites boules centrées en un point générique, beaucoup de branches inverses dont on contrôle la taille. La mesure μ reflète la distribution des préimages de tout point z qui n'appartient pas à un ensemble exceptionnel \mathcal{E} . En collaboration avec Charles Favre, nous montrons que \mathcal{E} est l'orbite positive de \mathcal{E}_0 où \mathcal{E}_0 est le plus grand sous-ensemble algébrique propre de \mathbb{C}^k invariant par F^{-1} . Le cas des applications polynomiales d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$ est traité dans [13], [14] (voir aussi [22], [12]). On obtient alors que l'ensemble \mathcal{E} est *algébrique*. Dans ces cas la méthode algébrique s'applique sans difficulté. Pour les correspondances, nous rencontrons plusieurs difficultés techniques.

Dans le quatrième paragraphe, nous montrons en particulier que les points périodiques réguliers répulsifs de F sont denses et équidistribués sur le support de μ .

Les résultats obtenus sont encore valables dans un cadre plus général. Afin de simplifier les notations, nous préférons nous limiter au cas de l'espace complexe \mathbb{C}^k . Dans [12], [10], nous étendons cette étude aux itérations aléatoires des correspondances sur les variétés kählériennes compactes.

Une interprétation géométrique des résultats obtenus est donnée à la fin du paragraphe 4 (voir les corollaires 4.7, 4.8). Cette vision géométrique nous semble intéressante même pour les endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k et les

automorphismes de Hénon de \mathbb{C}^2 . Dans le dernier paragraphe, nous appliquons les résultats obtenus pour déterminer les ensembles d'unicité infinis, pour les polynômes d'une variable.

Signalons un travail récent de Claire Voisin [36] dans lequel elle étudie la non-hyperbolicité de variétés projectives en utilisant des correspondances (voir aussi l'exemple 3.11). Du point de vue dynamique, les correspondances considérées par Clozel-Ullmo et Claire Voisin sont plus proches des automorphismes holomorphes tandis que celles étudiées dans le présent article sont plutôt proches des endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k . Un outil que nous avons développé récemment avec Sibony [15] permet d'étudier les correspondances de type automorphisme.

Dans la suite, $B(z, r)$ et $\bar{B}(z, r)$ désignent la boule ouverte et la boule fermée de centre z et de rayon r . Les disques, les boules et le diamètre $\text{diam}(\cdot)$ d'un ensemble sont définis ou mesurés en métrique euclidienne. L'aire $\text{aire}(\cdot)$ d'un disque, la masse $\|\cdot\|$ d'un courant, les normes L^2 et C^2 d'une fonction sont mesurés en métrique de Fubini-Study. La notation δ_z désigne la masse de Dirac en z et $\mathbf{1}_S$ désigne la fonction indicatrice de S . Les préimages d'un point z de F sont aussi les images de z par la correspondance \bar{F} adjointe à F . Nous préférons parler de préimages plutôt que d'images afin que les applications polynomiales soient couvertes par notre étude.

Remerciements. — Je remercie Charles Favre et Nessim Sibony dont les nombreuses remarques ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

2. Correspondances polynomiales

Soit X une variété complexe de dimension $k \geq 1$. Notons π_1, π_2 les projections canoniques de $X \times X$ dans X . On appelle *k-chaîne holomorphe* de $X \times X$ toute combinaison finie $Y := \sum n_i Y_i$ où les Y_i sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de dimension k , deux à deux distincts, de $X \times X$ et où les n_i sont des entiers relatifs non nuls. On dira que Y est *positive* si les n_i sont positifs. D'après un théorème de Lelong, une *k-chaîne holomorphe positive* Y définit par intégration un courant positif fermé $[Y]$ de bidimension (k, k) de $X \times X$. Notons $|Y| := \bigcup Y_i$ le support de Y et $\bar{Y} := \sum n_i \bar{Y}_i$ où \bar{Y}_i est le symétrique de Y_i par rapport à la diagonale de $X \times X$, *i.e.* l'image de Y_i par l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Une *correspondance holomorphe* de degré topologique (d_1, d_2) sur X est la donnée d'une *k-chaîne holomorphe positive* Y de dimension k de $X \times X$ telle que la restriction de π_i à Y définisse une application propre de degré d_i pour $i = 1, 2$. Plus précisément, pour tout $z \in X$ la fibre $Y \cap \pi_i^{-1}(z)$ contient exactement d_i points comptés avec multiplicités. Il est clair que si $(x, y) \in |Y|$ et si x tend vers l'infini alors y tend aussi vers l'infini et réciproquement. On peut identifier cette correspondance à la fonction multivaluée $F := (\pi_2|_Y) \circ (\pi_1|_Y)^{-1}$. Le terme

correspondance désignera F . On dira que Y est le *graphe* de F . On utilisera souvent la décomposition $Y = \sum Y_i^*$ dans laquelle chaque Y_i est répété n_i fois afin d'éviter de parler de multiplicités. La correspondance \bar{F} associée à \bar{Y} est appelée *correspondance adjointe* de F .

Soit F' une autre correspondance de degré topologique (d'_1, d'_2) associée à une k -chaîne holomorphe positive $Z = \sum Z_j^*$. La composition $F' \circ F$ est celle associée au produit fibré $Y \times_X Z := \sum (Y_i^* \times_X Z_j^*)$ où

$$Y_i^* \times_X Z_j^* := \left\{ (x, z) \in X \times X \text{ tel qu'il existe } y \in X \text{ vérifiant } (x, y) \in Y_i^* \text{ et } (y, z) \in Z_j^* \right\}.$$

Le produit $Y_i^* \times_X Z_j^*$ est, en général, une k -chaîne holomorphe qui n'est pas toujours irréductible. Dans la formule précédente le nombre des valeurs convenables de y détermine les multiplicités. La composition $F' \circ F$ est une correspondance de degré topologique $(d_1 d'_1, d_2 d'_2)$. On notera F^n la correspondance $F \circ \dots \circ F$ (n fois).

Dans le présent travail, nous considérons le cas où X est l'espace euclidien \mathbb{C}^k et les composantes Y_i de Y sont des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$. On dira qu'une telle correspondance F est *polynomiale (propre)*. Il existe une constante $\ell > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in |Y|$ suffisamment grand on ait $|y| \geq c|x|^\ell$ où $c > 0$ est une constante. Si F est un endomorphisme polynomial, Ploski [30] a montré qu'il existe une constante maximale $\ell > 0$ qui vérifie la propriété ci-dessus. Sa preuve est aussi valable pour les correspondances polynomiales. Cette constante ℓ est appelée *exposant de Lojasiewicz* de F . Dans la suite, on suppose que $\ell > 1$. On vérifie que dans ce cas d_1 est strictement plus petit que d_2 (on peut prouver ceci en utilisant l'argument donné dans la proposition 4.1). Notons z les coordonnées euclidiennes de \mathbb{C}^k et

$$\omega := \frac{1}{2} dd^c \log(1 + \|z\|^2)$$

la forme de Fubini-Study de \mathbb{P}^k . Soit $A_0 > 1$ une constante assez grande que nous allons choisir dans le lemme 2.5. Fixons un nombre $R_0 > 0$ assez grand tel que $|y| > A_0|x|$ pour tout $(x, y) \in |Y|$ vérifiant $|y| \geq R_0$. On pose

$$F^{-1} := (\pi_{1|Y}) \circ (\pi_{2|Y})^{-1}, \\ F_* := (\pi_{1|Y})_* (\pi_{2|Y})^*, \quad F_* := (\bar{F})^* = (\pi_{2|Y})_* (\pi_{1|Y})^*.$$

Les « applications » F et F^{-1} agissent sur les sous-ensembles de \mathbb{C}^k , les points de la fibre $F^{-1}(z)$ de F sont comptés avec multiplicités. L'opérateur F_* agit sur les fonctions continues ou plurisousharmoniques (p.s.h.) et sur les courants positifs fermés de bidegré $(1, 1)$ de \mathbb{C}^k . L'opérateur F^* agit sur les mesures positives. Plus précisément, si φ est une fonction continue ou p.s.h. sur \mathbb{C}^k , on pose

$$F_* \varphi := \sum_{w \in F^{-1}(z)} \varphi(w).$$

C'est une fonction continue ou p.s.h. sur \mathbb{C}^k . Rappelons que φ est p.s.h. si elle est localement intégrable, semi-continue supérieurement (s.c.s) et si $dd^c\varphi \geq 0$ au sens des courants. Elle est *pluriharmonique* si elle est continue et $dd^c\varphi = 0$. Observons que si φ est pluriharmonique, $F_*\varphi$ l'est aussi. Si T est un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ sur \mathbb{C}^k , il existe une fonction p.s.h. φ , unique à une fonction pluriharmonique près, telle que $dd^c\varphi = T$. On définit alors $F_*T := dd^c F_*\varphi$ (voir [27]). Pour une mesure positive ν à support compact sur \mathbb{C}^k , on définit $F^*\nu$ par

$$\langle F^*\nu, \varphi \rangle := \langle \nu, F_*\varphi \rangle \quad \text{pour } \varphi \text{ continue sur } \mathbb{C}^k.$$

Nous dirons qu'une fonction p.s.h. φ sur \mathbb{C}^k est à *croissance logarithmique* s'il existe une constante $A > 0$ telle que $\varphi - A \log(1 + \|z\|^2)$ soit bornée supérieurement. On dit qu'une mesure positive est *PB* si elle intègre les fonctions p.s.h. à croissance logarithmique [13]. Dans le cas de dimension $k = 1$, si μ est une mesure positive sur \mathbb{C} , on peut écrire $\mu = dd^c u - \alpha$ avec u une fonction L^1 et α une forme lisse sur \mathbb{P}^1 . On a montré [13] que μ est PB si et seulement si son potentiel u est borné. Ceci justifie la terminologie choisie. D'après le théorème de Josefson [25, th. 5.2.4], pour tout ensemble pluripolaire E , il existe une fonction p.s.h. à croissance logarithmique φ telle que $\varphi = -\infty$ sur E . Par conséquent, les mesures PB ne chargent pas les ensembles pluripolaires. En particulier, le support d'une mesure PB est parfait, *i.e.* ne contient pas de point isolé.

THÉORÈME 2.1. — *Soit F une correspondance polynomiale de degré topologique (d_1, d_2) sur \mathbb{C}^k , d'exposant de Lojasiewicz $\ell > 1$. Soient ν_n des mesures de probabilité de support uniformément borné dans \mathbb{C}^k . Supposons que $\nu_n = h_n \omega^k$ où h_n est une fonction vérifiant $\|h_n\|_{L^2} = o(\ell^n)$. Alors la suite de mesures $d_2^{-n}(F^n)_*\nu_n$ converge vers une mesure de probabilité μ , à support compact, indépendante de la suite (ν_n) . De plus, cette mesure est PB et vérifie la relation de F^* -invariance $F^*\mu = d_2\mu$.*

On dit que μ est la *mesure d'équilibre* de F . En général, elle n'est pas invariante par F , *i.e.* $F_*\mu \neq d_1\mu$. On a $\mu = \lim d_2^{-n}(F^n)_*\omega^k$. Pour montrer le théorème 2.1, l'idée est de tester une fonction p.s.h. φ . On a

$$d_2^{-n} \langle (F^n)_*(\nu_n), \varphi \rangle = \langle \nu_n, d_2^{-n}(F^n)_*\varphi \rangle.$$

Nous allons montrer que $d_2^{-n}(F^n)_*\varphi$ tend dans L_{loc}^2 à vitesse $O(\ell^{-n})$ vers un constant c_φ . Le théorème en découle.

Fixons une boule $V := B(0, R)$ de rayon $R > R_0$ qui contient les supports des ν_n . Posons $U := F^{-1}(V)$. Alors \bar{U} est contenu dans la boule $U' := B(0, R/A_0)$. Fixons aussi $V' := B(0, R')$ avec $R' > R$ tel que $F^{-1}(V') \subset U'$. Soit φ une fonction sur V ou sur \mathbb{C}^k . Soit $\Lambda := d_2^{-1}F_*$ l'opérateur de Perron-Frobenius

associé à F . On a par définition

$$\Lambda\varphi(z) = d_2^{-1} \sum_{w \in F^{-1}(z)} \varphi(w)$$

où les points de $F^{-1}(z)$ sont comptés avec multiplicités. Posons $\varphi_n := \Lambda^n \varphi$. Cette fonction est p.s.h. ou continue si φ l'est. Nous aurons besoin des lemmes suivants.

LEMME 2.2. — *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ et de masse 1 sur \mathbb{P}^k . Alors la masse de $\Lambda^n T$ dans \mathbb{C}^k est plus petite ou égale à ℓ^{-n} .*

Démonstration. — Dans \mathbb{C}^k , on peut écrire $T = dd^c \varphi$ où φ est une fonction p.s.h. telle que $\varphi - \frac{1}{2} \log(1 + \|z\|^2)$ soit bornée supérieurement. On a

$$\ell^n \Lambda^n T = dd^c(\ell^n \Lambda^n \varphi) = dd^c(\ell^n \varphi_n).$$

Comme l'exposant de Lojasiewicz de F est égal à $\ell > 1$ on peut, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, supposer que $\|z'\|^\ell \leq \|z\|$ lorsque $\|z\|$ est assez grand et $z' \in F^{-1}(z)$. La fonction $\ell^n \varphi_n - \frac{1}{2} \log(1 + \|z\|^2)$ est donc bornée supérieurement car les valeurs de $\varphi_n(z)$ sont obtenues comme la moyenne des valeurs de φ sur $F^{-n}(z)$. D'après un lemme de comparaison (voir par exemple [34], [14, prop. 5.4]), ceci implique que

$$\begin{aligned} \|\ell^n \Lambda^n T\|_{\mathbb{C}^k} &= \int_{\mathbb{C}^k} dd^c(\ell^n \varphi_n) \wedge \omega^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}^k} dd^c \log(1 + \|z\|^2) \wedge \omega^{k-1} = \int_{\mathbb{C}^k} \omega^k = 1. \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 2.3. — *Soit φ une fonction p.s.h. sur V telle que $\varphi_n := \Lambda^n \varphi$ ne tende pas uniformément vers $-\infty$ (en particulier si φ est localement bornée). Alors φ_n tend vers une constante c_φ dans l'espace $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{C}^k)$.*

Démonstration. — Observons que φ_n est définie dans la boule $B(0, A_0^n R)$. On montre que φ_n tend vers une constante c_φ dans $L_{\text{loc}}^2(V)$. Pour la convergence dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{C}^k)$ il suffit de remplacer V par des boules suffisamment grandes.

Soit ψ la régularisée s.c.s. de la fonction $(\limsup \varphi_n)$ sur V . C'est une fonction p.s.h. car φ_n ne tend pas uniformément vers $-\infty$. Comme $F^{-1}(V) = U$, on a $\sup_V \varphi_{n+1} \leq \sup_U \varphi_n$. En effet, les valeurs de φ_{n+1} dans V sont obtenues comme la moyenne de valeurs de φ_n dans U . Ceci implique que $\sup_V \psi \leq \sup_U \psi$ car ψ est aussi égale à la régularisée s.c.s. de la fonction $(\limsup \varphi_{n+1})$. Le principe du maximum entraîne que ψ est une constante c_φ .

Soit (φ_{n_i}) une sous-suite convergente dans $L_{\text{loc}}^2(V)$ vers une fonction p.s.h. h . Montrons que $h = c_\varphi$. On a $h \leq c_\varphi$. Si $h \neq c_\varphi$, le principe du maximum implique que $h \leq c_\varphi - 2\varepsilon$ sur U' où $\varepsilon > 0$ est une constante. D'après le lemme de Hartogs [23, th. 2.6.4], on a $\varphi_{n_i} \leq c_\varphi - \varepsilon$ sur U pour i assez grand. Par conséquent, $\varphi_n \leq c_\varphi - \varepsilon$ sur V pour tout $n > n_i$. Ceci contredit le fait que la

régularisée s.c.s. de $(\limsup \varphi_n)$ est égale à c_φ . On a montré que φ_n tend vers c_φ dans $L^2_{\text{loc}}(V)$. \square

Le lemme précédent permet de construire la mesure d'équilibre μ . Si φ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 à support compact, la suite φ_n converge aussi vers une constante c_φ dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{C}^k)$ car cette fonction φ s'écrit comme différence de deux fonctions p.s.h. Si Ω est une forme volume lisse à support dans V telle que $\int \Omega = 1$, on a d'après le lemme 2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_2^{-n}(F^n)^*\Omega, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Omega, \Lambda^n \varphi \rangle = c_\varphi.$$

Par conséquent, $d_2^{-n}(F^n)^*\Omega$ tend faiblement vers une mesure de probabilité μ définie par $\langle \mu, \varphi \rangle := c_\varphi$ pour φ de classe \mathcal{C}^2 . Il est clair que μ est portée par \bar{U} et vérifie la relation de F^* -invariance. Elle ne dépend pas de Ω . Observons ici que la fonction p.s.h. φ vérifie l'hypothèse du lemme 2.3 si et seulement si elle est μ -intégrable.

LEMME 2.4. — Soit φ une fonction p.s.h. sur V . Si φ n'est pas μ -intégrable, la suite de fonctions $\varphi_n := \Lambda^n \varphi$ converge uniformément vers $-\infty$. Si φ est μ -intégrable, (φ_n) converge dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{C}^k)$ vers la constante $c_\varphi := \int \varphi d\mu$.

Démonstration. — Comme μ est F^* -invariante, on a $\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi_n \rangle$ pour tout $n \geq 0$. D'après le lemme 2.3, il suffit de traiter le cas où la suite (φ_n) converge dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{C}^k)$ vers une constante c_φ . Montrons que $c_\varphi = \int \varphi d\mu$.

D'après le lemme de Hartogs (voir le lemme 2.3), on a $\limsup \varphi_n = c_\varphi$. On déduit de la relation $\langle \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi_n \rangle$ que $\langle \mu, \varphi \rangle \leq c_\varphi$. D'autre part, la semi-continuité supérieure de φ et la définition de μ impliquent que

$$\langle \mu, \varphi \rangle \geq \limsup \langle d_t^{-n}(F^n)^*\Omega, \varphi \rangle = \limsup \langle \Omega, \varphi_n \rangle = c_\varphi.$$

La preuve du lemme est achevée. \square

LEMME 2.5. — Soit φ une fonction pluriharmonique sur V . Alors pour A_0 assez grand, on a

$$\|\varphi_n - c_\varphi\|_{L^\infty(V)} \leq 2^{-n} \ell^{-n} \|\varphi - c_\varphi\|_{L^\infty(V)}.$$

Démonstration. — Quitte à remplacer φ par $\varphi - c_\varphi$, on peut supposer que $c_\varphi = \langle \mu, \varphi \rangle = 0$. Le support de μ étant contenu dans la boule $U' = B(0, R/A_0)$, l'égalité $\langle \mu, \varphi \rangle = 0$ implique que φ doit s'annuler en un point de cette boule. D'après un lemme du type Schwarz, on a

$$\|\varphi\|_{L^\infty(U)} \leq (2\ell)^{-1} \|\varphi\|_{L^\infty(V)}$$

lorsque A_0 est assez grand. Par conséquent, $\|\varphi_1\|_{L^\infty(V)} \leq (2\ell)^{-1} \|\varphi\|_{L^\infty(V)}$. Ceci implique le lemme. Notons que pour montrer le lemme du type Schwarz, on peut considérer la famille normale des fonctions harmoniques ψ sur le disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$ s'annulant en un point de $\Delta(0, 1/A_0)$ et vérifiant $\psi \leq 1$. \square

Notons $\text{PSH}(V)$ le cône des fonctions p.s.h. sur V . Rappelons que les boules U' et V' sont fixées au début de la démonstration du théorème 2.1.

LEMME 2.6. — *L'opérateur $\Lambda : \text{PSH}(U') \cap L^2(U') \longrightarrow \text{PSH}(V) \cap L^2(V)$ est borné dans le sens où il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|\Lambda\varphi\|_{L^2(V)} \leq c\|\varphi\|_{L^2(U')}$$

pour toute fonction $\varphi \in \text{PSH}(U') \cap L^2(U')$.

Démonstration. — Soit $\varphi^{(n)}$ une suite de fonctions p.s.h. sur U' telle que $\|\varphi^{(n)}\|_{L^2(U')} \leq 1$. Il faut montrer que la suite $\Lambda\varphi^{(n)}$ est bornée dans $L^2(V)$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\varphi^{(n)}$ converge dans $L^2_{\text{loc}}(U')$ vers une fonction p.s.h. φ . On en déduit que la suite de fonctions p.s.h. $\Lambda\varphi^{(n)}$ converge vers $\Lambda\varphi$ dans $L^2_{\text{loc}}(V')$. En particulier, elle converge vers $\Lambda\varphi$ dans $L^2(V)$. \square

Notons $\text{PH}(V)$ l'espace des fonctions pluriharmoniques sur V . Posons

$$H := \text{PH}(V) \cap L^2(V)$$

et H^\perp son orthogonal dans $L^2(V)$. Posons aussi

$$H^{\perp*} := \text{PSH}(V) \cap H^\perp.$$

Le sous-espace H est invariant par Λ car si φ est pluriharmonique sur V , $\Lambda\varphi$ l'est sur un voisinage de \bar{V} . Pour toute fonction $\varphi \in \text{PSH}(V')$, on a la décomposition unique $\varphi = u + v$ avec $u \in H$ et $v \in H^{\perp*}$. La fonction v est le potentiel dans V du courant $\text{dd}^c\varphi$ dont la norme L^2 est minimale.

D'après le lemme 2.6, l'opérateur

$$\Lambda : \text{PSH}(V) \cap L^2(V) \longrightarrow \text{PSH}(V) \cap L^2(V)$$

est borné. Par conséquent, il existe des applications linéaires bornées

$$\Lambda_1 : H \longrightarrow H, \quad \Lambda_2 : H^{\perp*} \longrightarrow H, \quad \Lambda_3 : H^{\perp*} \longrightarrow H^{\perp*}$$

telles que $\Lambda\varphi = \Lambda_1 u + \Lambda_2 v + \Lambda_3 v$. On a $\Lambda_1 = \Lambda|_H$ et $\Lambda_2 = \text{pr}_H \circ \Lambda|_{H^{\perp*}}$ et $\Lambda_3 = \text{pr}_{H^\perp} \circ \Lambda|_{H^{\perp*}}$ où pr_H et pr_{H^\perp} désignent les projections orthogonales de $L^2(V)$ sur H et sur H^\perp . On a $\text{dd}^c\Lambda_3^n\varphi = \text{dd}^c\varphi_n$.

PROPOSITION 2.7. — *La mesure μ est PB. De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait*

$$\|\Lambda^n\varphi - c_\varphi\|_{L^2(V)} \leq cA\ell^{-n}$$

pour toute fonction p.s.h. φ avec $\|\varphi\|_{L^2(V)} \leq A$ et $\varphi - \frac{1}{2}A \log(1 + \|z\|^2)$ bornée supérieurement et pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. — Par homothétie, il suffit de considérer une fonction φ p.s.h. avec $\|\varphi\|_{L^2(V)} \leq 1$ et $\varphi - \frac{1}{2} \log(1 + \|z\|^2)$ bornée supérieurement. La famille de telles fonctions est compacte. Les constantes c_i et c que nous allons utiliser sont positives et indépendantes de φ . D'après le lemme 2.2, on a $\|\mathrm{dd}^c \varphi_n\| \leq \ell^{-n}$. Par conséquent, il existe une fonction p.s.h. ψ_n telle que $\psi_n - \frac{1}{2} \ell^{-n} \log(1 + \|z\|^2)$ soit bornée supérieurement, $\|\psi_n\|_{L^2} \leq c_1 \ell^{-n}$ et $\mathrm{dd}^c \psi_n = \mathrm{dd}^c \varphi_n$. Il s'agit ici la résolution de dd^c sur \mathbb{P}^k . On en déduit que $\|\Lambda_3^n v\|_{L^2(V)} \leq \|\psi_n\|_{L^2} \leq c_1 \ell^{-n}$. Posons

$$b := \int u \, d\mu, \quad b_n := \int \Lambda_2 \Lambda_3^n v \, d\mu, \quad s_n := b + b_0 + \cdots + b_{n-1}.$$

La fonction pluriharmonique u vérifie $\|u\|_{L^2(V)} \leq \|\varphi\|_{L^2(V)} \leq 1$, on en déduit que $\|u\|_{L^\infty(U)} \leq c_2$ par la formule de la moyenne. Comme Λ_2 est borné, on a

$$\|\Lambda_2 \Lambda_3^n v\|_{L^2(V)} \leq c_3 \|\Lambda_3^n v\|_{L^2(V)} \leq c_1 c_3 \ell^{-n}.$$

La formule de la moyenne appliquée à la fonction pluriharmonique $\Lambda_2 \Lambda_3^n v$ implique que $|b_n| \leq c_4 \ell^{-n}$ et donc la suite (s_n) est convergente. Utilisant les inégalités obtenues et le lemme 2.5 et l'estimation de b_j , on obtient en développant Λ^n ,

$$\begin{aligned} \|\Lambda^n \varphi - s_n\|_{L^2(V)} &= \|\Lambda_1^n u + \Lambda_1^{n-1} \Lambda_2 v + \Lambda_1^{n-2} \Lambda_2 \Lambda_3 v + \cdots + \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3^{n-2} v \\ &\quad + \Lambda_2 \Lambda_3^{n-1} v - s_n\|_{L^2(V)} + \|\Lambda_3^n v\|_{L^2(V)} \\ &\leq \|\Lambda_1^n u - b\|_{L^2(V)} + \|\Lambda_1^{n-1} \Lambda_2 v - b_0\|_{L^2(V)} \\ &\quad + \|\Lambda_1^{n-2} \Lambda_2 \Lambda_3 v - b_1\| + \cdots + \|\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3^{n-2} v - b_{n-2}\| \\ &\quad + \|\Lambda_2 \Lambda_3^{n-1} v - b_{n-1}\|_{L^2(V)} + \|\Lambda_3^n v\|_{L^2(V)} \\ &\leq c_5 [(2\ell)^{-n} + (2\ell)^{-n+1} + (2\ell)^{-n+2} \ell^{-1} \\ &\quad + \cdots + (2\ell)^{-1} \ell^{-n+2} + \ell^{-n+1} + \ell^{-n}] \leq c_6 \ell^{-n}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Lambda^n \varphi$ converge vers la constante $\lim s_n = b + \sum b_i$. Par conséquent, φ est μ -intégrable et $c_\varphi = b + \sum b_i$. On a aussi $|c_\varphi - s_n| \leq c_7 \ell^{-n}$. Ceci implique que $\|\Lambda^n \varphi - c_\varphi\|_{L^2(V)} \leq c \ell^{-n}$. \square

COROLLAIRE 2.8. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\sup_V (\varphi_n - c_\varphi) \leq c A \ell^{-n}$$

pour tout $n \geq 1$ et toute fonction φ p.s.h. sur \mathbb{C}^k avec $\|\varphi\|_{L^2(V')} \leq A$ et $\varphi - \frac{1}{2} A \log(1 + \|z\|^2)$ bornée supérieurement.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 2.7 en remplaçant V par une boule V_1 telle que $\bar{V} \subset V_1$ et $\bar{V}_1 \subset V'$, puis d'utiliser l'inégalité de la sous-moyenne pour les fonctions p.s.h. \square

Fin de la démonstration du théorème 2.1. — Soit φ une fonction p.s.h. à croissance logarithmique. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\langle d_2^{-n}(F^n)^*\nu_n - \mu, \varphi \rangle| &= |\langle \nu_n, \Lambda^n \varphi \rangle - c_\varphi| = |\langle h_n \omega^k, \Lambda^n \varphi - c_\varphi \rangle| \\ &\leq \|h_n\|_{L^2(V)} \|\varphi_n - c_\varphi\|_{L^2(V)}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.7, le majorant tend vers 0 car $\|h_n\|_{L^2(V)} = o(\ell^n)$. On en déduit que $d_2^{-n}(F^n)^*\nu_n$ tend faiblement vers μ . \square

COROLLAIRE 2.9. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Si G est une autre correspondance polynomiale de degré topologique (d'_1, d'_2) , d'exposant de Lojasiewicz quelconque et vérifiant $F \circ G = G \circ F$ alors $G^*\mu = d'_2\mu$.*

Démonstration. — Soit ν une forme volume lisse à support compact sur \mathbb{C}^k telle que $\int_{\mathbb{C}^k} \nu = 1$. D'après le théorème 2.1, on a $\lim d_2^{-n}(F^n)^*\nu = \mu$ et $\lim d_2^{-n}(F^n)^*(G^*\nu) = d'_2\mu$. Du fait que F et G commutent, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2^{-n}(F^n)^*(G^*\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_2^{-n}G^*(F^n)^*\nu = G^*\mu.$$

On en déduit que $G^*\mu = d'_2\mu$. \square

THÉORÈME 2.10. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Alors la mesure μ est F^* -mélangeante d'ordre exponentiel. Plus précisément, il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^2 et toute fonction ψ bornée sur \mathbb{C}^k , on ait*

$$|I_n(\varphi, \psi)| \leq c\ell^{-n} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2} \cdot \|\psi\|_{L^\infty}$$

où

$$I_n(\varphi, \psi) := \int (\Lambda^n \varphi) \psi \, d\mu - \left(\int \varphi \, d\mu \right) \left(\int \psi \, d\mu \right).$$

Démonstration. — Nous allons d'abord considérer le cas où φ est p.s.h. avec $\|\varphi\|_{L^2(V')} \leq A$ et $\varphi - \frac{1}{2}A \log(1 + \|z\|^2)$ bornée supérieurement. Montrons que $I_n(\varphi, \psi) \leq cA\ell^{-n} \|\psi\|_{L^\infty}$. Observons que l'on a $I_n(\varphi, \psi + \alpha) = I_n(\varphi, \psi)$ si α est une constante, car μ est F^* -invariante. Il suffit donc d'examiner le cas où ψ est positive. On a d'après le corollaire 2.8

$$I_n(\varphi, \psi) = \int (\Lambda^n \varphi - c_\varphi) \psi \, d\mu \leq \int cA\ell^{-n} \psi \, d\mu \leq cA\ell^{-n} \|\psi\|_{L^\infty}.$$

De la même manière, on montre que $-I_n(\varphi, \psi) = I_n(\varphi, -\psi) \leq cA\ell^{-n} \|\psi\|_{L^\infty}$. Par conséquent, on a $|I_n(\varphi, \psi)| \leq cA\ell^{-n} \|\psi\|_{L^\infty}$.

Pour le cas général, on peut supposer que φ est à support compact dans V . Elle s'écrit comme différence de deux fonctions p.s.h. vérifiant les conditions ci-dessus. La constante A est de l'ordre de $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^2}$. On est ramené au cas précédent. \square

3. Équidistribution des préimages

Dans ce paragraphe, nous étudions la distribution des préimages de F . Pour tout point $z \in \mathbb{C}^k$ et tout $n \geq 0$, posons

$$\mu_n^z := d_2^{-n}(F^n)^* \delta_z.$$

Notons \mathcal{E} l'ensemble des points z tels que la suite de mesures (μ_n^z) ne tend pas vers μ . C'est l'ensemble *exceptionnel* de F . Nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Alors \mathcal{E} est pluripolaire.*

Observons que puisque la mesure μ est PB, elle ne charge pas les ensembles pluripolaires. La proposition entraîne que $\mu(\mathcal{E}) = 0$ et μ_n^z tend faiblement vers μ pour μ -presque tout point $z \in \mathbb{C}^k$. On montrera plus loin que \mathcal{E} est une réunion finie ou dénombrable d'ensembles algébriques.

Démonstration. — Considérons la fonction p.s.h. $\varphi := \log(1 + \|z\|^2)$. C'est une fonction strictement p.s.h. Posons

$$c_\varphi := \int \varphi d\mu \quad \text{et} \quad \Phi := \sum_{n=0}^{\infty} (\Lambda^n \varphi - c_\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n - c_\varphi).$$

On peut appliquer la proposition 2.7 et le corollaire 2.8 à une boule V arbitrairement grande. On déduit que Φ est une fonction p.s.h. sur \mathbb{C}^k . Notons \mathcal{E}^* l'ensemble où Φ prend la valeur $-\infty$. C'est un ensemble pluripolaire. Il suffit de montrer que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$.

Soit $z \notin \mathcal{E}^*$. Du fait que $\Phi(z)$ est finie, la suite $\varphi_n(z)$ tend vers c_φ . Soit ψ une fonction réelle \mathcal{C}^2 à support compact. Pour montrer que μ_n^z tend vers μ , il suffit de montrer que $\psi_n(z)$ tend vers $c_\psi := \int \psi d\mu$. Fixons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que $\varphi^\pm := \varphi \pm \varepsilon\psi$ soit p.s.h. Un tel ε existe car φ est strictement p.s.h. D'après la proposition 2.7, les suites de fonctions $\varphi_n^\pm := \Lambda^n \varphi^\pm$ convergent vers les constantes $c^\pm := \int \varphi^\pm d\mu = c_\varphi \pm \varepsilon c_\psi$ dans $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{C}^k)$. Comme on l'a déjà vu dans la preuve du lemme 2.3, $\limsup \varphi_n^\pm(z)$ est au plus égal à c^\pm . Or $\lim \varphi_n(z) = c_\varphi$ car $z \notin \mathcal{E}^*$. On en déduit que $\limsup \pm \psi_n(z) \leq \pm c_\psi$, donc $\lim \psi_n(z) = c_\psi$. \square

Dans la suite, nous allons décrire plus précisément la distribution des préimages de F . Nous allons en fait construire des branches inverses holomorphes définies sur des disques et des boules.

Rappelons que $Y = \sum Y_i^*$ est le graphe de F . Soit K_0 un sous-ensemble connexe de \mathbb{C}^k .

On appelle *branche inverse régulière d'ordre n* de K_0 (voir la figure 1) toute suite \mathcal{B}

$$K_{-n}, (\widehat{K}_{-n}, i_n), K_{-n+1}, (\widehat{K}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, K_{-1}, (\widehat{K}_{-1}, i_1), K_0$$

vérifiant les propriétés suivantes

- (i) Les ensembles $K_{-m} \subset \mathbb{C}^k$ et $\widehat{K}_{-m} \subset Y_{i_m}^*$ sont connexes;
- (ii) π_1 définit une bijection de \widehat{K}_{-m} dans K_{-m} et π_2 définit une bijection de \widehat{K}_{-m} dans K_{-m+1} pour tout $1 \leq m \leq n$.

Si K_0 n'est pas un ouvert (par exemple si K_0 est un point), on exige que les applications ci-dessus définissent des bijections holomorphes entre un voisinage de \widehat{K}_{-m} et ses images. Dans ce cas, on associe \mathcal{B} à ces germes de bijection holomorphe. Puisque les Y_i^* ne sont pas nécessairement distincts, les indices i_m permettent de compter les branches inverses régulières avec multiplicité. Il y a au plus d_2^n branches inverses régulières d'ordre n de K_0 . En pratique, K_0 sera un point, un disque holomorphe, une famille de disques centrés en un point ou une boule holomorphe. Notons $F_{\mathcal{B}}^{-m}$ l'application

$$(\pi_{1|\widehat{K}_{-m}}) \circ (\pi_{2|\widehat{K}_{-m}})^{-1} \circ \cdots \circ (\pi_{1|\widehat{K}_{-1}}) \circ (\pi_{2|\widehat{K}_{-1}})^{-1}$$

pour $1 \leq m \leq n$. C'est une application holomorphe bijective de K_0 dans K_{-m} .

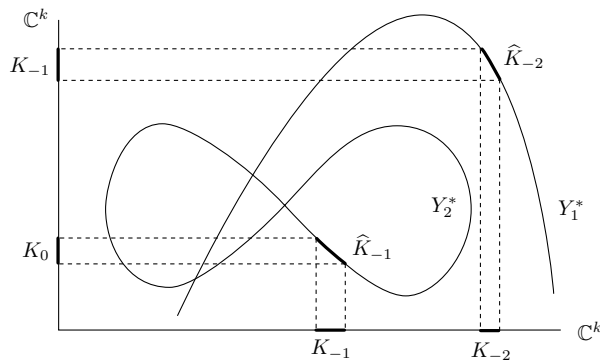


FIGURE 1. Branche inverse régulière.

Soit (a_m) une suite de nombres réels tendant vers 0. On dira que \mathcal{B} est de *taille* (a_m) si le diamètre de l'ensemble K_{-m} est au plus égal à a_m pour $0 \leq m \leq n$.

Soient $z_0 \in K_0$ et \mathcal{B}_0 une branche inverse régulière d'ordre n du point z_0 donnée par la suite

$$z_{-n}, (\widehat{z}_{-n}, i_n), z_{-n+1}, (\widehat{z}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, z_{-1}, (\widehat{z}_{-1}, i_1), z_0$$

(les points \widehat{z}_{-m} appartiennent à $Y_{i_m}^*$ et sont de coordonnées (z_{-m+1}, z_{-m})).

On dira que la branche \mathcal{B} est *accrochée* à la branche \mathcal{B}_0 si on a $\widehat{z}_{-m} \in \widehat{K}_{-m}$ pour tout $1 \leq m \leq n$ (les indices i_n dans \mathcal{B}_0 et \mathcal{B} sont identiques). Pour être exact, il faut aussi supposer que les $\pi_{i|\widehat{K}_{-m}}$ sont compatibles avec les germes

de bijection holomorphes associés à \mathcal{B}_0 . Ceci est nécessaire au cas où $\hat{z} - m$ est un point singulier de $Y_{i_m}^*$.

Nous soulignons ici que deux branches inverses régulières \mathcal{B} et \mathcal{B}' de K_0 sont considérées comme égales si on a $K_{-m} = K'_{-m}$, $\hat{K}_{-m} = \hat{K}'_{-m}$ ainsi que $i_m = i'_m$ pour tout m où K'_{-m} , \hat{K}'_{-m} et i'_m sont des ensembles et des indices associés à \mathcal{B}' .

Nous donnerons plus loin une notion de branche inverse plus souple qui permet de prouver que \mathcal{E} est une réunion d'ensembles algébriques. Pour les branches régulières, nous avons la proposition suivante dont la preuve peut être utile dans d'autres contextes comme l'étude de la dimension de μ par exemple.

PROPOSITION 3.2. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Alors il existe un ensemble pluripolaire \mathcal{E}' tel que pour tout $z \notin \mathcal{E}'$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta > 0$, la boule $B(z, r)$ possède au moins $(1 - \varepsilon)d_2^n$ branches inverses régulières d'ordre n , de taille $(\ell^{-(1-\delta)m/2})$ où $r = r(z, \delta, \varepsilon) > 0$ est une constante indépendante de n .*

L'idée de la démonstration consiste à construire les branches inverses régulières pour des unions de disques holomorphes centrées en un point générique z . Ensuite, utilisant un théorème d'analyse complexe (lemme 3.8), on peut prolonger les applications holomorphes $F_{\mathcal{B}}^{-n}$ associées à ces branches inverses régulières. Ces applications sont définies aux voisinages de grandes familles de disques centrés en z . On les prolonge en applications holomorphes sur une petite boule $B(z, r)$. Ces prolongements fournissent les branches inverses régulières pour $B(z, r)$.

La construction est faite par récurrence. Nous résumons ici le passage du rang $n - 1$ au rang n . Soit K_{-n+1} un disque holomorphe fabriqué au rang $n - 1$ à partir d'un disque K_0 de rayon $r' > 0$ centré en z . Nous voulons en fait construire des branches inverses régulières d'ordre 1 de K_{-n+1} . D'abord, pour construire \hat{K}_{-n} , on veut que K_{-n+1} ne rencontre pas les valeurs critiques de $\pi_{2|Y}$; ensuite, pour obtenir K_{-n} , nous avons besoin que $\pi_{1|\hat{K}_{-n}}$ soit injective.

Pour que ces deux conditions soient satisfaites, nous sélectionnons seulement les disques K_{-n+1} de diamètre assez petit qui ne sont pas trop proches d'un certain sous-ensemble algébrique ($P = 0$) que nous appelons *l'ensemble des valeurs critiques* de F . Pour chaque disque sélectionné, on peut construire d_2 branches inverses régulières d'ordre 1. Afin de continuer la construction, nous devons sélectionner, parmi les nouveaux disques, ceux de petit diamètre qui ne sont pas trop proches de ($P = 0$). L'hypothèse sur l'exposant de Lojasiewicz implique qu'un bon nombre de disques sont de petite aire. Ces disques ne sont pas forcément de petit diamètre. Mais, en diminuant légèrement r' , on rend leur diamètre petit. Le fait que μ soit une mesure PB implique que pour z générique, il n'y a qu'un petit nombre de disques qui sont proches de ($P = 0$).

Soit Q un polynôme non nul. Pour tout $\alpha > 0$, notons $\mathcal{V}_Q(\alpha)$ l'ensemble des points z vérifiant $|Q(z)| \leq \alpha$. Le lemme suivant montre que les préimages de F ne sont pas « trop proches » de l'hypersurface $(Q = 0)$. On peut le généraliser aux ensembles pluripolaires de \mathbb{P}^k .

LEMME 3.3. — Soit $a > 1$ une constante. Alors il existe un ensemble pluripolaire \mathcal{E}_Q^a tel que $\sum_{n \geq 0} \mu_n^z(\mathcal{V}_Q(a^{-n}))$ soit fini pour tout $z \notin \mathcal{E}_Q^a$.

Démonstration. — On peut supposer $a < \ell^{1/2}$. On choisit une fonction χ lisse, positive sur \mathbb{R}^+ telle que $\chi \leq 1$, $\chi = 1$ sur $[0, 1]$ et $\chi = 0$ sur $[2, +\infty[$. Soit $\tau \leq 1$ une fonction lisse, positive à support dans V et égale à 1 au voisinage de \bar{U} . Posons $\psi^n := \tau\chi(a^n Q)$. Les mesures μ_n^z étant portées par \bar{U} pour n assez grand, il suffit de montrer que la somme $\sum_{n \geq 0} \langle \mu_n^z, \psi^n \rangle$ est finie pour tout $z \notin \mathcal{E}_Q^a$ où l'ensemble \mathcal{E}_Q^a sera précisé dans la suite.

D'après la proposition 2.7, la fonction $\log |Q|$ est μ -intégrable. On en déduit que la somme $\sum_{n \geq 0} \langle \mu, \psi^n \rangle$ est finie. En effet, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \langle \mu, \psi^n \rangle &\leq \sum_{n \geq 0} \mu(\mathcal{V}_Q(2a^{-n})) = \int \left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\mathcal{V}_Q(2a^{-n})} \right) d\mu \\ &\leq \int \frac{1}{\log a} (|\log |Q|| + \log 2 + \log a) d\mu. \end{aligned}$$

Posons $c_n := \langle \mu, \psi^n \rangle$. Par définition de ψ^n , il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\psi^n\|_{C^2} \leq ca^{2n}$. Posons $\varphi := \log(1 + \|z\|^2)$ et $\psi^{n-} := ca^{2n}\varphi - \psi^n$. Ce sont des fonctions p.s.h. à croissance logarithmique. Posons

$$c_\varphi := \langle \mu, \varphi \rangle \quad \text{et} \quad c_n^- := \langle \mu, \psi^{n-} \rangle.$$

On a

$$c_n = ca^{2n}c_\varphi - c_n^-.$$

Rappelons qu'on a supposé $a < \ell^{1/2}$. D'après la proposition 2.7 et le corollaire 2.8, la série de fonctions

$$\Phi^+ := \sum_{n \geq 0} ca^{2n}(\Lambda^n \varphi - c_\varphi)$$

converge ponctuellement vers une fonction p.s.h. En particulier, Φ^+ est localement bornée supérieurement. La proposition 2.7 et le corollaire 2.8 appliqués aux fonctions ψ^{n-} impliquent aussi que la série de fonctions

$$\Phi^- := \sum_{n \geq 0} (\Lambda^n \psi^{n-} - c_n^-)$$

converge ponctuellement vers une fonction p.s.h.

Notons \mathcal{E}_Q^a l'ensemble où Φ^- vaut $-\infty$. C'est un ensemble pluripolaire. Pour $z \notin \mathcal{E}_Q^a$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \langle \mu_n^z, \psi^n \rangle - \sum_{n \geq 0} \langle \mu, \psi^n \rangle &= \sum_{n \geq 0} (\langle \mu_n^z, \psi^n \rangle - c_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} ca^{2n} (\langle \mu_n^z, \varphi \rangle - c_\varphi) - \sum_{n \geq 0} (\langle \mu_n^z, \psi^{n-} \rangle - c_n^-) \\ &= \Phi^+(z) - \Phi^-(z) < +\infty. \end{aligned}$$

Or la somme $\sum \langle \mu, \psi^n \rangle$ est finie comme on l'a montré ci-dessus. La somme $\sum \langle \mu_n^z, \psi^n \rangle$ est donc aussi finie. \square

LEMME 3.4. — *Il existe un polynôme P (indépendant de U, V) et une constante $A_1 > 0$ (dépendante de U, V) tels que pour tout point $z \in V \setminus (P = 0)$ la boule $B_0 := B(z, r_0)$ admette exactement d_t branches inverses régulières d'ordre 1 pour F , où $r_0 := A_1 |P(z)|$.*

Démonstration. — Notons $Z := |Y|$ le support de Y et m_2 le degré de l'application $\pi_{2|Z}$. Soit Σ_2 l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^k$ tels que $(\pi_{2|Z})^{-1}(z)$ contienne moins de m_2 points. C'est un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^k . Il existe donc un polynôme P_1 tel que $\Sigma_2 \subset (P_1 = 0)$. Définissons de la même manière l'ensemble des valeurs critiques Σ_1 de $\pi_{1|Z}$ et posons $\Sigma' := F(\Sigma_1)$. Soit P_2 un polynôme tel que $\Sigma' \subset (P_2 = 0)$. Posons $P = P_1^m P_2^m$ où $m \geq 1$ est un entier assez grand.

Soit $A_1 > 0$ une constante assez petite. Puisque A_1 est petite et m est grand, $(\pi_{2|Z})^{-1}B_0$ contient exactement m_2 composantes connexes et la restriction de π_1 à chacune de ces composante est injective.

Soit \widehat{B}_{-1} une composante connexe de $\pi_2^{-1}(B_0) \cap Y_i^*$, pour un certain indice i . La suite $B_{-1}, (\widehat{B}_{-1}, i_1), B_0$ avec $i_1 := i$ et $B_{-1} := \pi_1(\widehat{B}_{-1})$, est une branche inverse régulière d'ordre 1 de B_0 . Il y a exactement d_2 branches. \square

Notons \mathcal{E}_1 l'orbite de $(P = 0)$ par $(F^n)_{n \geq 0}$. Par définition, tout point $z \notin \mathcal{E}_1$ admet d_2^n branches inverses d'ordre n . Posons $\mathcal{E}' := \mathcal{E}_P \cup \mathcal{E}_1$. Il est clair que \mathcal{E}' est pluripolaire.

Fixons maintenant des constantes δ avec $0 < \delta < 1$, a avec $1 < a < \ell^{(1-\delta)/2}$, ε avec $0 < \varepsilon < 1$ et un point $z \in V \setminus \mathcal{E}'$. Nous allons montrer que la boule $B(z, r)$ possède au moins $(1 - \varepsilon)d_2^n$ branches inverses régulières d'ordre n et de taille $(\ell^{-(1-\delta)m/2})$ pour $r > 0$ assez petit.

Fixons une droite Δ passant par z . Notons Δ_R le disque de centre z et de rayon R dans Δ . Rappelons le lemme de comparaison aire-diamètre dû à Briend-Duval [4]. Ce lemme est valable pour un cas plus général. Dans le cas présent, on peut le montrer en utilisant la formule de Cauchy.

LEMME 3.5. — *Soient π une application holomorphe du disque unité $D := D(0, 1)$ dans U et τ une constante vérifiant $0 < \tau < 1$. Alors il*

existe une constante $A_2 > 0$ indépendante de π et de τ telle que le diamètre de $\pi(D(0, 1 - \tau))$ soit plus petit ou égal à $A_2\sqrt{\tau^{-1} \text{aire}(\pi(D))}$, les points de $\pi(D)$ étant comptés avec multiplicité.

Nous allons montrer la proposition suivante dans laquelle la constante $A_3 > 1$ sera donnée dans le lemme 3.8.

PROPOSITION 3.6. — Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $r > 0$ et $n_0 \geq 0$ indépendants de Δ tels que $\Delta_{A_3 r}$ possède au moins $(1 - \varepsilon_1)d_1^n$ branches inverses régulières \mathcal{B} d'ordre n , de taille $(\frac{1}{2}\ell^{-(1-\delta)m/2})$ et telles que $|P(F_{\mathcal{B}}^{-m}(z))| \geq a^{-m}$ pour tout $n_0 \leq m \leq n$.

Fixons $n_0 \geq 1$ assez grand tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- 1) $A_1 a^{-n} > \ell^{-(1-\delta)n/2}$ pour tout $n \geq n_0$,
- 2) $\sum_{n \geq n_0+1} \mu_n^z(\mathcal{V}_P(a^{-n})) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$,
- 3) $\sum_{n \geq n_0+1} n^2 \ell^{-\delta n} \leq \frac{1}{8}\varepsilon_1 A_2^{-2}$.

Posons

$$\nu_m := \sum_{n=n_0+1}^m \mu_n^z(\mathcal{V}_P(a^{-n})), \quad \delta_m := 4A_2^2 \sum_{n=n_0+1}^m n^2 \ell^{-\delta n}.$$

Fixons $r_1 > 0$ assez petit tel que pour tout $n \leq n_0$, $B(z, r_1)$ possède exactement d_2^n branches inverses régulières d'ordre n de taille $(\frac{1}{2}\ell^{-(1-\delta)m/2})$. Posons pour tout $n \geq n_0 + 1$

$$r_n := \prod_{s=n_0+1}^n \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) r_1.$$

Cette suite (r_n) décroît vers une constante $A_3 r > 0$. Il suffit pour la proposition 3.6 de montrer par récurrence sur $n \geq n_0$ que Δ_{r_n} possède au moins $(1 - \nu_n - \delta_n)d_2^n$ branches inverses régulières \mathcal{B} d'ordre n , de taille $(\frac{1}{2}\ell^{-(1-\delta)m/2})$ et telles que $|P(F_{\mathcal{B}}^{-m}(z))| \geq a^{-m}$ pour tout $n_0 \leq m \leq n$. Supposons que c'est vrai au rang $n - 1 \geq n_0$. Montrons-le au rang n . Notons \mathcal{F} la famille des branches inverses régulières d'ordre $n - 1$ de $\Delta_{r_{n-1}}$ vérifiant la proposition 3.6.

Si \mathcal{B} est un élément de \mathcal{F} , d'une part, le point $w := F_{\mathcal{B}}^{-n+1}(z)$ vérifie $|P(w)| \geq a^{-n+1}$, d'autre part, l'ensemble $W := F_{\mathcal{B}}^{-n+1}(\Delta_{r_{n-1}})$ est contenu dans la boule $B(w, A_1 a^{-n+1})$ car son diamètre est plus petit que $\frac{1}{2}A_1 a^{-n+1}$. Or, d'après le lemme 3.4, cette boule $B(w, A_1 a^{-n+1})$ admet exactement d_2 branches inverses régulières d'ordre 1. On en déduit que W admet aussi d_2 branches inverses régulières d'ordre 1. Ceci est vrai pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$. En somme, $\Delta_{r_{n-1}}$ possède au moins $(1 - \nu_{n-1} - \delta_{n-1})d_2^n$ branches inverses régulières d'ordre n . Notons \mathcal{G} cette famille de branches inverses. On a le lemme suivant.

LEMME 3.7. — La somme $\sum \text{aire}(F_{\mathcal{B}}^{-n}(\Delta_{r_{n-1}}))$ pour $\mathcal{B} \in \mathcal{G}$ est plus petite que $d_2^n \ell^{-n}$.

Démonstration. — Notons $[\Delta]$ le courant d'intégration sur Δ . Il suffit de majorer la masse de $(F^n)^*[\Delta]$ par $d_2^n \ell^{-n}$. On a d'après un lemme de comparaison (voir [34] ou [14, prop. 5.4])

$$\begin{aligned} \|(F^n)^*[\Delta]\| &= \langle (F^n)^*[\Delta], \omega \rangle = \langle [\Delta], (F^n)_*\omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} d_2^n \ell^{-n} \int_{\Delta} dd^c(\ell^n \Lambda^n \log(1 + \|z\|^2)) \\ &\leq \frac{1}{2} d_2^n \ell^{-n} \int_{\Delta} dd^c \log(1 + \|z\|^2) = d_2^n \ell^{-n} \int_{\Delta} \omega = d_2^n \ell^{-n}. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus est une conséquence du fait que

$$\ell^n \Lambda^n \log(1 + \|z\|^2) - \log(1 + \|z\|^2)$$

est bornée supérieurement. □

Fin de la démonstration de la proposition 3.6. — Notons \mathcal{G}_1 l'ensemble des branches inverses régulières $\mathcal{B} \in \mathcal{G}$ telles que l'aire de $F_{\mathcal{B}}^{-n}(\Delta_{r_{n-1}})$ excède $\frac{1}{4} A_2^{-2} n^{-2} \ell^{-(1-\delta)n}$. Alors \mathcal{G}_1 contient au plus $4A_2^2 n^2 \ell^{-\delta n} d_2^n$ éléments d'après le lemme 3.7. Par conséquent, le cardinal de la famille $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_1$ est au moins égal à

$$\#\mathcal{G} - \#\mathcal{G}_1 \geq (1 - \nu_{n-1} - \delta_{n-1})d_2^n - 4A_2^2 n^2 \ell^{-\delta n} d_2^n = (1 - \nu_{n-1} - \delta_n)d_2^n.$$

D'après le lemme 3.5 (appliqué à $F_{\mathcal{B}}^{-n}$ sur les disques $\Delta_{r_{n-1}}$ et Δ_{r_n}), le diamètre de $F_{\mathcal{B}}^{-n}(\Delta_{r_n})$ est au plus égal à $\frac{1}{2} \ell^{-(1-\delta)n/2}$ pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{G}'$.

Notons \mathcal{G}_2 la famille des éléments $\mathcal{B} \in \mathcal{G}'$ tels que $F_{\mathcal{B}}^{-n}(z) \in \mathcal{V}_P(a^{-n})$. Alors \mathcal{G}_2 contient au plus $\mu_n^z(\mathcal{V}_P(a^{-n}))d_2^n$ éléments. Par conséquent, la famille $\mathcal{G}'' := \mathcal{G}' \setminus \mathcal{G}_2$ contient au moins

$$(1 - \nu_{n-1} - \delta_n)d_2^n - \mu_n^z(\mathcal{V}_P(a^{-n}))d_2^n = (1 - \nu_n - \delta_n)d_2^n$$

éléments. Cette famille \mathcal{G}'' de branches inverses régulières d'ordre n de F vérifie la proposition 3.6. □

Fin de la démonstration de la proposition 3.2. — Prenons $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$ et notons \mathcal{W} la famille des droites complexes passant par z . Cette famille est paramétrée par l'espace projectif \mathbb{P}^{k-1} . Notons \mathcal{H}_{2k-2} la mesure de Hausdorff $(2k - 2)$ -dimensionnelle de masse 1 sur \mathcal{W} . Notons également \mathcal{F}_n la famille des branches inverses régulières d'ordre n de z . Cette famille contient exactement d_2^n éléments car $z \notin \mathcal{E}_1$. Pour tout $\mathcal{B}_z \in \mathcal{F}_n$ notons $\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}$ la famille des droites $\Delta \in \mathcal{W}$ telles que $\Delta_{A_{3r}}$ possède une branche inverse régulière d'ordre n , accrochée à la branche \mathcal{B}_z et vérifiant les propriétés dans la proposition 3.6. D'après cette proposition, on a $\sum_{\mathcal{B}_z} \mathcal{H}_{2k-2}(\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}) \geq (1 - \varepsilon_1)d_2^n$ lorsque $r > 0$ est suffisamment petit. Notons \mathcal{F}'_n la famille des \mathcal{B}_z tels que $\mathcal{H}_{2k-2}(\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}) \geq \frac{1}{2}$. Du fait que $\mathcal{H}_{2k-2}(\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}) \leq 1$ pour tout \mathcal{B}_z , on a

$$\#\mathcal{F}'_n + \frac{1}{2}(d_2^n - \#\mathcal{F}'_n) \geq \sum \mathcal{H}_{2k-2}(\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}) \geq (1 - \varepsilon_1)d_2^n.$$

On en déduit que $\#\mathcal{F}'_n \geq (1 - 2\varepsilon_1)d_2^n = (1 - \varepsilon)d_2^n$. On va appliquer le théorème de Sibony-Wong suivant pour chaque $\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}$ avec $\mathcal{B}_z \in \mathcal{F}'_n$.

LEMME 3.8 (voir [1], [35]). — Soit $\alpha > 0$ une constante positive. Soit $A_3 > 1$ une constante suffisamment grande et soit \mathcal{W}' une famille de droites passant par z . Supposons que $\mathcal{H}_{2k-2}(\mathcal{W}') \geq \alpha$. Notons Σ l'intersection de ces droites avec la boule $B(z, A_3r)$. Alors toute application holomorphe f d'un voisinage de Σ d'image dans \mathbb{C}^k se prolonge en application holomorphe de $B(z, r)$ dans \mathbb{C}^k . De plus, on a

$$\sup_{w \in B(z, r)} \|f(w) - f(z)\| \leq \sup_{w \in \Sigma} \|f(w) - f(z)\|.$$

En particulier, on a $\text{diam } f(B(z, r)) \leq 2 \text{diam } f(\Sigma)$.

On prend $\alpha = \frac{1}{2}$. Fixons $\mathcal{B}_z \in \mathcal{F}'_n$. Notons K_0 l'intersection des droites de $\mathcal{W}_{\mathcal{B}_z}$ avec $B(z, A_3r)$ et \mathcal{B} sa branche inverse régulière d'ordre n accrochée à \mathcal{B}_z . D'après le lemme 3.8, l'application $F_{\mathcal{B}}^{-m}$, qui est holomorphe au voisinage de K_0 , se prolonge en une application holomorphe de $B(z, r)$ dans \mathbb{C}^k pour tout $1 \leq m \leq n$. De plus, son image est de diamètre au plus $\ell^{-(1-\delta)m/2}$. Les applications obtenues sont injectives. En effet, on montre par récurrence que l'image de $B(z, r)$ par $F_{\mathcal{B}}^{-m}$ est contenue dans la boule de rayon $A_1|P(F_{\mathcal{B}}^{-m}(z))|$ centrée en $F_{\mathcal{B}}^{-m}(z)$ (voir le lemme 3.4). Chaque prolongement holomorphe fournit une branche inverse régulière d'ordre n , de taille $(\ell^{-(1-\delta)m/2})$ pour la boule $B(z, r)$. Ceci termine la preuve de la proposition 3.2. \square

La suite de ce paragraphe a été démontrée en collaboration avec Charles Favre.

Notons PC_1 l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^k$ tels que au moins un des germes locaux irréductibles de Y en $\pi_2^{-1}(z) \cap Y$ ne se projette pas injectivement par π_2 sur \mathbb{C}^k . C'est une hypersurface de \mathbb{C}^k . Soit S_1 le courant d'intégration sur PC_1 . Posons

$$S_n := (F^{n-1})_*(S_1), \quad S := \sum_{n \geq 1} d_2^{-n+1} S_n.$$

Ce sont des courants positifs fermés de bidegré $(1, 1)$ de \mathbb{C}^k . Le courant S est bien défini car d'après le lemme 2.2, la masse de $d_2^{-n} S_n$ est de l'ordre de ℓ^{-n} . Soient $\text{PC}_n := \bigcup_{i=1}^n \text{supp}(S_i)$ et $\text{PC}_\infty := \text{supp}(S)$ les ensembles postcritiques d'ordre n et d'ordre infini de F . Posons également $\Sigma := Y \cap \pi_2^{-1}(\text{PC}_1)$.

Soit K_0 un disque holomorphe de centre z , une famille de disques holomorphes centrés en z ou une boule de centre z . On ne considère que les disques holomorphes plats qui ne sont pas contenus dans PC_∞ . On appelle *branche inverse d'ordre n de K_0* (voir la figure 2) toute suite \mathcal{B}

$$K_{-n}, (\widehat{K}_{-n}, i_n), K_{-n+1}, \dots, K_{-1}, (\widehat{K}_{-1}, i_1), K_0$$

munie des applications holomorphes $\widehat{F}_{\mathcal{B}}^{-m} : K_0 \longrightarrow \widehat{K}_{-m}$ telle que

- (i) les ensembles $K_{-m} \subset \mathbb{C}^k$, $\widehat{K}_{-m} \subset Y_{i_m}^* \setminus \Sigma$ sont connexes ;
 - $\pi_1(\widehat{K}_{-m}) = K_{-m}$, $\pi_2(\widehat{K}_{-m}) = K_{-m+1}$ pour $1 \leq m \leq n$;
 - (ii) $\pi_2 \circ \widehat{F}_{\mathcal{B}}^{-1} = \text{id}$ et $\pi_1 \circ \widehat{F}_{\mathcal{B}}^{-m+1} = \pi_2 \circ \widehat{F}_{\mathcal{B}}^{-m}$ pour tout $2 \leq m \leq n$.
- On n'exige pas que $\pi_1|_{\widehat{K}_{-n}}$ soit injective. Posons $F_{\mathcal{B}}^{-m} := \pi_1 \circ \widehat{F}_{\mathcal{B}}^{-m}$.

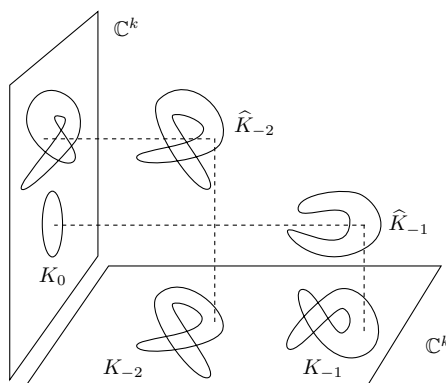


FIGURE 2. Branche inverse non régulière.

Fixons un point $w \in K_0$. La branche inverse \mathcal{B} de K_0 est accrochée à la branche inverse régulière \mathcal{B}_w de w donnée par la suite

$$w_{-n}, (\widehat{w}_{-n}, i_n), w_{-n+1}, (\widehat{w}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, w_{-1}, (\widehat{w}_{-1}, i_1), w_0$$

où $w_0 := w$, $\widehat{w}_{-m} := \widehat{F}_{\mathcal{B}}^{-m}(w_0)$ et $w_{-m} := \pi_1(\widehat{w}_{-m})$. Par unicité du prolongement analytique, la branche \mathcal{B} est uniquement déterminée par la branche \mathcal{B}_w . Autrement dit, si deux branches inverses d'ordre n de K_0 sont accrochées à une même branche régulière \mathcal{B}_w , alors elles sont égales. On en déduit que K_0 possède au plus d_2^n branches inverses d'ordre n . Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3.9. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Soit $z \in \mathbb{C}^k$ un point tel que le nombre de Lelong de S en z vérifie $\nu(S, z) < 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta > 0$, la boule $B(z, r)$ possède au moins $(1 - \nu(S, z) - \varepsilon)d_2^n$ branches inverses d'ordre n de taille $(\ell^{-(1-\delta)m/2})$ où $r > 0$ est une constante indépendante de n .*

Notons que ce théorème a été prouvé dans [13] pour les endomorphismes holomorphes de degré $d \geq 2$ de \mathbb{P}^k (généralement pour les applications d'allure polynomiale de grand degré topologique). Dans ce cas, les branches inverses sont de taille $(\simeq d^{-m/2})$. Indépendamment, dans une note non publiée, Briend-Duval ont construit les branches inverses sur les boules par une autre méthode. Ils ont montré que la taille de ces branches tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Les

branches inverses sur les disques ont été déjà construites dans [4]. Le lecteur trouvera dans [10] d'autre version du théorème 3.9 avec des applications.

Pour prouver ce théorème, il suffit de construire des branches inverses pour des disques holomorphes plats centrés en z . Les deux arguments suivants permettent d'adapter la preuve de la proposition 3.2.

1) Fixons $r' > 0$ assez petit. Notons s_n le nombre de points d'intersection de $\Delta_{r'}$ avec $F^{n-1}(\text{PC}_1)$, c'est-à-dire la masse de la mesure d'intersection de $[\Delta_{r'}]$ avec le courant S_n . Ce nombre s_n est aussi égal à la masse de la mesure d'intersection de S_1 avec $(F^{n-1})^*[\Delta_{r'}]$. Notons \mathcal{W}' la famille des droites Δ telles que $\sum d_2^{-n+1} s_n \leq \nu(S, z) + \varepsilon$. Par tranchage, si r' est suffisamment petit, on a $\mathcal{H}_{2k-2}(\mathcal{W}') \geq \frac{1}{2}$.

2) Fixons un Δ dans \mathcal{W}' . On construit, par récurrence sur n , au moins

$$N_n := d_2^n \left(1 - \sum_{m=1}^n d_2^{-m+1} s_m \right)$$

branches inverses d'ordre n pour $\Delta_{r'}$. Résumons le passage du rang $n-1$ au rang n . Par définition de s_n , il existe au moins $N_{n-1} - s_n$ branches inverses \mathcal{B} d'ordre $n-1$ de $\Delta_{r'}$

$$K_{-n+1}, (\widehat{K}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, K_{-1}, (\widehat{K}_{-1}, i_1), K_0$$

avec $K_0 = \Delta_{r'}$ telles que l'ensemble $F_{\mathcal{B}}^{-n+1}(\Delta_{r'})$, qui est égal à K_{-n+1} , ne rencontre pas PC_1 . D'autre part, l'application π_2 définit un revêtement non ramifié de degré d_2 de $Y \setminus \Sigma$ au-dessus de $\mathbb{C}^k \setminus \text{PC}_1$. L'ensemble $\Delta_{r'}$ étant simplement connexe, on peut construire, pour une telle branche \mathcal{B} , exactement d_2 applications holomorphes τ de $\Delta_{r'}$ dans un des Y_i^* telles que $\pi_2 \circ \tau = F_{\mathcal{B}}^{-n+1}$. On obtient donc au moins N_n branches inverses \mathcal{B}' d'ordre n de $\Delta_{r'}$

$$K_{-n}, (\widehat{K}_{-n}, i_n), \dots, K_{-1}, (\widehat{K}_{-1}, i_1), K_0$$

en posant $i_n := i$, $\widehat{F}_{\mathcal{B}'}^{-n} := \tau$, $\widehat{K}_{-n} := \tau(\Delta_{r'})$ et $K_{-n} := \pi_1(\widehat{K}_{-n})$. \square

COROLLAIRE 3.10. — Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Alors l'ensemble exceptionnel \mathcal{E} de F est égal à $\bigcup_{n \geq 0} F^n(\mathcal{E}_0)$ où \mathcal{E}_0 est le plus grand sous-ensemble algébrique propre de \mathbb{C}^k vérifiant $F^{-1}(\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}_0$.

Démonstration. — Pour tout $\nu > 0$, notons X_ν l'ensemble des points z tels que $\nu(S, z) \geq \nu$. C'est un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^k contenu dans PC_∞ . Soient $z \notin X_\nu$ avec $\nu < 1$, ε et $B(z, r)$ vérifiant le théorème 3.9. D'après la proposition 3.1, pour un point générique $w \in B(z, r)$, on a $\lim \mu_n^w = \mu$. Considérons une valeur adhérente μ^z de la suite de mesures (μ_n^z) et μ_{reg}^z sa partie absolument continue par rapport à μ . D'après le théorème 3.9, z et w possèdent au moins $d_2^n(1 - \nu - \varepsilon)$ images réciproques z_{-n} et w_{-n} d'ordre n telles que la distance entre z_{-n} et w_{-n} soit majorée par $\ell^{-(1-\delta)n/2}$. On en

déduit que la masse de μ_{reg}^z est au moins égale à $1 - \nu - \varepsilon$. Donc elle est au moins égale à $1 - \nu$. On déduit aussi que $\mathcal{E} \subset \bigcup_{\nu > 0} X_\nu \subset \text{PC}_\infty$.

Notons \mathcal{E}_{X_ν} l'ensemble des points z tels que $F^{-n}(z) \subset X_\nu$ pour tout $n \geq 0$. C'est le plus grand sous-ensemble algébrique de X_ν qui vérifie $F^{-1}(\mathcal{E}_{X_\nu}) \subset \mathcal{E}_{X_\nu}$. Il est clair que $\mathcal{E}_{X_\nu} \subset \mathcal{E}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^k$, posons

$$\tilde{\mu}_0^z := \mathbf{1}_{X_\nu} \delta_z, \quad \tilde{\mu}_n^z := d_2^{-1} \mathbf{1}_{X_\nu} F^*(\tilde{\mu}_{n-1}^z).$$

Les masses de $\tilde{\mu}_n^z$ décroissent vers une constante $\tau_\nu(z)$. De la même manière que dans [13, §§ 3.4.1–3.4.3], on montre que

$$\tilde{\mathcal{E}}_{X_\nu} := \bigcup_{n \geq 0} F^n(\mathcal{E}_{X_\nu})$$

contient l'ensemble ($\tau_\nu > 0$). La mesure μ_n^z étant égale à la moyenne des mesures μ_m^a avec $a \in F^{-n+m}(z)$ et $m \leq n$, si $\tau_\nu(z) = 0$ la masse de μ_{reg}^z est, comme pour $z \notin X_\nu$, au moins égale à $1 - \nu$. En particulier, μ_{reg}^z est de masse totale si z n'appartient pas à $\bigcup_{\nu > 0} \tilde{\mathcal{E}}_{X_\nu}$. Dans ce cas, la mesure μ^z est égale à μ_{reg}^z et ne charge pas PC_∞ . Ceci implique que $\mu_n^z(\text{PC}_\infty)$ tend vers 0. Or $\mathcal{E} \subset \text{PC}_\infty$. On déduit qu'alors $\lim \mu_n^z = \mu$ et par conséquent $\mathcal{E} = \bigcup_{\nu > 0} \tilde{\mathcal{E}}_\nu$.

Montrons que $\mathcal{E}_{X_\nu} = \mathcal{E}_{X_1}$ pour tout $0 < \nu < 1$. Il est clair que $\mathcal{E}_{X_\nu} \supset \mathcal{E}_{X_1}$. Observons que d'après le théorème 3.9, si $z \notin \mathcal{E}_{X_1}$ on a $\mu_{\text{reg}}^z \neq 0$. Si z appartient à \mathcal{E}_{X_ν} , les mesures μ_n^z sont portées par X_ν . Donc $\mu_{\text{reg}}^z = 0$ car μ ne charge pas les ensembles analytiques et μ_n^z est absolument continue par rapport à μ . D'où on déduit que $z \in \mathcal{E}_{X_1}$.

On a montré que $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}_{X_1}$. Posons

$$\mathcal{E}_0 := \bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\mathcal{E}_{X_1}).$$

C'est un sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^k vérifiant $F^{-1}(\mathcal{E}_0) = \mathcal{E}_0$. De plus, \mathcal{E}_0 est égal à l'intersection d'une famille finie d'ensembles algébriques $F^{-n}(\mathcal{E}_{X_1})$. On a donc $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}_{X_1} = \bigcup_{n \geq 0} F^n(\mathcal{E}_0)$. Si \mathcal{E}'_0 est un sous-ensemble algébrique vérifiant $F^{-1}(\mathcal{E}'_0) = \mathcal{E}'_0$, on montre comme on l'a fait pour \mathcal{E}_{X_ν} que $\mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}_{X_1}$. La propriété $F^{-1}(\mathcal{E}'_0) = \mathcal{E}'_0$ implique que $\mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}_0 = \bigcap_{n \geq 0} F^{-n}(\mathcal{E}_{X_1})$. D'où on déduit que \mathcal{E}_0 est le plus grand sous-ensemble algébrique propre de \mathbb{C}^k invariant par F^{-1} . \square

Lorsque F est une application polynomiale [13], on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$; l'existence de points périodiques répulsifs implique que la pseudo-métrique de Kobayashi de $\mathbb{C}^k \setminus \mathcal{E}_0$ est identiquement nulle; si X est un sous-ensemble algébrique vérifiant $F^{-1}(X) \subset X$ alors $F^{-1}(X) = X$ et $F(X) = X$. Toutes ces propriétés sont fausses en général pour les correspondances comme on le voit dans les exemples suivants.

EXEMPLES 3.11. — Les correspondances suivantes sont polynomiales sur \mathbb{C} . Leurs exposants de Lojasiewicz sont strictement supérieurs à 1.

Considérons les polynômes d'une variable $f(z) := z^3$ et $g(z) := z^2 - z$ et la correspondance $F := f \circ g^{-1}$ sur \mathbb{C} associée à la courbe $Y = \{(g(z), f(z)), z \in \mathbb{C}\}$ de \mathbb{C}^2 . On vérifie que $\mathcal{E}_0 = \{0\}$ et $\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 0} (f \circ g^{-1})^n(0)$. On vérifie aussi que 0 n'est pas isolé dans \mathcal{E} et donc l'ensemble \mathcal{E} est parfait.

Notons (z_1, z_2) les coordonnées de \mathbb{C}^2 . Soient f, g deux polynômes d'une variable tels que $1 < \deg(g) < \deg(f)$. Considérons la correspondance F donnée par la courbe $Y := \{[f(z_1)]^2 + f(z_2)g(z_2) = 0\}$. On a $F^{-1}(f = 0) = (f = 0)$ et donc $(f = 0) \subset \mathcal{E}_0$. L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}_0$ est Kobayashi hyperbolique lorsque f possède deux racines distinctes.

REMARQUE 3.12. — On peut étudier la restriction de la correspondance F à \mathcal{E}_0 , c'est-à-dire la correspondance sur \mathcal{E} dont le graphe est égal à $Y \cap (\mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_0)$, et construire sur \mathcal{E}_0 une mesure invariante par F^* qui ne charge pas les sous-ensembles pluripolaires de \mathcal{E}_0 . En faisant une récurrence descendante sur la dimension et sur le nombre de composantes du graphes, on montre que le cône des mesures positives ν qui vérifient $F^*(\nu) = d_2\nu$, est de dimension fini. Pour tout $z \in \mathbb{C}^k$, les valeurs adhérentes à la suite (μ_n^z) sont singulières par rapport à μ si et seulement si $z \in \mathcal{E}_0$ (voir aussi [12], [10]).

4. Points périodiques répulsifs

On appelle *point fixe* de F tout point z appartenant à l'ensemble $\pi_2(Y \cap \text{Diag})$ où Diag est la diagonale de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$. Les points fixes isolés de F sont comptés avec multiplicités. Les *points périodiques de période n* sont les points fixes de F^n . On dira que z_0 est un *point périodique régulier de période n* s'il existe une branche inverse régulière d'ordre n d'un voisinage ouvert K_0 de z_0

$$K_{-n}, (\widehat{K}_{-n}, i_n), K_{-n+1}, (\widehat{K}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, K_{-1}, (\widehat{K}_{-1}, i_1), K_0$$

qui est accrochée à une branche inverse régulière \mathcal{B}_0 d'ordre n de z donnée par la suite

$$z_{-n}, (\widehat{z}_{-n}, i_n), z_{-n+1}, (\widehat{z}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, z_{-1}, (\widehat{z}_{-1}, i_1), z_0$$

avec $z_{-n} = z_0$. Si, de plus, les valeurs propres de la dérivée de $F_{\mathcal{B}_0}^{-n}$ en z_0 sont de module strictement plus petit que 1, on dit que z_0 est *périodique régulier répulsif*. La proposition suivante donne le nombre de points périodiques (voir [10] pour le cas des correspondances sur les variétés kählériennes compactes).

PROPOSITION 4.1. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Alors F admet exactement d_2^n points périodiques de période n comptés avec multiplicités. Si G est une autre correspondance polynomiale de degré topologique (p_1, p_2) alors pour n assez grand $G \circ F^n$ admet exactement $p_2 d_2^n$ points fixes comptés avec multiplicités.*

Démonstration. — Puisque l'exposant de Lojasiewicz de F est supérieur à 1, le choix de la boule V entraîne que $(\text{Diag} \cap Y) \subset (V \times V)$. De plus, on a $Y \cap (bV \times V) = \emptyset$. Pour tout $0 \leq t \leq 1$, posons

$$\text{Diag}(t) := \{(x, tx) \text{ avec } x \in \mathbb{C}^k\}.$$

C'est un sous-espace de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$ et on a $\text{Diag}(1) = \text{Diag}$. Comme $Y \cap (bV \times V)$ est vide, le nombre de points d'intersection de $Y \cap (V \times V)$ avec $\text{Diag}(t)$ ne dépend pas de t . Quand $t = 0$, ce nombre est exactement le nombre de préimages de 0 dans V compté avec multiplicités; il est donc égal à d_2 . Par conséquent, F admet exactement d_2 points fixes. De même, on montre que F^n admet exactement d_2^n points fixes. Ce sont les points périodiques de période n de F .

Pour n assez grand, l'exposant de Lojasiewicz de $G \circ F^n$ est strictement plus grand que 1. Par conséquent, $G \circ F^n$ admet exactement $p_2 d_2^n$ points fixes. \square

Le théorème suivant généralise un résultat de Lyubich [26] qui a considéré le cas des fractions rationnelles de \mathbb{P}^1 .

THÉORÈME 4.2. — *Soient F une correspondance comme au théorème 2.1 et G une autre correspondance polynomiale de degré topologique (p_1, p_2) et d'exposant de Lojasiewicz quelconque. Notons PR_n^G l'ensemble des points fixes réguliers répulsifs de $G \circ F^n$. Alors la suite de mesures*

$$\nu_n^+ := p_2^{-1} d_2^{-n} \sum_{z \in \text{PR}_n^G} \delta_z$$

tend faiblement vers la mesure d'équilibre μ de F .

En prenant $G(z) = z$, on obtient le corollaire suivant qui généralise un théorème de Lyubich [26], de Freire-Lopes-Mañé [20] et de Briend-Duval [3]. Ces auteurs ont considéré le cas des endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k .

COROLLAIRE 4.3. — *Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Notons PR_n l'ensemble des points périodiques réguliers répulsifs de période n de F . Alors la suite de mesures*

$$\nu_n := d_2^{-n} \sum_{z \in \text{PR}_n} \delta_z$$

tend faiblement vers la mesure d'équilibre μ de F .

Nous allons adapter une méthode de Briend-Duval [3] qui traite le cas des endomorphismes holomorphes de \mathbb{P}^k . Il s'agit d'une application de la proposition 3.2 et du mélange sur une extension naturelle du système dynamique associé à F (voir [8]). Cependant, les propriétés d'invariance et de mélange de la mesure d'équilibre dans notre cas sont plus faibles que dans le cas des endomorphismes. Plus précisément, la mesure μ n'est pas F_* -invariante, ce qui nous oblige à construire différemment la mesure associée à l'extension naturelle de F . Cette mesure ne sera pas invariante en général.

On a défini dans le lemme 3.4 un polynôme P tel que tout point de $(P \neq 0)$ admet d_2 branches inverses régulières d'ordre 1. Soit Q un polynôme analogue associé à G . Notons Λ l'opérateur de Perron-Frobenius associé à F et Λ_G celui associé à G . Notons $Z = \sum Z_i^*$ la k -chaîne holomorphe associée à G . Notons X_0 le complémentaire de $G(\mathcal{E}') \cup (Q = 0)$ où \mathcal{E}' est l'orbite de $(P = 0)$ par F . Du fait que μ ne charge pas les ensembles pluripolaires, X_0 est de μ mesure totale.

Dans la suite, nous allons changer un peu la terminologie « branche inverse régulière » pour l'adapter à la suite $(G \circ F^n)$. Soit K_1 un sous-ensemble connexe de \mathbb{C}^k . On appelle *branche inverse régulière d'ordre n* de K_1 toute suite \mathcal{B}

$$K_{-n}, (\widehat{K}_{-n}, i_n), K_{-n+1}, (\widehat{K}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, K_{-1}, (\widehat{K}_{-1}, i_1), K_0, (\widehat{K}_0, i), K_1$$

vérifiant les conditions suivantes

- (i) Les ensembles $K_{-m} \subset \mathbb{C}^k$ sont connexes pour $m \geq -1$, $\widehat{K}_{-m} \subset Y_{i_m}^*$ pour $m \geq 1$, $\widehat{K}_0 \subset Z_i^*$;
- (ii) π_1 définit une bijection de \widehat{K}_{-m} dans K_{-m} et π_2 définit une bijection de \widehat{K}_{-m} dans K_{-m+1} pour $0 \leq m \leq n$.

Si K_1 n'est pas un ouvert (par exemple si K_1 est un point), on exige aussi que les applications ci-dessus définissent des bijections holomorphes entre un voisinage de \widehat{K}_{-m} et ses images. Notons $\mathbf{F}_{\mathcal{B}}^{-m}$ l'application

$$(\pi_{1|\widehat{K}_{-m}}) \circ (\pi_{2|\widehat{K}_{-m}})^{-1} \circ \dots \circ (\pi_{1|\widehat{K}_0}) \circ (\pi_{2|\widehat{K}_0})^{-1}$$

pour $1 \leq m \leq n$. C'est une application holomorphe bijective de K_1 dans K_{-m} . Les autres notations et la terminologie sont modifiées de la même manière.

Si K_1 est une boule et si K_{-n} est strictement contenu dans K_1 , alors l'application $\mathbf{F}_{\mathcal{B}}^{-n}$ est contractée pour la métrique de Kobayashi de K_1 . Elle admet donc un point fixe attractif unique dans K_{-n} . C'est un point fixe répulsif de la correspondance $G \circ F^n$. Dans la suite, nous allons construire et compter les branches inverses régulières vérifiant cette propriété. Observons que tout point de X_0 admet exactement $p_2 d_2^n$ branches inverses régulières d'ordre n .

Notons X l'ensemble des branches inverses régulières d'ordre infini d'un point $x_1 \in X_0$ définies par les suites infinies

$$\dots, x_{-n}, (\widehat{x}_{-n}, i_n), x_{-n+1}, (\widehat{x}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, x_{-1}, (\widehat{x}_{-1}, i_1), x_0, (\widehat{x}_0, i), x_1,$$

x désignera la suite infinie ci-dessus. La notation X_n désignera l'ensemble des branches inverses régulières $x^{(n)}$ d'ordre n données par les suites finies

$$x_{-n}, (\widehat{x}_{-n}, i_n), x_{-n+1}, (\widehat{x}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, x_{-1}, (\widehat{x}_{-1}, i_1), x_0, (\widehat{x}_0, i), x_1.$$

Notons \mathcal{A}_0 la σ -algèbre des boréliens de X_0 . Considérons la σ -algèbre \mathcal{A} de X engendrée par les ensembles

$$A_{-m}(S) := \{x \in X, x_{-m} \in S\}$$

où S est un élément de \mathcal{A}_0 et $m \geq -1$. Définissons une mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ sur X . Soient X_{-m} des éléments de \mathcal{A}_0 . Posons

$$A(S_1, S_0, \dots, S_{-m}) := A_1(S_1) \cap \dots \cap A_{-m}(S_{-m}),$$

$$\tilde{\mu}(A(S_1, S_0, \dots, S_{-m})) := \langle \mu, \mathbf{1}_{S_1} \Lambda_G(\mathbf{1}_{S_0} \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-1}} (\Lambda \mathbf{1}_{S_{-2}} \dots (\Lambda \mathbf{1}_{S_{-m}}) \dots))) \rangle.$$

Observons que la valeur de la fonction

$$p_2 d_2^m \mathbf{1}_{S_1} \Lambda_G(\mathbf{1}_{S_0} \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-1}} (\Lambda \mathbf{1}_{S_{-2}} \dots (\Lambda \mathbf{1}_{S_{-m}}) \dots)))$$

en x_1 est égale au nombre de branches inverses d'ordre m

$$x_{-m}, (\hat{x}_{-m}, i_m), x_{-m+1}, (\hat{x}_{-m+1}, i_{m-1}), \dots, x_{-1}, (\hat{x}_{-1}, i_1), x_0, (\hat{x}_0, i), x_1$$

de x_1 qui vérifient $x_1 \in S_1, x_0 \in S_0, \dots, x_{-m} \in S_{-m}$.

On a la condition de compatibilité suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(A(S_1, S_0, \dots, S_{-i+1}, S_{-i} \sqcup S'_{-i}, S_{-i-1}, \dots, S_{-m})) \\ = \tilde{\mu}(A(S_1, S_0, \dots, S_{-i+1}, S_{-i}, S_{-i-1}, \dots, S_{-m})) \\ + \tilde{\mu}(A(S_1, S_0, \dots, S_{-i+1}, S'_{-i}, S_{-i-1}, \dots, S_{-m})) \end{aligned}$$

lorsque S_{-i}, S'_{-i} sont disjoints et $i \geq -1$. D'après le théorème de consistance de Kolmogoroff, $\tilde{\mu}$ s'étend, de manière unique, en une mesure de probabilité sur X .

Notons $\Pi_n : X \rightarrow X_n$ la projection $\Pi_n(x) := x^{(n)}$ et $\tau_n : X_n \rightarrow X_0$ la projection $\tau_n(x^{(n)}) := x_1$. L'application τ_n est de degré $p_2 d_2^n$ car on a supprimé tous les points donnant naissance à de mauvaises branches inverses. Pour φ une fonction sur X_n posons

$$(\tau_n)_* \varphi(a) := \sum_{\tau_n(b)=a} \varphi(b).$$

LEMME 4.4. — Soit A un élément de \mathcal{A} . Alors on a

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int p_2^{-1} d_2^{-n} (\tau_n)_* \mathbf{1}_{\Pi_n(A)} d\mu.$$

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $A = A(S_1, S_0, \dots, S_{-m})$. On a alors

$$\tilde{\mu}(A) = \int p_2^{-1} d_2^{-n} (\tau_n)_* \mathbf{1}_{\Pi_n(A)} d\mu$$

pour tout $n \geq m$. D'où le lemme. \square

LEMME 4.5. — Soit S un élément de \mathcal{A}_0 et soit A un élément de \mathcal{A} . Alors on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(A_{-n}(S) \cap A) = \mu(S) \tilde{\mu}(A)$.

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où $A = A(S_1, S_0, \dots, S_{-m})$. Posons $c := \mu(S)$ et $\varphi := \mathbf{1}_S - c$. On a pour tout $n \geq m$

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}(A_{-n}(S) \cap A) - c\tilde{\mu}(A)| &= \left| \int \mathbf{1}_{S_1} \Lambda_G(\mathbf{1}_{S_0} \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-1}} \dots \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-m}} \Lambda^{n-m} \mathbf{1}_S) \dots)) \, d\mu \right. \\ &\quad \left. - c \int \mathbf{1}_{S_1} \Lambda_G(\mathbf{1}_{S_0} \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-1}} \dots \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-m}}) \dots)) \, d\mu \right| \\ &= \left| \int \mathbf{1}_{S_1} \Lambda_G(\mathbf{1}_{S_0} \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-1}} \dots \Lambda(\mathbf{1}_{S_{-m}} \Lambda^{n-m} \varphi) \dots)) \, d\mu \right| \\ &\leq \int \Lambda_G \Lambda^m |\Lambda^{n-m} \varphi| \, d\mu. \end{aligned}$$

Notons \mathbb{C}^\perp l'orthogonal de \mathbb{C} dans $L^2(\mu)$. On a $\varphi \in \mathbb{C}^\perp$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1 + |c|$ et donc $0 \leq \Lambda_G \Lambda^m |\Lambda^{n-m} \varphi| \leq 1 + |c|$. D'après le théorème de convergence dominée, il suffit de montrer que pour tout $\psi \in \mathbb{C}^\perp$, $\Lambda^n \psi$ tend vers 0 μ -presque partout (extraire des sous-suites si nécessaire). Or, d'après le théorème 2.10, ceci est vrai pour ψ lisse. Du fait que le sous-espace des fonctions lisses est dense dans \mathbb{C}^\perp , il suffit de montrer que $\|\Lambda\|_{L^2(\mu)} \leq 1$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'invariance de μ , on a

$$\begin{aligned} \int |\Lambda \psi(z)|^2 \, d\mu(z) &= \int \frac{1}{d_2} \sum_{w \in F^{-1}(z)} |\psi(w)|^2 \, d\mu(z) \\ &\leq \int \frac{1}{d_2} \left(\sum_{w \in F^{-1}(z)} |\psi(w)|^2 \right) \, d\mu(z) = \int \Lambda(|\psi|^2) \, d\mu = \int |\psi|^2 \, d\mu. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme. \square

Fin de la démonstration du théorème 4.2. — Posons, pour tout $\delta > 0$, E_δ l'ensemble des $x \in X$ donnés par les suites

$$\dots, x_{-n}, (\hat{x}_{-n}, i_n), x_{-n+1}, (\hat{x}_{-n+1}, i_{n-1}), \dots, x_{-1}, (\hat{x}_{-1}, i_1), x_0, (\hat{x}_0, i), x_1$$

tels que la boule $B(x_1, \delta)$ admette une branche inverse régulière d'ordre infini, de taille $(\ell^{-m/4})$ et accrochée à x . D'après la proposition 3.6, l'union $\bigcup_{\delta > 0} E_\delta$ est de $\tilde{\mu}$ mesure totale. Soit $\pi : X \rightarrow X_0$ la projection $\pi(x) := x_1$. Posons

$$\mu_\delta := \pi_*(\mathbf{1}_{E_\delta} \tilde{\mu}).$$

Cette mesure tend vers μ quand δ tend vers 0. D'après la proposition 4.1, quand n est assez grand, les mesures ν_n^+ sont de masse au plus 1. Pour prouver le théorème 4.2, on montre que toute valeur adhérente ν^+ à la suite (ν_n^+) vérifie $\mu_\delta \leq \nu^+$. Fixons δ , $0 < \delta < 1$, ε , $0 < \varepsilon < \delta$ et un point $z_1 \in X_0$. Soit r vérifiant $0 < 2r < \delta - \varepsilon$. Il suffit de montrer que, pour tout n assez grand,

$$(1 - \varepsilon)\mu_\delta(\bar{B}(z_1, r)) \leq \nu_n^+(B(z_1, r + \varepsilon)).$$

Posons $S := \bar{B}(z_1, r)$ et $A := \pi^{-1}(S) \cap E_\delta$. D'après le lemme 4.5, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(A_{-n}(S) \cap A) = \mu(S)\tilde{\mu}(A) = \mu(S)\mu_\delta(S).$$

Soit n assez grand tel que $\ell^{-n/4} < \varepsilon$ et $\tilde{\mu}(A_{-n}(S) \cap A) > (1 - \varepsilon)\mu(S)\mu_\delta(S)$. Notons pour tout $z \in X_0$, $s(z)$ le nombre de branches inverses régulières \mathcal{B} d'ordre n , de taille $(\ell^{-m/4})$ de $B(z, \delta)$ telles que $\mathbf{F}_\mathcal{B}^{-n}(z) \in S$. On déduit de la dernière inégalité et du lemme 4.4 que pour n assez grand

$$\int p_2^{-1} d_2^{-n} s(z) \mathbf{1}_S d\mu \geq (1 - \varepsilon)\mu(S)\mu_\delta(S).$$

Par conséquent, il existe un point $x_1 \in S$ tel que $s(x_1) \geq (1 - \varepsilon)p_2 d_2^n \mu_\delta(S)$. Il existe donc au moins $(1 - \varepsilon)p_2 d_2^n \mu_\delta(S)$ branches inverses régulières \mathcal{B} d'ordre n , de taille $(\ell^{-m/4})$ de $B(x_1, \delta)$ telles que $z_1 := \mathbf{F}_\mathcal{B}^{-n}(x_1) \in S$. L'application $\mathbf{F}_\mathcal{B}^{-n}$ définit une application bijective de $B(x_1, \delta)$ dans $W := \mathbf{F}_\mathcal{B}^{-n}B(x_1, \delta)$. Or W est un ensemble de diamètre plus petit que ε et contient le point $z_1 \in S$. On en déduit que \overline{W} est contenu dans $B(z_1, r + \varepsilon) \subset B(x_1, \delta)$. Par conséquent, $\mathbf{F}_\mathcal{B}^{-n}$ admet un point fixe attractif unique dans $B(z_1, r + \varepsilon)$. On en déduit que $\nu_n^+(B(z_1, r + \varepsilon)) \geq (1 - \varepsilon)\mu_\delta(\overline{B}(z_1, r))$. La démonstration du théorème 4.2 est achevée. \square

REMARQUE 4.6. — Dans le corollaire 4.3, on peut remplacer l'ensemble PR_n par l'ensemble $\text{PR}_n \cap \text{supp}(\mu)$. En effet, dans la preuve du théorème 4.2 pour le cas où $G(z) = z$, il suffit de considérer le point x_1 appartenant à $\text{supp}(\mu)$. Or $\text{supp}(\mu)$ est invariant par F^{-1} . Donc les points fixes obtenus appartiennent nécessairement à $\text{supp}(\mu)$. On peut aussi remplacer PR_n par l'ensemble PR'_n des point $x \in \text{PR}_n$ dont la période minimale est égale à n . En effet, d'après la proposition 4.1, on a $\#(\text{PR}_n \setminus \text{PR}'_n) = o(d_2^n)$.

Les corollaires suivants donnent des interprétations géométriques des résultats obtenus.

COROLLAIRE 4.7. — Soient F une correspondance comme au théorème 2.1 et G une autre correspondance polynomiale de degré topologique (p_1, p_2) associée à une k -chaîne holomorphe Z . Notons Y_n la k -chaîne holomorphe associée à F^n et R_n l'intersection de Y_n avec Z . Alors la suite de mesures

$$p_1^{-1} d_2^{-n} \sum_{z \in R_n} \delta_{\pi_1(z)}$$

tend faiblement vers la mesure d'équilibre μ de F .

Démonstration. — Soit \overline{G} la correspondance adjointe de G . Chaque point fixe de $\overline{G} \circ F^n$ est associé à un couple de points $(x, y) \in Y_n$ et $(y, x) \in \overline{Z}$. On peut donc l'associer au point (x, y) dans l'intersection de Y_n avec Z . Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 4.2 en remplaçant G par \overline{G} . \square

COROLLAIRE 4.8. — Soit F une correspondance comme au théorème 2.1. Soient Y_n la k -chaîne holomorphe associée à F^n et $[Y_n]$ le courant d'intégration sur Y_n . Alors le courant $d_2^{-n}[Y_n]$ tend faiblement vers le courant $\pi_1^*(\mu)$.

Démonstration. — Pour toute matrice A inversible de norme petite et de rang k , notons $\pi_A : \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ l'application définie par

$$\pi_A(z^1, z^2) := z^2 - Az^1.$$

Soit $\alpha := dz_1 \wedge d\bar{z}_k \wedge \cdots \wedge dz_k \wedge d\bar{z}_k$. Posons $\alpha_A := (\pi_A)^*\alpha$. Les formes $\Phi\alpha_A$ avec Φ une fonction à support compact, engendrent l'espace des (k, k) -formes à support compact dans $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$. Il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_2^{-n}[Y_n] - \pi_1^*(\mu), \Phi\alpha_A \rangle = 0.$$

Notons $E_z := \pi_A^{-1}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^k$ et Φ_z la restriction de Φ à E_z . Notons également $[Y_n^z]$ et ν^z les mesures obtenues comme intersections de $[Y_n]$ et de $\pi_1^*(\mu)$ avec E_z . D'après le théorème de Fubini, on a

$$\langle d_2^{-n}[Y_n] - \pi_1^*(\mu), \Phi\alpha_A \rangle = \int \langle d_2^{-n}[Y_n^z] - \nu^z, \Phi_z \rangle dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_k \wedge d\bar{z}_k.$$

D'après le corollaire 4.7, $\langle d_2^{-n}[Y_n^z] - \nu^z, \Phi_z \rangle$ tend vers 0 pour tout z . Le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle d_2^{-n}[Y_n] - \pi_1^*(\mu), \Phi\alpha_A \rangle = 0. \quad \square$$

5. Ensembles d'unicité pour les polynômes

Soit P un polynôme de degré $\deg(P) \geq 2$. Soient K_P l'ensemble des points d'orbite bornée de P et J_P son bord topologique. L'ensemble K_P s'appelle *ensemble de Julia rempli* de P et J_P est *l'ensemble de Julia* de P . D'après la théorie de Fatou, J_P est le plus petit compact qui contient plus d'un point et qui vérifie $P^{-1}(J_P) = J_P$. L'ensemble K_P est le plus grand compact vérifiant $P^{-1}(K_P) = K_P$. On dira qu'un compact K est *un ensemble d'allure Julia* de P si K contient au moins deux points et si $P^{-1}(K) = K$. Il est clair qu'un tel ensemble K n'est pas un ensemble d'unicité et vérifie $J_P \subset K \subset K_P$.

Considérons deux polynômes distincts non constants f, g avec $\deg(f) \geq \deg(g)$ et un compact K , vérifiant $\#K \geq 2$ et $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$. Dans [29] Ostrovskii, Pakovitch et Zaidenberg ont montré que si $\deg(f) = \deg(g)$, il existe une rotation R préservant K telle que $f = R \circ g$. Si la capacité logarithmique de K est strictement positive, nous avons montré [9] qu'il existe un polynôme P tel que $f = P \circ g$ et $P^{-1}(K) = K$ sauf pour les deux cas exceptionnels ci-dessous. Désignons par z, Q, d, d' et a une coordonnée, un polynôme, deux entiers naturels et un nombre complexe convenables.

- Cas 1). — K est une réunion de cercles de centre 0 et $f(z) = Q(z)^d$, $g = aQ(z)^{d'}$.

- Cas 2). — K est le segment $[-1, 1]$ et $f = \pm T_d \circ Q$, $g = \pm T_{d'} \circ Q$ où T_m est le polynôme de Tchebychev défini par la relation $T_m(\cos z) = \cos(mz)$.

On voit que hors de ces deux cas si $\deg(f) > \deg(g)$, K est un ensemble d'allure Julia du polynôme P .

On déduit de ces résultats le théorème suivant.

THÉOREME 5.1. — *Soient f, g deux polynômes non constants avec $\deg(f) \geq \deg(g)$. Soit K un ensemble compact infini de \mathbb{C} vérifiant $f^{-1}(K) = g^{-1}(K)$. Alors il existe un polynôme P tel que $f = P \circ g$ et $P^{-1}(K) = K$ sauf si (f, g, K) appartient à l'une des deux classes décrites ci-dessus.*

Démonstration. — Si $\deg(f) = \deg(g)$, ce théorème se réduit au résultat d'Ostrovskii-Pakovitch-Zaidenberg. Supposons que $\deg(f) > \deg(g)$. Posons $F := f \circ g^{-1}$. C'est une correspondance polynomiale dont l'exposant de Lojasiewicz est égal à $\deg(f) \deg(g)^{-1}$. Elle vérifie l'hypothèse du corollaire 3.10. On a $F^{-1}(K) = K$ et $F(K) = K$. Comme K est un ensemble infini, il n'est pas contenu dans l'ensemble \mathcal{E}_0 . D'après le corollaire 3.10 et la remarque 3.12, les relations $F^{-1}(K) = F(K) = K$ impliquent que K contient le support de la mesure d'équilibre μ de F . La mesure μ étant PB, la capacité logarithmique de son support est strictement positive. Les résultats cités ci-dessus permettent de conclure. \square

COROLLAIRE 5.2. — *Un sous-ensemble compact infini de \mathbb{C} est un ensemble d'unicité si et seulement s'il n'est pas un ensemble d'allure Julia et s'il n'est invariant par aucune rotation.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALEXANDER (H.) — *Projective capacity*, Ann. Math. Studies, vol. 100, Princeton University Press, 1981, pp. 3–27.
- [2] BEDFORD (E.) & SMILLIE (J.) — *External rays in dynamics of polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2* , vol. 222, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. 41–79.
- [3] BRIEND (J.Y.) & DUVAL (J.) — *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$* , Acta Math., t. **182** (1999), pp. 143–157.
- [4] ———, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., t. **93** (2001), pp. 145–159.
- [5] BROLIN (H.) — *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark. Mat., t. **6** (1965), pp. 103–144.
- [6] CLOZEL (L.) & ULLMO (E.) — *Correspondances modulaires et mesures invariantes*, J. reine angew. Math., t. **558** (2003), pp. 47–83.

- [7] ———, *Équidistribution des points de Hecke*, in *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, pp. 193–254.
- [8] CORNFELD (I.P.), FOMIN (S.V.) & SINAI (Y.G.) – *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 245, Springer Verlag, New York-Berlin, 1962.
- [9] DINH (T.-C.) – *Ensembles d'unicité pour les polynômes*, Ergodic Theory Dynamical Systems, t. **22** (2002), pp. 171–186.
- [10] ———, *Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires*, J. Geom. Anal. (à paraître).
- [11] DINH (T.-C.) & SIBONY (N.) – *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de \mathbb{P}^k* , Math. Ann., t. **324** (2002), pp. 33–70.
- [12] ———, *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications*, prépublication, arXiv : math.DS/0306095, 2003.
- [13] ———, *Dynamique des applications d'allure polynomiale*, J. Math. Pures Appl., t. **82** (2003), pp. 367–423.
- [14] ———, *Dynamique des applications polynomiales semi-régulières*, Ark. Mat., t. **42** (2004), pp. 61–85.
- [15] ———, *Green currents for holomorphic automorphisms on compact Kähler manifolds*, J. Amer. Math. Soc., t. **18** (2005), pp. 291–312.
- [16] EREMENKO (A.E.) – *On some functional equations connected with iteration of rational function*, Leningrad Math. J., t. **1** (1990), pp. 905–919.
- [17] FATOU (P.) – *Sur l'itération analytique et les substitutions permutables*, J. Math., t. **2** (1923), pp. 343.
- [18] FORNÆSS (J.E.) – *Dynamics in several complex variables*, CBMS, vol. 81, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [19] FORNÆSS (J.E.) & SIBONY (N.) – *Complex dynamics in higher dimension*, in *Complex potential theory (Montréal, PQ, 1993)*, Nato ASI Series Math. and Phys. Sci., vol. C439, Kluwer, 1994, pp. 131–186.
- [20] FREIRE (A.), LOPES (A.) & MAÑÉ (R.) – *An invariant measure for rational maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. **14** (1983), pp. 45–62.
- [21] GROSS (F.) & YANG (C.C.) – *On preimage and range sets of meromorphic functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., t. **58** (1982), pp. 17–20.
- [22] GUEDJ (V.) – *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, prépublication, 2003.
- [23] HÖRMANDER (L.) – *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer-Verlag, 1983.
- [24] JULIA (G.) – *Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **39** (1922), pp. 131–215.
- [25] KLIMEK (M.K.) – *Pluripotential theory*, Oxford Univ. Press, 1995.

- [26] LYUBICH (M.JU.) – *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynamical Systems, t. **3** (1983), pp. 351–385.
- [27] MÉO (M.) – *Image inverse d'un courant positif fermé par une application surjective*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., t. **322** (1996), pp. 1141–1144.
- [28] NEVANLINNA (R.) – *Einige Eideutigkeitsätze in der Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math., t. **48** (1926), pp. 367–391.
- [29] OSTROVSKII (I.V.), PAKOVITCH (F.B.) & ZAIDENBERG (M.G.) – *A remark on complex polynomial of least deviation*, Internat. Math. Res. Notices, t. **14** (1996), pp. 699–703.
- [30] PLOSKI (A.) – *On the growth of proper polynomial mappings*, Ann. Polon. Math., t. **XLV** (1985), pp. 297–309.
- [31] RITT (J.F.) – *Permutable rational functions*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **25** (1923), pp. 399–448.
- [32] RUSSAKOVSKII (A.) & SHIFFMAN (B.) – *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J., t. **46** (1997), pp. 897–932.
- [33] SHIFFMAN (B.) – *Uniqueness of entire and meromorphic functions sharing finite sets*, Complex Variables Theory Appl., t. **43** (2001), pp. 433–449.
- [34] SIBONY (N.) – *Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k* , in *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas & Synthèses, vol. 8, Société Mathématique de France, Paris, 1999, pp. 97–185.
- [35] SIBONY (N.) & WONG (P.M.) – *Some results on global analytic sets*, in *Séminaire Lelong-Skoda*, Lect. Notes in Math., vol. 822, Springer, 1980, pp. 221–237.
- [36] VOISIN (C.) – *Intrinsic pseudovolume forms and K-correspondences*, in *The Fano Conference*, Univ. Torino, Turin, 2004, pp. 761–792.