BULLETIN DE LA S. M. F.

ALANO ANCONA
NICOLAS CHEVALLIER

Sur la convergence radiale des potentiels associés à l'équation de Helmholtz

Bulletin de la S. M. F., tome 128, nº 2 (2000), p. 249-281
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_2_249_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 249–281.

SUR LA CONVERGENCE RADIALE DES POTENTIELS ASSOCIÉS À L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ

PAR ALANO ANCONA et NICOLAS CHEVALLIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit u une fonction surharmonique positive relativement à l'équation de Helmholtz $\Delta u - u = 0$ dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, et soit Φ la solution radiale positive de cette équation vérifiant $\Phi(0) = 1$. On montre qu'il peut arriver que la fonction u/Φ n'admette pas de limite à l'infini le long de tout rayon issu de l'origine, ce qui répond à une question de T. Lyons, B. MacGibbon et J.C. Taylor. Plus généralement, si $\tilde{u}$ est une moyenne d'un type convenable de u, on étudie l'existence de limites radiales dans presque toute direction pour $\tilde{u}/\Phi$. On est amené à approfondir l'étude de l'effilement minimal relatif à l'équation de Helmholtz et, dans une autre direction, à déterminer un équivalent asymptotique, pour $\lambda \to +\infty$, du noyau de Poisson associé à $\Delta - \lambda I$ dans un ouvert convexe C^2 de $\mathbb{R}^d$. On indique aussi une approche unifiée et des extensions de plusieurs résultats connus prolongeant le théorème de convergence radiale de Littlewood.

ABSTRACT. — ABOUT RADIAL CONVERGENCE OF POTENTIALS ASSOCIATED TO HELMHOLTZ' EQUATION. — Let u be a nonnegative superharmonic function with respect to the Helmholtz equation $\Delta u - u = 0$ in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, and let Φ denote the radial positive solution of Helmholtz equation such that $\Phi(0) = 1$. It is shown that in general u/Φ has no limit along every ray emanating from the origin in $\mathbb{R}^d$, which solves a question raised by T. Lyons, B. MacGibbon and J.C. Taylor. More generally, the existence of limits along almost every ray of some means of a natural type of u/Φ is studied and the means for which the a. s. radial convergence holds for every u characterized. We establish, as a tool, an asymptotic for $\lambda \to +\infty$ of the Poisson kernel with respect to $\Delta - \lambda I$ in a convex C^2 region of $\mathbb{R}^d$. In a final section, extensions as well as a unified treatement of several known generalizations of the Littlewood radial convergence theorem are given.

(*) Texte reçu le 6 avril 1999, révisé le 15 septembre 1999, accepté le 13 octobre 1999.
A. ANCONA, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, Mathématique, Orsay 91405 (France).
Email : ancona@matups.math.u-psud.fr.
N. CHEVALLIER, Université de Haute Alsace, F.S.T., 4 rue des frères Lumière, Mathématique, 68093, Mulhouse (France).
Email : n.chevallier@univ-mulhouse.fr.
Mots clés : limites radiales, potentiels, équation de Helmholtz, limites fines.
Classification mathématique par matières : 31C05, 31C12, 31C35, 60J45.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/2000/249/$ 5.00

1. Introduction

La théorie du potentiel associée à l'équation de Helmholtz $\triangle u - u = 0$ dans $\mathbb{R}^d$ est voisine de la théorie classique pour le Laplacien dans la boule unité de $\mathbb{R}^d$. La frontière de Martin correspondante s'identifie avec la sphère unité S_{d-1}, les solutions positives minimales (normalisées à l'origine) sont les fonctions $u_b(x) = \exp(b \cdot x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, où $b \in S_{d-1}$ et $P(x,b) = u_b(x)$ est l'analogue du noyau de Poisson. Les fonctions constantes ne vérifient pas l'équation de Helmholtz mais la formule

$$\Phi_d(x) = \frac{1}{\sigma(S_{d-1})} \int_{S_{d-1}} u_b(x)\,\mathrm{d}\sigma(b), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur la sphère S_{d-1}, fournit l'unique solution Φ_d, positive sur $\mathbb{R}^d$, invariante par rotation et telle que $\Phi_d(0) = 1$. Pour $d = 3$, on obtient $\Phi_3(x) = \mathrm{sh}(\|x\|)/\|x\|$, $x \in \mathbb{R}^3$. O. Linden [Lin] a montré que les solutions positives de l'équation de Helmholtz vérifient un théorème de type Fatou : *si u est une solution positive de l'équation de Helmholtz sur $\mathbb{R}^2$, la limite $\lim_{t\to\infty} u(tz)/\Phi_d(tz)$ existe pour σ-presque tout $z \in S^1$.*

Ce théorème a été amélioré par Koranyi et Taylor (voir [KT]) qui ont étendu la convergence radiale à la convergence, pour presque toute direction b, le long des domaines paraboliques dirigés par b.

Motivés par un problème posé par T. Lyons, B. MacGibbon et J. Taylor (voir [LMT, § 5]), nous étudions ici la possibilité d'étendre un autre résultat classique, le théorème de Littlewood pour les fonctions sous-harmoniques bornées dans le disque (voir [Lit] ; voir aussi la méthode de Doob dans [Doo], [LMT], l'extension par B. Dahlberg du théorème de Littlewood aux domaines lipschitziens [Da2] et celle de S. Zhao pour les domaines NTA [Zha], celle enfin de Lyons-McGibbon-Taylor pour les espaces symétriques de rang 1 [LMT]. Voir aussi l'appendice).

Il s'agit ici de savoir si pour toute sursolution positive u de l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$ on a convergence radiale de u/Φ_d dans presque toute direction. Nous montrerons que cet analogue du théorème de Littlewood n'a pas lieu en général, mais qu'une propriété voisine concernant certaines moyennes de u/Φ_d reste vraie. Plus précisément, on établira les énoncés suivants (voir les définitions de la section 2).

THÉORÈME 1. — *Pour chaque entier $d \geq 2$, il existe un potentiel w associé à l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$, tel que pour tout z appartenant à S_{d-1}, on ait*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{w(rz)}{\Phi_d(rz)} = +\infty \quad et \quad \liminf_{r\to+\infty} \frac{w(rz)}{\Phi_d(rz)} = 0.$$

En tronquant w on obtiendra un potentiel majoré par Φ_d et tel que w/Φ_d soit dépourvu de limite à l'infini le long de tout rayon issu de l'origine. Remarquons aussi que pour tout potentiel de Helmholtz w sur $\mathbb{R}^d$, l'ensemble $\{w = +\infty\}$ est polaire pour $\Delta - I$, donc pour Δ ; cet ensemble est par conséquent de dimension de Hausdorff $\leq d - 2$ et *a fortiori*, w est fini sur presque tout rayon issu de 0. (Voir aussi la remarque 5.1 montrant que l'absence de limite radiale ne tient pas à l'influence locale de la mesure associée à w.)

Une fonction $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ étant donnée, définissons pour x dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la *calotte sphérique*

$$\Sigma_f(x) := \big\{z \in \mathbb{R}^d\,;\ \|z\| = \|x\|,\ \measuredangle(z, x) \leq f(\|x\|)\big\}$$

(où $\measuredangle(z, x)$ est l'angle que font z et x) et, pour toute fonction u borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$, la moyenne

$$M_f u(x) = \frac{1}{\sigma(\Sigma_f(x))} \int_{\Sigma_f(x)} u(z)\, \mathrm{d}\sigma(z), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

THÉORÈME 2. — *Supposons qu'il existe $c \geq 1$ tel que $c^{-1} \leq \sqrt{r}\, f(r) \leq c$ pour tout $r > 0$ et soit w un potentiel associé à l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$. Pour σ-presque tout z appartenant à S_{d-1}, on a*

$$\lim_{r\to\infty} M_f\Big(\frac{w}{\Phi_d}\Big)(rz) = 0.$$

Si on combine le théorème 2 avec le résultat principal de [KT] on voit que plus généralement, pour toute fonction w sur $\mathbb{R}^d$, positive et $\Delta - I$ surharmonique, la limite $\ell(z) = \lim_{r\to\infty} M_f(w/\Phi_d)(rz)$ existe pour presque tout $z \in S_{d-1}$. L'énoncé suivant montre le caractère optimal du théorème 2.

THÉORÈME 3. — *Supposons que $f(r)\sqrt{r}$ tende vers 0 quand r tend vers l'infini. Il existe alors un potentiel w associé à l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout z appartenant à S_{d-1} on ait*

$$\limsup_{r\to\infty} M_f\Big(\frac{w}{\Phi_d}\Big)(rz) = +\infty \quad \textit{et} \quad \liminf_{r\to\infty} M_f\Big(\frac{w}{\Phi_d}\Big)(rz) = 0.$$

Le théorème 3 est en réalité une variante du théorème 1 et on peut obtenir les deux énoncés par la même méthode (voir la section 4). Nous donnerons deux démonstrations très différentes du théorème 2. L'une (*cf.* section 5) de nature «élémentaire» et indépendante de toute théorie du Potentiel, consiste en plusieurs estimations d'intégrales. L'autre (*cf.* section 7), plus conceptuelle, s'appuie sur la théorie des limites fines à la frontière de Martin. Pour cette deuxième démarche, il sera commode de disposer de la proposition suivante qui a probablement un intérêt propre. Voir le 6.A pour la définition des noyaux de Poisson P^λ et le 6.E pour une extension partielle à des domaines non nécessairement convexes.

THÉORÈME 4. — *Soit U un domaine convexe de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ et soit $P^\lambda : U \times \partial U \to \mathbb{R}_+$ le noyau de Poisson de U pour $\Delta - \lambda I$, $\lambda > 0$. Pour $x \in U$, $\xi \in \partial U$, soit n_ξ la normale intérieure à U en ξ et soit*

$$K^\lambda(x,\xi) = \frac{\langle x-\xi, n_\xi\rangle}{|x-\xi|}\Big[\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi|x-\xi|}\Big]^{(d-1)/2} \mathrm{e}^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}$$

Alors le quotient $P^\lambda(x,\xi)/K^\lambda(x,\xi)$, $(x,\xi) \in U \times \partial U$, tend vers 1, *uniformément sur tout compact de $U \times \partial U$, lorsque $\lambda \to \infty$.*

En dépit de son caractère élémentaire, nous n'avons pas trouvé trace de cet énoncé dans la littérature publiée, ni pu le déduire d'estimations connues du noyau de la chaleur (avec condition de Dirichlet au bord). La méthode de passage par l'équation des ondes — que nous a signalée G. Lebeau — (voir [Kan, (4.38) p. 819 et (4.3) p. 803]), pourrait peut-être aussi conduire au résultat, mais les calculs explicites requis semblent délicats et la preuve serait nettement moins élémentaire que l'approche directe de la section 6 (voir aussi [Ber, p. 76–80]).

Remarquons que les théorèmes 1 à 3 s'étendent immédiatement aux équations $\Delta u - \alpha u = 0$, $\alpha > 0$ par le changement de variable $x \mapsto \sqrt{\alpha}x$. De plus, pour l'équation de Laplace (cas $\alpha = 0$) et pour $d \geq 3$, on sait (*cf.* [Den]) que pour tout potentiel u sur $\mathbb{R}^d$, on a bien $\lim_{t\to\infty} u(t\zeta) = 0$ pour presque tout $\zeta \in S_{d-1}$ ([Den] donne un énoncé plus précis).

Dans l'appendice, on indique une méthode de preuve rapide et unifiée des versions connues du théorème de Littlewood et quelques extensions (avec une réserve, *cf.* le A.5). La démarche reprend, pour une bonne part, celle introduite par Doob [Doo] et améliorée par Lyons-McGibbon-Taylor [LMT].

2. Notations. Rappels. Reformulation du problème

2.A. — On utilisera les conventions et les notations suivantes.

1) Les lettres a et c désignent des constantes strictement positives qui peuvent changer de valeurs d'une expression à une autre. Elles ne dépendent en règle générale que de la dimension d supposée ≥ 2.

2) La mesure (comprise entre 0 et π) de l'angle que font les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^d$ est notée $\measuredangle(x,y)$. Leur produit scalaire (usuel) est noté $\langle x,y\rangle$ (ou $x \cdot y$) et $\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$ (ou $|x|$) désigne la norme de x. En général, étant donnée une hypersurface de $\mathbb{R}^d$, σ désigne la mesure Riemannienne naturelle sur cette hypersurface.

3) Dans les sections 3, 5 et 7, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$, on pose

$$\Sigma(x,t) = \big\{u \in \mathbb{R}^d\,;\ |u| = |x|,\ \measuredangle(u,x) < t\big\}.$$

On note aussi

$$B_{d-1}(t) = \{u \in \mathbb{R}^{d-1}\ ;\ |u| < t\}.$$

4) Pour r et R dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $0 < r < R$, on note

$$\mathcal{C}(r,R) = \{x \in \mathbb{R}^d\ ;\ r \le \|x\| \le R\}.$$

5) Surtout dans les sections 3, 6 et 7, on utilisera, dans le cadre de l'équation de Helmholtz, la terminologie et des résultats standards de la théorie axiomatique du potentiel de Brelot — et de la frontière de Martin — (voir [Bre], [Her], [KT], [Naï], [An1, chap. 2]). En particulier, pour $A \subset \mathbb{R}^d$ et pour w fonction positive sur A, la réduite R_w^A est l'enveloppe inférieure des fonctions v surharmoniques positives sur $\mathbb{R}^d$ relativement à l'équation de Helmholtz telles que $v \ge w$ sur A. La régularisée s.c.i. de R_w^A est notée $\widehat{R}_w^A$.

2.B. — Le noyau de Green, de pôle l'origine et relativement à l'opérateur elliptique $\Delta - I$ dans $\mathbb{R}^d$, est la fonction $x \mapsto G_d(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^d$, donnée par

$$G_d(|x|) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{(4\pi t)^{d/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Il est bien connu que

$$(2.1)\qquad \begin{cases} G_d(r) \sim \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{e}^{-r}}{(2\pi r)^{(d-1)/2}} & \text{pour } r \to +\infty, \\[2ex] G_d(r) \sim \dfrac{1}{\sigma(S_{d-1})\,r^{d-2}} = \dfrac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\,\pi^{\frac{d}{2}}}\,\dfrac{1}{r^{d-2}} & \text{pour } r \to 0,\ \text{ si } d \ge 3, \end{cases}$$

et que $G_2(r) = \frac{1}{2\pi}\log(1/r) + O(1)$ pour $r \to 0$. D'autre part, $G_d'(r) \sim -G_d(r)$ pour $r \to +\infty$ et, si $d \ge 3$, $G_d'(r) \sim -(c/r)\,G_d(r)$ pour $r \to 0$ (et $G_2'(r) \sim -c/r$ pour $r \to 0$). Rappelons aussi que

$$(2.2)\qquad \Phi_d(x) \sim \frac{2^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{d}{2}\Big)\,\frac{\mathrm{e}^r}{r^{\frac{d-1}{2}}} \quad \text{pour } \ r = |x| \to +\infty.$$

On a donc $G_d(|x|) = F(x)\,\|x\|^{(1-d)/2}\exp(-\|x\|)$ où F est continue > 0 sur $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, et admet une limite > 0 (finie) à l'infini, une singularité en $r^{(3-d)/2}$ à l'origine si $d \ge 4$. La fonction F est bornée si $d \le 3$.

2.C. — Nous voulons étudier les limites radiales des potentiels de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$ quotientés par la fonction Φ_d. Ces potentiels sont les fonctions positives sur $\mathbb{R}^d$ non identiquement infinies de la forme $G_d(\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} G_d(|x-y|)\,\mathrm{d}\mu(y)$,

$x \in \mathbb{R}^d$, où μ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$; on notera aussi $G\mu = G_d(\mu)$. Comme le potentiel d'une mesure à support compact tend vers 0 à l'infini, on peut supposer que $0 \notin \operatorname{supp}(\mu)$ et donc que $G\mu(0) < \infty$. Aussi, nous ne considérerons que des potentiels $G_d(\mu)$ engendrés par des mesures positives μ sur $\mathbb{R}^d$ telles que $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^{(1-d)/2} \exp(-\|x\|)\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$. Si on remplace μ par la mesure ν telle que $\mathrm{d}\nu(x) = \|x\|^{(1-d)/2} \exp(-\|x\|)\,\mathrm{d}\mu(x)$, on a, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$G\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x-y)\Big(\frac{\|y\|}{\|x-y\|}\Big)^{(d-1)/2} \exp\big(-\|x-y\| + \|y\|\big)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Le problème de la convergence radiale des potentiels est donc équivalent au problème suivant.

Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$ de masse totale finie. Soit u la fonction telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x-y)\Big(\frac{\|y\|\|x\|}{\|x-y\|}\Big)^{(d-1)/2} \exp\big(-\|x\| - \|x-y\| + \|y\|\big)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

A-t-on $\lim_{t\to\infty} u(tb) = 0$ pour presque tout $b \in S_{d-1}$?

2.D. Notation. — On notera

$$K(x,y) = \Big(\frac{\|y\|\|x\|}{\|x-y\|}\Big)^{(d-1)/2} \exp(-\|x\| - \|x-y\| + \|y\|)$$

et on dira que la fonction $u(x) = \int K(x,y)\,F(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, $x \in \mathbb{R}^d$, est le *potentiel normalisé* associé à la mesure μ.

3. Quelques résultats sur l'effilement minimal

L'énoncé suivant est à peu près standard (comparer à [KT]). Il montre que la fonction $g(r) = 1/\sqrt{r}$ indique une taille critique dans les questions d'effilement au point $b \in S_{d-1}$ des ensembles de la forme $\bigcup_{n\geq 1} \Sigma(R_n b, g(R_n))$, où $\{R_n\}$ est une suite de réels tendant vers $+\infty$.

PROPOSITION 1. — *Soient $b \in S_{d-1}$, $v(x) = \exp(b\cdot x)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et soit $A(r) = \{z \in \mathbb{R}^d\,;\ |z| = r,\ |z - r\,b| \leq f(|z|)\}$. Alors,*

1) *si $f(r) = o(\sqrt{r})$ pour $r \to \infty$, on a $\lim_{r\to\infty} R_v^{A(r)}(0) = 0$;*
2) *si $f(r) \geq C\sqrt{r}$ pour un réel $C > 0$, on a $\liminf_{r\to\infty} R_v^{A(r)}(0) > 0$.*

Preuve. — La deuxième assertion est une simple traduction de la proposition 2.2 de [KT]. Pour établir la première, considérons la restriction μ de la mesure superficielle sur la sphère $\partial B(0,R)$ à $\Sigma = \Sigma(Rb,t)$, où $R \geq 1$ et $1/R \leq t \leq 1/\sqrt{R}$.

Grâce aux équivalents du 2.B, on voit que le potentiel $G(\mu)$ est minoré sur Σ par une constante $c > 0$ (indépendante de R) et que $G\mu(0) \sim ct^{d-1}R^{(d-1)/2}\,\mathrm{e}^{-R}$. Donc $R_v^{\Sigma}(0) \leq c\mathrm{e}^{R}G\mu(0) \leq c' t^{d-1}R^{(d-1)/\,2}$ et on obtient la première assertion de la proposition. □

REMARQUE 3.1. — Si on tient compte — comme dans [KT] — de la minoration $R_v^{\Sigma}(0) \geq \int_{\Sigma} v(y)\,\mathrm{d}\omega_0(y)$, où ω_0 désigne la mesure harmonique de Helmholtz de 0 dans la boule $B(0,R)$, on voit qu'avec les hypothèses et les notations ci-dessus $R_v^{\Sigma}(0) \sim t^{d-1}R^{(d-1)/2}$.

On établit ensuite une variante, utile pour l'étude de l'effilement pour l'équation de Helmholtz (*cf.* le 3.2), du critère de Lelong-Ferrand [Lel]. Cette variante n'intervient pas dans la suite et peut être omise.

Soient toujours $b \in S_{d-1}$, $v(x) = \exp(b.x)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $\alpha > 0$. Notons P la région

$$P = \bigcup_{\{r\geq 1\}} \overline{\Sigma}\Big(rb\,;\,\frac{\alpha}{\sqrt{r}}\Big) = \big\{x \in \mathbb{R}^d\,;\ |x| \geq 1,\ \measuredangle(x,b) \leq \alpha|x|^{-\frac{1}{2}}\big\},$$

et $C_n = \big\{x \in P\,;\ 2^n \leq \|x\| \leq 2^{n+1}\big\}$, pour n entier ≥ 0.

PROPOSITION 2. — *Soit A une partie de P et soit $A_n = A \cap C_n$, $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble A est effilé en v (i.e. $\widehat{R}_v^A$ est un potentiel) si et seulement si on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_v^{A_n}(0) < \infty.$$

Démonstration. — On adapte un procédé de démonstration bien connu (voir [Lel] et pour d'autres références [An1], §V.5.7). Il s'agit de voir que si $\widehat{R}_v^A$ est un potentiel alors $\sum_{n=0}^{\infty} R_v^{A_n}(0) < \infty$ (l'autre implication est immédiate). On peut d'ailleurs supposer $A \subset \bigcup\{C_{n_0+2k}\,;\ k \in \mathbb{N}^*\}$ pour un entier n_0 à fixer « grand ».

Notons $I = \{n_0 + 2p\,;\ p \in \mathbb{N}^*\}$ et, pour $n \in I$, soient μ_n la restriction à C_n de la mesure μ associée à $\widehat{R}_v^A$ et u_n le potentiel associé à μ_n. Il suffit de prouver que $2u_n \geq \widehat{R}_v^{A_n}$ puisqu'alors $\sum_{n\in I} \widehat{R}_v^{A_n} \leq 2v$. Donc, il suffit de voir que $w_n = \sum_{p>n} u_p$ et $w'_n = \sum_{p<n} u_p$ sont chacun majorés sur A_n par $\frac{1}{4}\,v$.

1) Soient $x \in C_n$ et $y \in C_p$ avec $p \leq n-2$. On a $\|y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$; donc

$$w'_n(x) \leq c \int_{\cup\{C_p\,;\ p<n\}} F(y)\,\frac{1}{\|y\|^{(d-1)/2}}\,\exp\big(-\|y\|\big)\,\mathrm{d}\mu(y) = c\,w'_n(0),$$

où $c > 0$ ne dépend pas de $n \in I$. D'où, pour $x \in C_n$,

$$w'_n(x) \leq c\, R_v^A(0) \leq c = c\, v(x) \exp(-b \cdot x) \leq \varepsilon_n v(x),$$

où $\{\varepsilon_n\}_{n \in I}$ décroît vers zéro (et ne dépend que de α et d).

2) Soient $x \in C_n$ et $y \in C_p$ avec $p \geq n+2$. On a $\|y\| \leq 2\|x-y\|$, donc

$$\frac{G_d(|y-x|)/v(x)}{G_d(|y|)/v(0)} \leq c \exp\big(-\|y-x\| - \|x\| + \|y\|\big) \exp\big(\|x\| - b \cdot x\big) \leq c.$$

D'où $G_d(|y-x|)/v(x) \leq c\, G_d(|y|)/v(0)$. En intégrant, on obtient que pour $x \in A_n$, $w_n(x)/v(x) \leq c w_n(0)/v(0) = c\, w_n(0)$. Or, par hypothèse, $\widehat{R}_v^A$ est un potentiel. Donc $\lim\limits_{n \to \infty} w_n(0) = 0$ et $w_n \leq \varepsilon'_n\, v$ sur A_n avec $\lim_{n \to \infty} \varepsilon'_n = 0$. $\square$

APPLICATION 3.2. — On retrouve très naturellement le résultat de non-effilement de [Che] qui s'appuie sur une approche bien différente : un tube d'axe $\mathbb{R}_+ b$ n'est pas effilé en b si $d = 2$ ou si $d = 3$. Si, par exemple $d = 3$ et si A est le demi-cylindre plein de rayon $\varepsilon > 0$ autour de $\mathbb{R}_+ b$, on montre facilement que la mesure μ_n portée par $A_n = C_n \cap A$ et telle que $\mu_n(\mathrm{d}x) = \mathrm{e}^{b \cdot x}\, \mathrm{d}x$ sur A_n vérifie $G\mu_n \leq cnv$ sur A_n et $G\mu_n(0) \approx c$. D'où $R_v^{A_n}(0) \geq c/n$ et le résultat s'ensuit. On raisonne de même pour $d = 2$ (on pourrait même prendre $\varepsilon = 0$). Rappelons que d'après [KT, p. 82], un tel tube est effilé si $d \geq 4$.

4. Démonstration des théorèmes 1 et 3

Le théorème 1 résultera facilement de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *Il existe une famille $\{\mu_R\}_{R \geq R_0}$, $R_0 \geq 1$, de mesures positives finies sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

(i) *la masse totale de μ_R tend vers 0 quand R tend vers l'infini;*

(ii) *le support de μ_R est contenu dans la couronne $\mathcal{C}(R/2, 2R)$;*

(iii) *le potentiel normalisé u_R associé à μ_R est tel que* $\sup_{r \in [R,2R]} u_R(rx) \geq 1$ *pour tout $x \in S_{d-1}$.*

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $r = \|x\| > 1$. Définissons la région

$$D(x) = \big\{ y \in \mathbb{R}^d\,;\ r + \sqrt{r} \leq \|y\| \leq 2r \text{ et } \measuredangle\,(x,y) \leq 1/\sqrt{r}\,\big\}.$$

LEMME 1. — *Soit $y \in D(x)$, soit $\theta = \measuredangle(x,y)$ et soit $t = \|y\|$. On a alors*

$$K(x,y) \geq c\Big(\frac{r}{\sqrt{t-r}}\Big)^{d-1} \exp\Big(-2r^2 \frac{\theta^2}{t-r}\Big).$$

Démonstration. — Posons $\delta = \|x-y\|$. On a $\delta^2 - r^2\sin^2\theta = (\|y\| - r\cos\theta)^2$, et puisque $\|y\| \geq r$, $\|y\| = r\cos\theta + \sqrt{\delta^2 - r^2\sin^2\theta}$. Comme $\sqrt{s^2-t^2} \geq s - t^2/s$ pour $s \geq t$, on obtient

$$\begin{aligned}\|y\| &\geq r\cos\theta + \delta - \frac{r^2\sin^2\theta}{\delta} \geq \|x\| + \|x-y\| - r(1-\cos\theta) - \frac{r^2\sin^2\theta}{\delta}\\ &\geq \|x\| + \|x-y\| - r\frac{\theta^2}{2} - \frac{r^2\theta^2}{\delta}\cdot\end{aligned}$$

Aussi $\delta^2 \leq r^2(2-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta = r^2(5-4\cos\theta) \leq 4r^2$. Donc $1/2 \leq r/\delta$ et

$$\|y\| \geq \|x\| + \|x-y\| - 2\frac{r^2\theta^2}{\delta}\cdot \tag{4.1}$$

En particulier, puisque $t - r \geq \sqrt{r}$, $\delta \geq t-r$ et $|\theta| \leq \frac{1}{\sqrt{r}}$, on a

$$\delta \leq t - r + 2\frac{r}{t-r} \leq 3(t-r).$$

Par conséquent, d'après (4.1) et l'expression de K (voir le 2.D), on a

$$K(x,y) \geq c\,\frac{r^{d-1}}{\delta^{(d-1)/2}}\exp\Big(-2\frac{r^2\theta^2}{\delta}\Big) \geq c'\,\frac{r^{d-1}}{(t-r)^{(d-1)/2}}\exp\Big(-2\frac{r^2\theta^2}{t-r}\Big),$$

et le lemme est démontré. $\square$

Soit e_d le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et soit $E : \mathbb{R}^{d-1} \to S_{d-1}$ l'application exponentielle de S_{d-1} en e_d (via l'identification naturelle de $\mathbb{R}^{d-1}$ au plan tangent à S_{d-1} en e_d). Observons que E est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{d-1}$, la sphère S_{d-1} étant munie de la distance riemannienne $\delta(u,v) = \measuredangle(u,v)$.

Notons p l'application qui à $(\theta, r) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ associe

$$p(\theta, r) = rE(\theta)$$

et, pour $R > 0$, soit h_R l'application qui à (θ, r) associe

$$h_R(\theta, r) = \Big(\theta\sqrt{R}, \frac{r}{R}\Big).$$

Posons enfin

$$A_R = \big\{(\alpha, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^* \,;\ |\alpha| < \tfrac{1}{2},\ t \in \left]-1, -2/\sqrt{R}\right[\big\}$$

($A_R = \emptyset$ si $0 < R \leq 4$) et pour $(\alpha, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$,

$$\Gamma_R(\alpha, t) = \frac{1}{|t|^{(d-1)/2}} \exp\Big(-8\frac{|\alpha|^2}{|t|}\Big)\mathbf{1}_{A_R}(\alpha, t).$$

LEMME 2. — *Soit ν une mesure positive sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ et soit μ son image par $p \circ h_R^{-1}$ où $R > 4$. Appelons u le potentiel normalisé associé à μ. Pour $r \in [R, 2R]$ et $\theta \in \mathbb{R}^{d-1}$, on a*

$$u \circ p(\theta, r) \geq c_0 R^{(d-1)/2} (\Gamma_R * \nu) \circ h_R(\theta, r),$$

où c_0 est une constante > 0 ne dépendant que de la dimension d.

Démonstration. — Si $x = p(\theta, r)$, on a :

$$\begin{aligned} u(x) &\geq c \int \mathbf{1}_{D(x)}(y)\, K(x, y)\, \mathrm{d}\mu(y) \\ &\geq c \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*} \mathbf{1}_{D(x)}\big(p \circ h_R^{-1}(\alpha, s)\big) K\big(x, p \circ h_R^{-1}(\alpha, s)\big)\, \mathrm{d}\nu(\alpha, s). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent et la définition d'une mesure image, on obtient (compte tenu du caractère 1-lipschitzien de l'exponentielle E)

$$\begin{aligned} u(x) &\geq c \int \mathbf{1}_{\{r+\sqrt{r} \leq Rs \leq 2r,\ |\alpha/\sqrt{R}-\theta| \leq 1/\sqrt{r}\}}(\alpha, s) \Big[\frac{r}{\sqrt{Rs - r}}\Big]^{d-1} \\ &\qquad\qquad \times \exp\Big(-2r^2 \frac{|\theta - \alpha/\sqrt{R}|^2}{Rs - r}\Big)\, \mathrm{d}\nu(\alpha, s) \\ &\geq c \int_{\{r/R+\sqrt{r}/R \leq s \leq 2r/R,\ |\alpha - \theta\sqrt{R}| \leq \frac{1}{2}\}} \Big[\frac{r}{\sqrt{R}} \frac{1}{\sqrt{s - r/R}}\Big]^{d-1} \\ &\qquad\qquad \times \exp\Big(-2\frac{r^2}{R^2} \frac{|\theta\sqrt{R} - \alpha|^2}{s - r/R}\Big)\, \mathrm{d}\nu(\alpha, s) \\ &\geq c\, R^{(d-1)/2} \int_{\{2/\sqrt{R} < s - r/R < 1,\ |\alpha - \theta\sqrt{R}| < \frac{1}{2}\}} \frac{1}{(s - r/R)^{(d-1)/2}} \\ &\qquad\qquad \times \exp\Big(-8\frac{|\theta\sqrt{R} - \alpha|^2}{s - r/R}\Big)\, \mathrm{d}\nu(\alpha, s) \\ &= c\, R^{(d-1)/2} (\Gamma_R * \nu)\Big(\theta\sqrt{R}, \frac{r}{R}\Big). \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 3. — *Avec les notations du lemme précédent on a, pour tout $\lambda > 0$,*

$$\begin{aligned} &\Big\{\theta \in [-\pi, \pi]^{d-1} ;\ \sup_{r \in [R, 2R]} u \circ p(\theta, r) \geq c_0 \lambda\Big\} \\ &\qquad \supseteq \frac{1}{\sqrt{R}} \Big\{\alpha \in \big[-\pi\sqrt{R}, \pi\sqrt{R}\big]^{d-1} ;\ \sup_{t \in [1,2]} \Gamma_R * \nu(\alpha, t) \geq \frac{\lambda}{R^{(d-1)/2}}\Big\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent on a

$$\begin{aligned}\sup_{r\in[R,2R]} u\circ p(\theta,r) &\geq c_0 \sup_{r\in[R,2R]} R^{\frac{d-1}{2}}(\Gamma_R*\nu)\big(\theta\sqrt{R},r/R\big)\\ &\geq c_0\, R^{\frac{d-1}{2}} \sup_{t\in[1,2]}(\Gamma_R*\nu)\big(\theta\sqrt{R},t\big).\end{aligned}$$

D'où évidemment l'inclusion voulue. □

LEMME 4. — *Il existe une mesure de probabilité ν_0 portée par $[-\pi,\pi]^{d-1}\times[0,1]$ et une partie compacte F de $[-\pi,\pi]^{d-1}\times[0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes : la projection sur $[-\pi,\pi]^{d-1}$ de F est $[-\pi,\pi]^{d-1}$ tout entier et on a*

$$\lim_{R\to\infty}\Big[\inf_{(x,t)\in F}\Gamma_R*\nu_0(x,t)\Big]=+\infty.$$

Démonstration. — Appelons Γ le noyau sur $\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$ tel que

$$\Gamma(x,t)=\frac{1}{|t|^{(d-1)/2}}\exp\Big(-8\frac{x^2}{|t|}\Big)\mathbf{1}_{\{(x,t):\ t<0\}}(x,t).$$

À des changements d'échelle près, il s'agit d'un multiple du noyau de la chaleur avec renversement du temps. On sait (voir [KW], [TW] et la remarque plus bas) qu'on peut construire une partie F de $[-\pi,\pi]^{d-1}\times]0,1[$, compacte, polaire pour l'adjoint de l'opérateur de la chaleur (ce qui revient à dire que F est polaire pour l'équation de la chaleur, mais nous n'aurons pas besoin de ce fait) et dont la projection sur $[-\pi,\pi]^{d-1}$ est $[-\pi,\pi]^{d-1}$ tout entier. Il existe donc une mesure de probabilité ν_0 sur $[-\pi,\pi]^{d-1}\times[0,1]$ admettant un Γ-potentiel $\Gamma*\nu_0$ égal à $+\infty$ sur F.

Or, pour tout couple (x,t) appartenant à $B_{d-1}(\frac12)\times]-1,0[$, le noyau $\Gamma_R(x,t)$ tend en croissant vers $\Gamma(x,t)$ lorsque R croît vers $+\infty$. Donc, si $(x,t)\in F$, on a

$$\lim_{R\to\infty}\Gamma_R*\nu_0(x,t)=\Gamma*\nu_0(x,t)=+\infty.$$

Mais les Γ_R sont semi-continus inférieurement et par conséquent les $\Gamma_R*\nu_0$ sont également semi-continus inférieurement. Il en résulte que

$$\lim_{R\to\infty}\Big[\inf_{\zeta\in F}\Gamma_R*\nu_0(\zeta)\Big]=+\infty.$$

C'est ce qu'on voulait démontrer. □

REMARQUE 4.1. — En fait [KW] (comme [TW]) fournit (après des modifications évidentes) un exemple d'ensemble $F_0\subset[-\pi,\pi]\times[0,1]$ du type de F ci-dessus lorsque $d-1=1$. Pour $d\geq 3$, il suffit de prendre

$$F=\big\{(x,t)\in[-\pi,\pi]^{d-1}\times[0,1]\,;\ (x_1,t)\in F_0\big\}.$$

On vérifie aisément que F est polaire pour (l'adjoint de) l'opérateur de la chaleur si F_0 l'est.

Fin de la démonstration de la proposition 3. — Soit N la partie entière de $1+\sqrt{R}$ et soit $\lambda_R = \inf_{(x,t)\in F} \Gamma_R * \nu_0(x,t)$. Considérons la mesure ν_R définie par

$$\nu_R = \frac{1}{c_0 \lambda_R R^{(d-1)/2}} \sum_{n\in D_N} \tau_{(n,1)}(\nu_0),$$

où $D_N = \{n \in \mathbb{Z}^{d-1}\,;\ -N \le n_j < N\}$ et où $\tau_{(n,1)}$ désigne la translation de vecteur $(n,1)$ dans $\mathbb{R}^d$.

Si $x \in [-N\pi, N\pi]^{d-1} = \bigcup_{n\in D_N} [n_1\pi,(n_1+1)\pi] \times \cdots \times [n_{d-1}\pi,(n_{d-1}+1)\pi]$, on a

$$\sup_{t\in[1,2]} \Gamma_R * \nu_R(x,t) \ge \frac{1}{c_0 R^{(d-1)/2}}.$$

Or $E([-\pi,\pi]^{d-1}) = S_{d-1}$ et $p\circ h_R^{-1}(D_N\times[1,2]) = \mathcal{C}(R,2R)$; donc d'après le lemme 3, le potentiel normalisé u_R engendré par la mesure $\mu_R = p\circ h_R^{-1}(\nu_R)$ vérifie

$$\sup_{r\in[R,2R]} u_R(r\,z) \ge 1$$

pour tout $z\in S_{d-1}$. Comme $\|\mu_R\| = \|\nu_R\| \le \frac{c}{\lambda_R}\,\|\nu_0\|$ et que $\lim_{R\to\infty}\lambda_R = +\infty$, la proposition 3 est établie.

Fin de la preuve du théorème 1. — On prend un potentiel normalisé w de la forme

$$w(x) = \sum_{j\ge 1} \int F(x-y)\,K(x,y)\,\mathrm{d}\nu_j(y), \quad x\in\mathbb{R}^d, \quad \text{où} \quad \nu_j = \frac{1}{\sqrt{\|\mu_{R_{2j+1}}\|}}\,\mu_{R_{2j+1}},$$

et où les R_j, $j\ge 1$, croissent assez rapidement vers $+\infty$. Plus précisément, on choisit successivement les R_j tels que $R_{j+1}\ge 10\,R_j$, $\|\nu_j\| \le 2^{-j}[R_{2j}]^{(1-d)/2}$. En utilisant la définition du noyau K, il est facile de voir que pour $\|x\| = R_{2N+2}$, on a

$$w(x) \le c(R_{2N+2})^{(d-1)/2}\Big(\exp(2R_{2N+1} - R_{2N+2})\|\nu\| + \sum_{j\ge N+1}\|\nu_j\|\Big),$$

et $\lim_{N\to\infty}[\sup_{\partial B(0,R_{2N})} w] = 0$. D'autre part, d'après le (ii) de la proposition 3 on a

$$\sup\big\{K\nu_j(tx)\,;\ t\ge \tfrac{1}{2}R_{2j+1}\big\} \ge \|\mu_{R_{2j+1}}\|^{-\frac{1}{2}} \ge 2^{j/2}$$

pour tout $x\in S_{d-1}$. On obtient donc bien le théorème 1. $\square$

Le théorème 3 se déduit du raffinement (simple) du théorème 1 donné par l'énoncé suivant. On désigne par f une fonction bornée >0 sur $[1,\infty[$.

THÉORÈME 1′. — *Supposons que $f(r)\sqrt{r}$ tende vers 0 quand r tend vers l'infini. Il existe alors un potentiel w pour l'équation de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $x \in S_{d-1}$:*

$$\limsup_{r\to\infty}\Big[\inf\Big\{\frac{w(ry)}{\Phi_d(ry)}\ ;\ y\in S_{d-1},\ |y-x|\le f(r)\Big\}\Big] = +\infty,$$
$$\liminf_{r\to\infty}\Big[\sup\Big\{\frac{w(ry)}{\Phi_d(ry)}\ ;\ y\in S_{d-1},\ |y-x|\le f(r)\Big\}\Big] = 0.$$

Les lemmes 5 et 6 ci-dessous sont des variantes des lemmes 1 et 2 précédents. Le théorème 1′ s'obtient ensuite via la proposition 4 en procédant exactement comme pour le théorème 1. Quitte à remplacer f par

$$\tilde f(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\sup\big\{\sqrt{t}\,f(t)\ ;\ t\ge r\big\},\quad r>0,$$

on peut supposer que $\sqrt{t}\,f(t)$ *décroît* vers 0 quand $t\to\infty$.

Pour $u:\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}_+$, $x\in\mathbb{R}^d$ et $r=\|x\|\ge 1$, posons

$$m_f u(x) = \inf\big\{u(y)\ ;\ y\in\mathbb{R}^d,\ \|y\|=r,\ \measuredangle(x,y)\le f(r)\big\}.$$

PROPOSITION 4. — *Il existe une famille $\{\mu_R\}_{R\ge R_0}$, $R_0>1$, de mesures positives finies sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

(i) *la masse totale de μ_R tend vers 0 quand R tend vers l'infini ;*

(ii) *μ_R est portée par $\mathcal{C}(\frac{R}{2},2R)$;*

(iii) *le potentiel normalisé u_R associé à μ_R vérifie $\sup_{r\in[R,2R]} m_f u(r\,z)\ge 1$ pour tout $z\in S_{d-1}$.*

Soit $R_0>1$ assez grand pour que $f(r)\le 1/100\sqrt{r}$ si $r\ge R_0$. Pour $x\in\mathbb{R}^d$ tel que $r:=\|x\|\ge R_0$, définissons la région

$$E_f(x) = \big\{y\in\mathbb{R}^d\ ;\ r+\sqrt{r}\le\|y\|\le 2r \text{ et } f(r)\le\measuredangle(x,y)\le 1/2\sqrt{r}\,\big\}.$$

LEMME 5. — *Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}^d$ et soit u le potentiel normalisé associé à μ. Pour $r\ge R_0$, $\theta\in S_{d-1}$ et $x=r\,\theta$, on a :*

$$m_f u(x)\ge c\,r^{d-1}\int_{E_f(x)}\frac{1}{(s-r)^{(d-1)/2}}\exp\Big(-8\,r^2\,\frac{(\measuredangle(\beta,\theta))^2}{s-r}\Big)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

où on a posé $y=s\beta$, $s\ge 1$ et $\beta\in S_{d-1}$ dans l'intégrale.

Démonstration. — Évidemment

$$m_f u(x) \geq c \inf \Big\{ \int_{E_f(x)} K(r\alpha, y)\,\mathrm{d}\mu(y)\ ;\ \alpha \in S_{d-1},\ \measuredangle(\alpha,\theta) \leq f(r) \Big\}$$

et $E_f(x) \subset D(r\,\alpha)$ si $\measuredangle(\alpha,\theta) \leq f(r)$. Donc d'après le lemme 1, si $y = s\beta \in E_f(x)$ et $\beta \in S_{d-1}$, on a

$$\begin{aligned} K(r\,\alpha, y) &\geq c\Big(\frac{r}{\sqrt{s-r}}\Big)^{d-1} \exp\Big(-2r^2\,\frac{(\measuredangle(\alpha,\beta))^2}{s-r}\Big) \\ &\geq c\Big(\frac{r}{\sqrt{s-r}}\Big)^{d-1} \exp\Big(-8r^2\,\frac{(\measuredangle(\beta,\theta))^2}{s-r}\Big). \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Notons, pour $R \geq R_0$,

$$A'_R = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}\ ;\ f(R)\sqrt{R} < |x| < \tfrac14,\ -1 < t < -2/\sqrt{R}\,\big\}$$

et

$$\Gamma_{f,R}(\alpha,t) = \frac{1}{|t|^{(d-1)/2}} \exp\Big(-8\,\frac{|\alpha|^2}{|t|}\Big)\mathbf{1}_{A'_R}(\alpha,t), \quad (\alpha,t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}.$$

LEMME 6. — *Soit ν une mesure positive finie sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$, soit μ son image par $p \circ h_R^{-1}$ et soit u le potentiel normalisé associé à μ. Si $R \geq R_0$, si $r \in [R, 2R]$ et si $\theta \in \mathbb{R}^{d-1}$ on a, pour une certaine constante $c_0 > 0$,*

$$(m_f u) \circ p(\theta, r) \geq c_0 R^{(d-1)/2} (\Gamma_{f,R} * \nu) \circ h_R(\theta, r).$$

Démonstration. — Pour $x = rE(\theta)$ et $y = sE(\beta)$, $\theta \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d-1}$, $r, s \geq 1$, posons :

$$H(x,y) = \mathbf{1}_{E_f(x)}(y)\Big(\frac{r}{\sqrt{s-r}}\Big)^{d-1} \exp\Big(-8r^2\,\frac{|\beta-\theta|^2}{s-r}\Big).$$

Soient $(\theta, r) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$, $r \geq R_0$ et $x = p(\theta, r)$. D'après le lemme précédent et le caractère 1-lipschitzien de l'exponentielle $E : \mathbb{R}^{d-1} \to S_{d-1}$, on a :

$$\begin{aligned} m_f u(x) &\geq c \int H(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \geq c \int H(x, p\circ h_R^{-1}(u,s))\,\mathrm{d}\nu(u,s) \\ &\geq c \int_{\{r+\sqrt{r} \leq Rs \leq 2r,\, f(r) \leq |u/\sqrt{R}-\theta| \leq 1/2\sqrt{r}\}} \Big(\frac{r}{\sqrt{Rs-r}}\Big)^{d-1} \\ &\qquad\qquad \times \exp\Big(-8r^2\,\frac{|\theta - u/\sqrt{R}\,|^2}{Rs-r}\Big)\,\mathrm{d}\nu(u,s) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq c \int_{\{r/R+\sqrt{r}/R \leq s \leq 2r/R,\, f(r)\sqrt{R} \leq |u-\theta\sqrt{R}| \leq \sqrt{R}/2\sqrt{r}\}} \frac{r^d}{R^{(d-1)/2}} \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{(s-r/R)^{(d-1)/2}} \exp\Big(-8\,\frac{r^2}{R^2}\,\frac{|\theta\sqrt{R}-u|^2}{s-r/R}\Big)\,\mathrm{d}\nu(u,s) \\
&\geq cR^{(d-1)/2} \int_{\{2/\sqrt{R} \leq s-r/R \leq 1,\, f(R)\sqrt{R} \leq |u-\theta\sqrt{R}| \leq \frac14\}} \frac{1}{(s-r/R)^{(d-1)/2}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \exp\Big(-8\,\frac{|\theta\sqrt{R}-u|^2}{s-r/R}\Big)\,\mathrm{d}\nu(u,s) \\
&= cR^{(d-1)/2}\ [\Gamma_{f,R} * \nu]\big(\theta\sqrt{R}, r/R\big). \quad \square
\end{aligned}
$$

À une fonction bornée près le noyau $\Gamma_{f,R}$ tend en croissant vers

$$\widetilde{\Gamma}(x,t) = \mathbf{1}_{\{0<|x|<\frac14,\,-1<t<0\}}(x,t)\,\Gamma(x,t).$$

On établit alors la proposition 4, exactement comme la proposition 3, en remarquant qu'on peut choisir pour mesure ν_0 dans le lemme 4 une mesure ne chargeant pas les droites verticales dans $\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$. (On peut même prendre ν_0 absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}$.)

5. Démonstration directe du théorème 2

On indiquera les étapes principales de cette preuve, en laissant au lecteur le soin de vérifier les inégalités (de nature élémentaire) non détaillées. On fixe un potentiel normalisé u associé à une mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^d$ et on note $Mu = M_f u$. On peut supposer $f(t) = 1/\sqrt{t}$ et $\mu(B(0,4)) = 0$.

NOTATIONS. — On désigne par x et y des points de $\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)$, $\|x\| \geq 4$, et on note $r = \|x\|$, $s = \|y\|$, $\delta = \|x-y\|$, $\alpha = x/r$, $\beta = y/s$ et $\gamma = \measuredangle(x,y) \in [0,\pi]$. On pose $\Delta(x,y) = \|y\| - \|x-y\| - \|x\|$, et

$$
\begin{aligned}
C_1(x) &= \{y \in \mathbb{R}^d\,;\ 1 \leq \|y\| \leq r - \sqrt{r}\}, \\
C_2(x) &= \{y \in \mathbb{R}^d\,;\ r - \sqrt{r} \leq \|y\| \leq r + 1\}, \\
C_3(x) &= \{y \in \mathbb{R}^d\,;\ r + 1 \leq \|y\| \leq 2r\}, \\
C_4(x) &= \{y \in \mathbb{R}^d\,;\ 2r \leq \|y\|\},
\end{aligned}
$$

Pour $1 \leq i \leq 4$, soient

$$K_i(x,y) = \mathbf{1}_{C_i(x)}(y) K(x,y) \quad \text{et} \quad u_i(x) = \int K_i(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Soit aussi

$$v(x)=\int_{B(x,1)}\frac{\|x\|^{d-1}}{\|x-y\|^{d-2}}\,\mathrm{d}\mu(y),\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

On a $u\le c(u_1+u_2+u_3+u_4+v)$ sur $\mathbb{R}^d$ — (v peut être omis si $d\le 3$).

Pour montrer le théorème 2, il suffit d'examiner successivement les Mu_j et Mv. Pour Mu_1, le lecteur vérifiera facilement que $u_1(x)\le C\exp(-\sqrt{r})$. Pour Mv, Mu_2 et Mu_3 on s'appuiera sur la proposition suivante. Considérons un noyau (mesurable) $N:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $\operatorname{supp}[N(x,.)]\subset\mathcal{C}(c_1\|x\|,c_2\|x\|)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et deux constantes strictement positives c_1 et c_2. Soit $R_1\ge 1$.

Proposition 5. — *Pour $R\ge 0$ et α, β dans S_{d-1}, notons*

$$L_R(\alpha,\beta)=\sup\bigl\{N(r\alpha,s\beta)\,;\ r\in[R,2R],\ s\in[c_1r,c_2r]\bigr\}.$$

Si $\int_{S_{d-1}}L_R(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\sigma(\alpha)$ reste bornée pour $R\ge R_1$ et $\beta\in S_{d-1}$, alors pour toute mesure finie ν sur $\mathbb{R}^d$, la fonction $u(x)=\int N(x,y)\,d\nu(y)$ tend vers 0 à l'infini le long de presque tout rayon issu de 0.

Démonstration. — Notons $\nu_n=\mathbf{1}_{\mathcal{C}(c_12^n,c_22^{n+1})}\nu$,

$$T_n\nu(\alpha)=\sup_{r\in[2^n,2^{n+1}]}\int N(r\alpha,y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

pour $\alpha\in S_{d-1}$ et n entier ≥ 1. On a :

$$\begin{aligned}\int T_n\nu(\alpha)\,\mathrm{d}\sigma(\alpha)&\le\iint L_{2^n}\Bigl(\alpha,\frac{y}{\|y\|}\Bigr)\,\mathrm{d}\nu_n(y)\,\mathrm{d}\sigma(\alpha)\\&\le\|\nu_n\|\sup_{\theta\in S_{d-1}}\int L_{2^n}(\alpha,\theta)\,\mathrm{d}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

Donc, puisque $\sum_{n\ge 1}\|\nu_n\|<\infty$, la somme $\sum_{\{n,\,2^n\ge R_1\}}T_{2^n}\nu$ est σ-intégrable sur S_{d-1}. A fortiori, on a $\lim_{n\to\infty}T_{2^n}\nu(x)=0$, σ-presque partout sur S_{d-1}. La proposition s'ensuit. □

Remarque 5.1. — La proposition s'applique aux deux noyaux

$$N(x,y)=\mathbf{1}_{B(x,1)}(y)\,\frac{|x|^{d-1}}{|x-y|^{d-2}},\quad N'(x,y)=-\mathbf{1}_{B(x,1)}(y)\,|x|\log\bigl(|x-y|\bigr)$$

(*cf.* aussi ci-dessous). La divergence dans le théorème 1 n'est donc pas due à l'influence locale de la mesure qui définit le potentiel.

Étude de Mv. — Si on note

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^d ;\ |\|y\| - r| \leq 1 \text{ et } \measuredangle(x,y) \leq 3/\sqrt{r}\},$$

on a la majoration $Mv(x) \leq \int N(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ où

$$N(x,y) = c\mathbf{1}_{A(x)}(y) \int_{S_{d-1}} \mathbf{1}_{B(y,1)}(r\theta) \frac{r^{(d+1)/2}}{\|\theta - y/r\|^{d-2}}\,\mathrm{d}\sigma(\theta).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\int_{S_{d-1}} \mathbf{1}_{B(y,1)}(r\theta) \frac{r}{\|\theta - y/r\|^{d-2}}\,\mathrm{d}\sigma(\theta) &\leq \int_{\Sigma(y/\|y\|,2/r)} \frac{r}{\|\theta - y/r\|^{d-2}}\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\\ &\leq c \int_{\Sigma(y/\|y\|,3/r)} \frac{r}{\|\theta - y/\|y\|\|^{d-2}}\,\mathrm{d}\sigma(\theta) \leq c,\end{aligned}$$

pour $r = \|x\|$ assez grand, $y \in A(x)$. Donc $N(x,y) \leq c\,r^{(d-1)/2}\,\mathbf{1}_{A(x)}(y)$. La convergence radiale presque sûre vers zéro de Mv découle alors de la proposition 5.

Étude de Mu_2. — On a $Mu_2(x) \leq c \int_{y\in C_2(x)} N(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ où

$$N(x,y) = r^{(d-1)/2} \int_{\Sigma(\alpha,1/\sqrt{r})} K_2(r\theta,y)\,\mathrm{d}\sigma(\theta).$$

De l'inégalité $\|\lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2\|^2 \geq \lambda_1\lambda_2\|w_1 - w_2\|^2$, pour $w_j \in S_{d-1}$, $\lambda_j > 0$, on déduit la majoration

$$N(x,y) \leq cr^{d-1}\mathbf{1}_{C_2(x)}(y) \int_{\Sigma(\alpha,1/\sqrt{r})} \frac{1}{|\theta - \beta|^{(d-1)/2}} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}r|\theta - \beta|\bigr)\,\mathrm{d}\sigma(\theta).$$

À partir de là, on peut établir les inégalités

$$\begin{aligned} N(x,y) &\leq cr^{(d-1)/2} && \text{si } |\alpha - \beta| \leq 2/\sqrt{r},\\ N(x,y) &\leq cr^{(3d-5)/4}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{r}{2}}} && \text{si } |\alpha - \beta| > 2/\sqrt{r}. \end{aligned}$$

La convergence radiale presque-sûre de Mu_2 découle maintenant de la proposition 5.

Étude de Mu_3. — On a $Mu_3(x) \leq \int_{y\in C_3(x)} N(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ où

$$N(x,y) = cr^{(d-1)/2} \int_{\Sigma(\alpha,1/\sqrt{r})} K_3(r\theta,y)\,\mathrm{d}\sigma(\theta).$$

Alors que le théorème 1 repose sur la minoration $\Delta(x,y) \geq -r^2\gamma^2/2\delta$ (*cf.* 4.1), la convergence de Mu_3 repose sur la majoration

$$\Delta(x,y) \leq -\frac{r^2\gamma^2}{8\,\delta} \tag{5.1}$$

pour $y \in C_3(x)$, qui se démontre de la même manière que (4.1). Cela conduit à

$$N(x,y) \leq cr^{d-1}\mathbf{1}_{C_3(x)}(y)\int_{\Sigma(\alpha,1/\sqrt{r})}\Big(\frac{r}{\|r\theta-y\|}\Big)^{(d-1)/2}\exp\Big(-r^2\frac{\measuredangle(\theta,y)^2}{8\|r\theta-y\|}\Big)\,\mathrm{d}\sigma(\theta).$$

On en déduit les inégalités suivantes :

$$N(x,y) \leq c\mathbf{1}_{C_3(x)}(y)\Big(\frac{r}{\sqrt{\|x-y\|}}\Big)^{d-1}\exp\Big(-ar^2\frac{|\beta-\alpha|^2}{\|x-y\|}\Big) \quad \text{si } |\beta-\alpha| \geq \frac{2}{\sqrt{r}},$$

$$\begin{aligned} N(x,y) &\leq cr^{(d-1)/2}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{(t^2+|w|^2)^{(d-1)/4}}\exp\Big(-a\frac{|w|^2}{(t^2+|w|^2)^{\frac12}}\Big)\,\mathrm{d}w \\ &= cr^{(d-1)/2}I(t) \qquad\qquad \text{si } |\beta-\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{r}} \end{aligned}$$

où $t = s-r \geq 1$. C'est pour ce dernier cas que la moyenne est nécessaire pour assurer la convergence radiale. Une étude des variations de la fonction $g(\delta) = \delta^{(1-d)/2}\exp(-b/\delta)$ pour $\delta \in [\sqrt{r}, 4r]$ $(b>0)$ conduit à l'inégalité

$$N(x,y) \leq cr^{(d-1)/2}\exp\big(-ar|\beta-\alpha|^2\big)$$

pour $|\beta-\alpha| \geq 2/\sqrt{r}$. D'autre part, on peut montrer que l'intégrale $I(t)$ reste bornée lorsque t parcourt $]0,\infty[$. La convergence radiale presque-sûre de Mu_3 découle alors à nouveau de la proposition 5.

Étude de Mu_4. — On s'appuiera ici sur une inégalité maximale classique. De manière analogue à (5.1) on a $\Delta(x,y) \leq -r\gamma^2/8$. On a alors

$$\begin{aligned} Mu_4(x) &\leq cr^{(d-1)/2} \\ &\times \int_{y\in C_4(x)}\Big\{\int_{\Sigma(\alpha,1/\sqrt{r})}\Big(\frac{rs}{s-r}\Big)^{(d-1)/2}\exp\Big(-\frac{r\measuredangle(\theta,\beta)^2}{8}\Big)\Big)\,\mathrm{d}\sigma(\theta)\Big\}\,\mathrm{d}\mu(y). \end{aligned}$$

En posant (avec $a>0$ assez petit)

$$N(x,y) = r^{(d-1)/2}\,\mathbf{1}_{C_4(x)}(y)\int_{\Sigma(\alpha,1/\sqrt{r})} r^{(d-1)/2}\exp\big(-ar|\beta-\theta|^2\big)\,\mathrm{d}\sigma(\theta),$$

on a $Mu_4(x) \le c\,N\mu(x) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$.

- Si $|\beta - \alpha| \le 2/\sqrt{r}$, clairement $N(x,y) \le cr^{(d-1)/2}$.
- Si $|\beta - \alpha| \ge 2/\sqrt{r}$, on a $N(x,y) \le cr^{(d-1)/2}\exp(-ar(|\alpha-\beta|/2)^2)$.

Dans tous les cas, on obtient

$$N(x,y) \le c\,\mathbf{1}_{C_4(x)}(y)\,r^{(d-1)/2}\exp\Big(-ar\Big(\frac{|\alpha-\beta|}{2}\Big)^2\Big).$$

Donc, si ν_n désigne la projection sur S_{d-1} de la restriction μ_n de μ à la couronne $\mathcal{C}(2^{n+1},\infty)$ et si on note

$$h_n(t) = r_n^{(d-1)/2}\exp\big(-ar_n(\tfrac{1}{2}t)^2\big) = r_n^{(d-1)/2}\,h_0\big(\sqrt{r_n}\,t\big), \quad r_n = 2^n,$$

on a pour $x \in \mathcal{C}(2^n, 2^{n+1})$,

$$\begin{aligned} Mu_4(x) &\le c\int_{S_{d-1}} h_n\big(|\theta-\alpha|\big)\,\mathrm{d}\nu_n(\theta) = c\int_0^\infty \nu_n\big(B(\alpha,t)\big)h_n'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le c\,\nu_n^*(\alpha)\int_0^\infty t^{d-1}r_n^{d/2}h_0'\big(\sqrt{r_n}\,t\big)\,\mathrm{d}t = c\,\nu_n^*(\alpha)\int_0^\infty s^{d-1}h_0'(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

où ν_n^* est la fonction maximale de ν_n relativement à S_{d-1} et σ. Or les ν_n^* décroissent, $\lim_{n\to\infty}\|\nu_n\| = 0$ et $\sigma(\{\nu_n^* > t\}) \le c\|\nu_n\|/t$ pour $t > 0$. Donc $\lim_{n\to\infty}\nu_n^*(\alpha) = 0$ σ-p.p. et $\lim_{r\to\infty} Mu_4(r\alpha) = 0$ σ-p.p. $\square$

6. Preuve du théorème 4

A. Noyaux de Poisson. — Soit U un domaine de classe C^2 (non nécessairement borné) dans $\mathbb{R}^d$. Le noyau de Poisson $P_\xi^{U,\lambda} = P^{U,\lambda}(\,.\,,\xi)$ de $\xi \in \partial U$ dans U, et relativement à $\Delta - \lambda I$, $\lambda > 0$, est

$$P_\xi^{U,\lambda}(x) = \partial_{n_\xi}G_x^{U,\lambda}(\xi), \quad x \in U,$$

où $G_x^{U,\lambda}$ est le noyau de Green de pôle x dans U pour $\Delta - \lambda I$ et où n_ξ est la normale unitaire rentrante pour U en $\xi \in \partial U$. Pour U, ξ et $\lambda > 0$ fixés, $P_\xi^{U,\lambda}$ est une $\Delta - \lambda I$ solution > 0 sur U, s'annulant sur $\partial U \setminus \{\xi\}$ et majorée par un multiple de G_0^λ au voisinage de l'infini (si U est non borné). Il est bien connu (voir *e.g.* [An1, II.2.3] et ses références) que toute autre $\Delta - \lambda I$-solution > 0 dans U jouissant de ces propriétés est proportionnelle à $P_\xi^{U,\lambda}$. D'autre part, la mesure harmonique $\omega_x^{U,\lambda}$ de $x \in U$, relativement à U et à l'opérateur $\Delta - \lambda I$, est donnée par la formule

$$\omega_x^{U,\lambda}(\mathrm{d}\xi) = P^{U,\lambda}(x,\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

On détermine facilement le noyau de Poisson $\widetilde{P}^\lambda$ de pôle 0 pour le demi-espace

$$\widetilde{U} = \{x \in \mathbb{R}^d\,;\ x_1 > 0\}.$$

D'abord le noyau de Green pour $\mathbb{R}^d$ entier et $\Delta - \lambda I$ est

$$G^\lambda(x,y) = \lambda^{(d-2)/2} G_d\big(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\big),$$

et la fonction de Green de pôle x dans $\widetilde{U}$ est

$$G_x^{\lambda,\widetilde{U}}(y) = \lambda^{(d-2)/2}\big[G_d\big(\sqrt{\lambda}\,|x-y|\big) - G_d\big(\sqrt{\lambda}\,|x'-y|\big)\big]$$

où x' est le symétrique de x par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$. Par conséquent (*cf.* le 2.B) :

$$\widetilde{P}^\lambda(x) = -2\,\lambda^{(d-1)/2} G_d'\big(\sqrt{\lambda}\,r\big)\,\frac{x_1}{r} \sim \lambda^{(d-1)/4}\,\frac{\mathrm{e}^{-r\sqrt{\lambda}}}{(2\pi r)^{(d-1)/2}}\,\frac{x_1}{r}$$

où $r = |x| = d(0,x)$ et où G_d' désigne la dérivée de G_d et l'équivalent est donné pour $\lambda \to \infty$.

Il est facile d'estimer aussi le noyau de Poisson pour une boule, au centre de cette boule. Si $\xi \in \partial B_d(0,\rho)$, le noyau de Poisson P_ξ^λ de pôle ξ dans $B_d(0,\rho)$, $\rho > 0$, ne dépend pas de ξ en 0 et doit donc vérifier

$$P_\xi^\lambda(0)\,\Phi_d(\rho\sqrt{\lambda})\,\rho^{d-1}\,\sigma(S_{d-1}) = \Phi_d(0) = 1.$$

Compte tenu des asymptotiques de Φ_d du 2.B et de la formule $\sigma(S_{d-1}) = 2\,\pi^{d/2}/\Gamma(\frac{1}{2}d)$, on obtient $P_\xi^\lambda(0) \sim \widetilde{P}^\lambda(\rho\, e_1)$ pour $\lambda \to \infty$.

Dans la partie suivante, on estime le noyau de Poisson d'une boule, pour λ grand, en dehors du centre.

B. Estimées du noyau de Poisson dans une boule, pour $\boldsymbol{\Delta} - \lambda \boldsymbol{I}$ et lorsque $\lambda \to \infty$. — Soit P^λ le noyau de Poisson de pôle 0 pour la boule ouverte $B = B_d(\rho\, e_1, \rho)$, $\rho > 0$ et l'opérateur $\Delta - \lambda I$ (où $e_1 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^d$). On note toujours $\widetilde{P}^\lambda$ le noyau de Poisson de pôle 0 dans $\widetilde{U} = \{x \in \mathbb{R}^d\,;\ x_1 > 0\}$.

PROPOSITION 6. — *Pour tout compact K de B, on a uniformément sur K*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{P^\lambda(x)}{\widetilde{P}^\lambda(x)} = 1.$$

De plus, il existe $c = c_{K,d} > 0$ tel que $c\,\widetilde{P}^\lambda(x) \le P^\lambda(x) \le \widetilde{P}^\lambda(x)$, pour tout $\lambda \ge 0$ et tout $x \in K$.

Preuve. — Un argument d'homogénéité permet de supposer $\rho = 1$. (*Cf.* 6.D.)

(i) Considérons $K^\lambda = \widetilde{P}^\lambda - {}^\lambda H^{\partial B}_{\widetilde{P}^\lambda}$ où ${}^\lambda H^{\partial B}_{\widetilde{P}^\lambda}$ est la solution du problème de Dirichlet dans B pour $\Delta - \lambda I$ et la valeur au bord $\widetilde{P}^\lambda$, *i.e.* ${}^\lambda H^{\partial B}_{\widetilde{P}^\lambda}(x) = \int_{\partial B} \widetilde{P}^\lambda(\xi) P^\lambda(x,\xi)\, \mathrm{d}\sigma(\xi)$, $x \in B$. On va montrer que $K^\lambda/\widetilde{P}^\lambda$ tend vers 1 uniformément sur K lorsque $\lambda \to \infty$. Or, $K^\lambda = K^\lambda(A)/P^\lambda(A) P^\lambda$, en notant A le centre de B. Comme $P^\lambda(A)/\widetilde{P}^\lambda(A) \to 1$ pour $\lambda \to \infty$, on obtiendra bien la première assertion de la proposition.

(ii) Il s'agit donc de voir que ${}^\lambda H^{\partial B}_{\widetilde{P}^\lambda} = o(\widetilde{P}^\lambda)$ uniformément sur K lorsque $\lambda \to \infty$, ou encore que si p_λ est une minimale associée à 0 dans $\widetilde{U}$ pour $\Delta - \lambda I$, ${}^\lambda H^{\partial B}_{p_\lambda} = o(p_\lambda)$ uniformément sur K, quand $\lambda \to \infty$. On prendra $p_\lambda(x) = 1/G'_d(\sqrt{\lambda}) G'_d(r\sqrt{\lambda}) x_1/r$, $r = d(0,x) = |x|$, de telle sorte que $p_\lambda(A) = 1$. On a, uniformément sur K pour $\lambda \to \infty$,

$$p_\lambda(x) \sim c_d \frac{\mathrm{e}^{-(r-1)\sqrt{\lambda}}}{r^{(d+1)/2}}\, x_1.$$

(iii) Fixons $\delta > 0$ et partageons ∂B en trois zones F_1, F_2, F_3 :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{x \in \partial B\,;\ |x|\sqrt{\lambda} \le 1\},\\ F_2 &= \{x \in \partial B\,;\ 1 \le |x|\sqrt{\lambda},\ |x| \le \varepsilon_0\},\\ F_3 &= \{x \in \partial B\,;\ |x| \ge \varepsilon_0\}. \end{aligned}$$

On va voir que ${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_j} p^\lambda} \le \delta\, p_\lambda$ sur K pour λ grand, si on choisit convenablement $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$.

(iv) Sur F_1 comme $|G'_d(t)| \le (c/t) G_d(t)$ pour $t \le 1$, on a

$$p_\lambda(x) \le \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \frac{G_d(\sqrt{\lambda}\, r)}{|G'_d(\sqrt{\lambda})|} \frac{x_1}{r^2} \le \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \frac{G_d(\sqrt{\lambda}\, r)}{|G'_d(\sqrt{\lambda})|}$$

car x_1/r^2 est de l'ordre d'une constante sur ∂B. Mais la fonction $x \mapsto -(c/\sqrt{\lambda}) G_d(\sqrt{\lambda} r)/G'_d(\sqrt{\lambda})$ est $\Delta - \lambda I$ harmonique > 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Donc, pour tout $x \in B$,

$${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_1} p_\lambda}(x) \le \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \frac{G_d(\sqrt{\lambda}\, r)}{|G'_d(\sqrt{\lambda})|},$$

et puisque $-G'_d(t) \sim G_d(t)$ pour $t \ge 1$, on obtient que pour $x \in K$ (et $\lambda \ge 1$)

$${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_1} p_\lambda}(x) \le \frac{c}{\sqrt{\lambda}}\, p_\lambda(x).$$

(v) Sur F_2, puisque $-G_d'(t) \sim G_d(t)$ pour $t \geq 1$ et puisque $x_1 \approx r^2$ sur ∂B, on a

$$p_\lambda(x) \leq c\,\frac{G_d(\sqrt{\lambda}\,r)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}\,r \leq c\,\varepsilon_0\,\frac{G_d(\sqrt{\lambda}\,r)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}$$

(où c est indépendant de ε_0). A fortiori, sur K

$${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_2}p_\lambda}(x) \leq c\,\varepsilon_0\,\frac{G_d(\sqrt{\lambda}\,r)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|} \leq c'\,\varepsilon_0\,\frac{G_d(\sqrt{\lambda}\,r)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}\,\frac{x_1}{r} = c'\,\varepsilon_0\,p_\lambda(x).$$

On choisira et fixera ε_0 assez petit pour que $c'\,\varepsilon_0 \leq \delta$.

(vi) Reste à estimer ${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_3}p_\lambda}$. Etant donné $\lambda \geq 1$, choisissons une suite finie maximale de points $\xi_j \in F_3$, $j = 1, \ldots, N_\lambda$, telle que $|\xi_j - \xi_k| \geq 1/\sqrt{\lambda}$ pour $j \neq k$. Alors $\min\{|x - \xi_j|\,;\ 1 \leq j \leq N_\lambda\} \leq 1/\sqrt{\lambda}$ si $x \in F_3$ et $N_\lambda \leq c\lambda^{(d-1)/2}$. Pour $x \in F_3$, $|x - \xi_j| \leq 1/\sqrt{\lambda}$ on a $G_d(\sqrt{\lambda} r) \leq c G_d(\sqrt{\lambda}\,|\xi_j|)$ d'après (2.1). Comme $G_d(t) \geq c$ pour $t \leq 1$ on a donc, en notant $r_j = |\xi_j|$,

$$p_\lambda(x) \leq c(\varepsilon_0)\,\frac{G_d(\sqrt{\lambda}\,r)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|} \leq \frac{c(\varepsilon_0)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}\sum_{1\leq j\leq N_\lambda} G_d\big(\sqrt{\lambda}\,r_j\big)G_d\big(\sqrt{\lambda}\,|x - \xi_j|\big).$$

D'où, pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned}{}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_3}p_\lambda}(x) &\leq \frac{c(\varepsilon_0)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}\sum_{1\leq j\leq N_\lambda} G_d\big(\sqrt{\lambda}\,r_j\big)G_d\big(\sqrt{\lambda}\,|x - \xi_j|\big)\\ &\leq \frac{c'(\varepsilon_0)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}\,\lambda^{(1-d)/2}\sum_{1\leq j\leq N_\lambda}\exp\big(-\sqrt{\lambda}\,(r_j + |\xi_j - x|)\big),\end{aligned}$$

et comme pour tout $x \in K$ et tout $\xi \in F_3$, on a $|\xi| + |\xi - x| \geq |x| + \alpha_K$ avec $\alpha_K > 0$, on obtient

$${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_3}p_\lambda}(x) \leq \frac{c'(\varepsilon_0)}{|G_d'(\sqrt{\lambda})|}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,r - \alpha_K\sqrt{\lambda}} \leq c''(\varepsilon_0, K)\lambda^{(d-1)/4}\,\mathrm{e}^{-\alpha_K\sqrt{\lambda}}\,p_\lambda(x).$$

Il est alors clair que pour λ assez grand, on a ${}^\lambda H^{\partial B}_{\mathbf{1}_{F_3}p_\lambda}(x) \leq \delta\,p_\lambda(x)$ sur K.

(vii) Pour établir la dernière assertion, il suffit maintenant de considérer λ dans un intervalle $[0, \lambda_0]$ avec $\lambda_0 > 0$ fixé assez grand. Le résultat voulu est immédiat en observant que $P^{\lambda_0} \leq P^\lambda \leq P^0$ (considérer les fonctions de Green correspondantes pour un pôle $x \in U$ fixé) et que de même $\widetilde{P}^{\lambda_0} \leq \widetilde{P}^\lambda \leq \widetilde{P}^0$. $\square$

C. Fin de la preuve du théorème 4. — Soit U convexe de classe $C^{1,1}$ et soit P^λ le noyau de Poisson de U pour $\Delta - \lambda I$. Il suffit d'obtenir l'équivalent du théorème 4 pour $x \in K_1 \subset U$ compact et ξ dans un voisinage compact K dans ∂U d'un point $\xi_0 \in \partial B$ quelconque fixé. Les propriétés de monotonie du noyau de Poisson permettent de supposer aussi U borné.

Choisissons un rayon $\rho > 0$ et K tels que (i) le diamètre de K soit inférieur à $\rho/10$, (ii) tout point $\xi \in K$ soit point frontière d'une boule ouverte B_ξ de rayon ρ incluse dans U, (iii) le centre A de B_{ξ_0} soit à distance $\leq \rho/10$ de chacun des centres des B_ξ, $\xi \in K$.

La proposition 6 montre que $P^\lambda_\xi(A)$ vérifie l'asymptotique du théorème 4, uniformément en $\xi \in K$: il suffit d'encadrer P^λ_ξ entre les noyaux de Poisson (de pôle ξ) pour la boule B_ξ et le demi-espace U_ξ contenant U et tel que $\xi \in \partial U_\xi$. On peut ensuite reprendre mot pour mot la preuve de la proposition 6 (en remplaçant B par U et en notant que $\langle x-\xi, n_\xi\rangle \leq c\,|x-\xi|^2$ pour $x \in \partial U$, $\xi \in K$).

D. Conséquence pour l'équation de Helmholtz dans les grandes boules. — Soit P_R le noyau de Poisson pour la boule $B(0,R)$ et l'équation de Helmholtz. Si u est $\Delta - I$ harmonique dans $B(0,R)$, $x \mapsto u(Rx)$ est $\Delta - R^2I$-harmonique dans la boule $B = B(0,1)$. Il en découle facilement que

$$P_R(Rx, R\xi) = R^{1-d}\, P^{R^2}(x,\xi) \quad x \in B,\ \xi \in \partial B,$$

si P^{R^2} désigne le noyau de Poisson pour $\Delta - R^2 I$ dans B. La proposition 6 nous donne alors une constante $C = C(d) \geq 1$ telle que pour $R \geq 1$:

$$C^{-1}\, R^{(1-d)/2} \mathrm{e}^{-|u-\eta|} \leq P_R(u,\eta) \leq CR^{(1-d)/2} \mathrm{e}^{-|u-\eta|},$$

pour tout $u \in \overline{B}(0, \frac{1}{2}R)$ et tout $\eta \in \partial B(0,R)$. En particulier, si $d(u,[0,\eta]) \leq \sqrt{R}$, $|u| = \frac{1}{2}R$, alors

$$C^{-1}R^{(1-d)/2}\mathrm{e}^{-(R-|u|)} \leq P_R(u,\eta) \leq CR^{(1-d)/2}\mathrm{e}^{-(R-|u|)}.$$

Cet encadrement nous servira dans la partie 7 suivante.

E. Extension. — On peut étendre partiellement la proposition 6 au cas du complémentaire d'une boule : reprenant les notations du 6.A, on construit maintenant sur $V = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}(-e_1, 1)$, la fonction

$$K^\lambda_c(x) = \widetilde{P}^\lambda(x) - {}^\lambda H^{\partial V}_{\underline{\widetilde{P}^\lambda}}(x) = \widetilde{P}^\lambda(x) + {}^\lambda H^{\partial V}_{|\widetilde{P}^\lambda|}(x),\ x \in V,$$

où ${}^\lambda H^{\partial V}_{\widetilde{P}^\lambda}$ désigne la solution du problème de Dirichlet (généralisé) dans V, pour $\Delta - \lambda I$ et la donnée frontière $\widetilde{P}^\lambda$ sur $\partial V = \partial B$ ($\widetilde{P}^\lambda$ est bien définie, ≤ 0 et

$\Delta - \lambda I$-harmonique sur $x_1 < 0$). En reprenant les arguments de la preuve de la proposition 6, on voit facilement que $K_c^\lambda/\widetilde{P}^\lambda$ tend vers 1 uniformément sur tout compact du demi-espace $x_1 > 0$. D'où, d'après le 6.A, et notant ${}^\lambda P_c$ le noyau de Poisson de $V_0 = \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}(0,1)$, l'existence d'une constante $c(\lambda) > 0$ pour chaque $\lambda > 0$ telle que

$$(6.1) \qquad {}^\lambda P_c(x,\xi) \sim c(\lambda)\frac{\lambda^{(d-1)/4}}{(2\pi)^{(d-1)/2}}\,\frac{\langle x-\xi,\xi\rangle}{|x-\xi|^{(d+1)/2}}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,|x-\xi|} \quad \text{pour } \lambda \to +\infty$$

uniformément en (x,ξ) si (x,ξ) varie dans un compact K de $V_0 \times \partial V_0$ tel que $\inf\{\langle x-\xi,\xi\rangle\,;\ (x,\xi) \in K\} > 0$. Reste à estimer $c(\lambda)$; ici, on a besoin d'un substitut à l'argument du 6.B basé sur l'évaluation directement disponible du noyau de Poisson P^λ au centre de la boule B.

Par comparaison avec un demi-espace, il est clair que $\liminf_{\lambda\to+\infty} c(\lambda) \geq 1$. D'autre part, pour $x \in V_0$,

$$(6.2) \qquad {}^\lambda H_1^{V_0}(x) = \frac{G_d(\sqrt{\lambda}|x|)}{G_d(\sqrt{\lambda})} \sim \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,|x|}}{|x|^{(d-1)/2}}, \quad \lambda \to +\infty.$$

Si δ est petit > 0, si $C_\delta = \{\xi \in S_{d-1}\,;\ \measuredangle(\xi,e_1) \leq \delta\}$, si $x = 2\,e_1$, et si $s_{d-2} = \sigma(S_{d-2})$, on a

$$\begin{aligned}
{}^\lambda H_1^V(x) &\geq \int_{C_\delta} {}^\lambda P_c(x,\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi)\\
&\geq c(\lambda)\frac{\lambda^{(d-1)/4}}{(2\pi)^{(d-1)/2}}\big(1-\varepsilon(\delta)\big)\,s_{d-2}\int_0^\delta \theta^{d-2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\sqrt{1+8\sin^2\theta/2}}\,\mathrm{d}\theta\\
&\geq c(\lambda)\,s_{d-2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}}\frac{\lambda^{(d-1)/4}}{(2\pi)^{(d-1)/2}}\big(1-\varepsilon(\delta)\big)\int_0^\delta \theta^{d-2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\,\theta^2(1+\tilde{\varepsilon}(\theta))}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

en remarquant que $|\xi - x| = 5 - 4\cos(\theta) = 1 + 8\sin^2\frac{1}{2}\theta$ pour $\xi \in C_\delta$ et $\theta = \measuredangle(\xi,x)$, et en notant ε et $\tilde{\varepsilon}$ deux fonctions positives sur $\mathbb{R}_+$ de limites nulles en 0. Le changement de variable $u = \lambda^{1/4}\,\theta$ montre que $\int_0^\delta \theta^{d-2}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\theta^2(1+\tilde{\varepsilon}(\theta))}\,\mathrm{d}\theta \sim \frac{1}{2}\lambda^{-(d-1)/4}\,\Gamma(\frac{1}{2}(d-1))$ pour $\lambda \to +\infty$. Compte tenu de (6.2) et de $s_{d-2} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}$, on obtient que $\limsup_{\lambda\to\infty} c(\lambda) \leq (1-\varepsilon(\delta))^{-1}$. Finalement, on voit que dans (6.1) on peut faire $c(\lambda) = 1$.

On obtient ainsi un équivalent de ${}^\lambda P_c(x,\xi)$, analogue à celui du 6.B pour une boule, mais avec la limitation que $\measuredangle(\xi, x-\xi) \leq \frac{1}{2}\pi - \eta$, pour un $\eta > 0$. On en déduit l'extension suivante du théorème 4.

THÉORÈME 4 bis. — *Soit U un domaine de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ et soit $P^\lambda : U \times \partial U \to \mathbb{R}_+$ le noyau de Poisson de U pour $\Delta - \lambda I$, $\lambda > 0$. Pour $x \in U$, $\xi \in \partial U$, soit n_ξ la normale intérieure à U en ξ et soit*

$$K^\lambda(x,\xi) = \frac{\langle x-\xi, n_\xi\rangle}{|x-\xi|}\Big[\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi|x-\xi|}\Big]^{(d-1)/2} \mathrm{e}^{-|x-\xi|\sqrt{\lambda}}.$$

Alors, lorsque $\lambda \to \infty$, le quotient $P^\lambda(x,\xi)/K^\lambda(x,\xi)$, $(x,\xi) \in U \times \partial U$, tend vers 1, uniformément sur tout compact K de $U \times \partial U$ tel que $]\xi, x] \cap \partial U = \emptyset$ si $(x,\xi) \in K$ et $\sup\{\measuredangle(n_\xi, x-\xi)\,;\ (x,\xi) \in K\} < \frac{1}{2}\pi$.

7. Preuve du théorème 2 via la théorie des limites fines et la proposition 6

Soit u un potentiel de Helmholtz dans $\mathbb{R}^d$. Le théorème de Fatou-Doob-Naim généralisé dit que u/Φ_d admet une limite fine nulle en σ-presque tout $\xi \in S_{d-1}$ (vu comme point de la frontière de Martin de $\mathbb{R}^d$ pour $\Delta - I$). L'énoncé suivant entraîne donc (et précise) le théorème 2 (*cf.* le § 5 pour la notation M).

PROPOSITION 8. — *Si u/Φ_d admet une limite fine nulle en $\xi \in S_{d-1}$ alors*

$$\lim_{t\to\infty}\Big[\frac{Mu(t\xi)}{\Phi_d(t\xi)}\Big] = 0.$$

Preuve. — On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $\{t_n\}$ de réels positifs tendant vers ∞ telle que $[Mu(t_n\xi)/\Phi_d(t_n\xi)] \ge \varepsilon$. Notons $t'_n = \frac{1}{2}t_n$, $A_n = \Sigma(t_n\xi, t_n^{-1/2})$, $A'_n = \Sigma(t'_n\xi, {t'_n}^{-1/2})$ et observons que pour tout $n \ge 1$ et tout $x \in A'_n$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &\ge \int_{A_n} u(y) P_n(x,y)\,\mathrm{d}\sigma(y) \\ &\ge c t_n^{(d-1)/2}[Mu](t_n\xi)\inf\{P_n(u,\eta)\,;\ u \in A'_n,\ \eta \in A_n\} \end{aligned}$$

où P_n désigne le noyau de Poisson de la boule $B(0,t_n)$ (pour l'équation de Helmholtz). Mais d'après le 6.D. plus haut,

$$\inf\{P_n(u,\eta)\,;\ u \in A'_n,\ \eta \in A_n\} \ge C\, t_n^{(1-d)/2}\mathrm{e}^{-t'_n}.$$

Et par conséquent, $u(x)/\Phi_d(t'_n) \ge c\varepsilon$ pour $x \in A'_n$. Mais alors puisque u/Φ_d admet une limite fine nulle en ξ, l'ensemble $\bigcup_{n\ge1} A'_n$ est effilé minimal en ξ. Ce qui contredit la proposition 1, 2). $\square$

Appendice.

Le théorème de Littlewood et l'inégalité de Doob associée pour les domaines NTA et certaines variétés à courbures négatives

On se propose d'indiquer brièvement un traitement unifié et des extensions des résultats connus concernant le théorème de convergence radiale de Littlewood (voir [Doo], [Da2], [LMT], [Zha]).

A.1. — Commençons par considérer le cas, déjà étudié par S. Zhao [Zha], d'un domaine Ω borné NTA de $\mathbb{R}^d$ (voir [JK]; cas particulier : Ω Lipschitzien borné). On se limitera au Laplacien Δ et à $d \geq 3$, mais l'argument s'étend à $d = 2$ et à de larges classes d'opérateurs elliptiques (*cf.* [An2, § 8]).

Si E est une partie de $\partial\Omega$, un champ de radiales non-tangentielles basé sur E dans Ω est une application

$$\gamma : \widetilde{E} = [0,1] \times E \longrightarrow \overline{\Omega}$$

vérifiant les propriétés suivantes (voir [Zha]) : il existe une constante $c_1 \geq 1$ telle que

$$c_1^{-1}\, t \leq d(\gamma(t,\zeta), \partial\Omega) \leq \big|\gamma(t,\zeta) - \zeta\big| \leq c_1 t$$

pour $(t,\zeta) \in \widetilde{E}$ et

$$\big|\gamma(t,\zeta) - \gamma(t',\zeta')\big| \geq c_1^{-1} |\zeta - \zeta'|$$

si (t',ζ') est un autre point de $\widetilde{E}$. La projection $\pi : \gamma(t,\zeta) \mapsto \zeta$ est alors c_1-lipschitzienne sur $\gamma(\widetilde{E})$.

Fixons un tel champ γ de base $E \subset \partial\Omega$, $r_0 > 0$ et $x_0 \in \Omega$ tels que $|x_0 - \gamma(t,\zeta)| \geq r_0$ pour (t,ζ) dans $[0,1] \times E = \widetilde{E}$. Le théorème de projection de Doob (voir [Doo], [LMT]) s'étend alors de la façon suivante.

THÉORÈME A1. — *Soient A un borélien de Ω, $A \subset \gamma(\widetilde{E})$ et*

$$A^* = \pi(A) = \{\zeta \in E\,;\ \exists t \in [0,1],\ \gamma(t,\zeta) \in A\}.$$

Si on note $\omega(x_0, A)$ (resp. $\omega(x_0, A^*)$) la mesure harmonique de A (resp. A^*) dans Ω au point x_0, on a

$$\omega(x_0, A^*) \leq c_0\, \omega(x_0, A)$$

où la constante c_0 ne dépend que de Ω, c_1 et r_0.

Preuve. — La preuve suivante est inspirée de l'exposé par [LMT] du cas du demi-espace. Notons que A^* est analytique et qu'on peut supposer A compact, $A \subset \gamma(\widetilde{E})$, comme on le fera dans ce qui suit.

Notons $K_\zeta(x)$, pour $\zeta \in \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$ et $x \in \Omega$, le noyau de Martin de Ω normalisé en x_0, *i.e.* $K_\zeta(x) = G(x,\zeta)/G(x_0,\zeta)$ si $\zeta \in \Omega \setminus \{x_0\}$ et G désigne la fonction de Green de Ω, et $K_\zeta(x) = \lim_{y\to\zeta,\, y\in\Omega} K_y(x)$ si $\zeta \in \partial\Omega$. Soient $\delta(x) = d(x, \partial\Omega)$, $B_x = B(x, \frac{1}{2}\delta(x))$, $B'_x = B(x, \frac{1}{4}\delta(x))$, pour $x \in \Omega$. Le point est que grâce au principe de Harnack au bord disponible ici (*cf.* [JK]), on a pour $(t,\zeta) \in \widetilde{E}$, $x = \gamma(t,\zeta)$ et $y \in \Omega \setminus B'_x$,

$$K_x(y) \leq c\, K_\zeta(y), \tag{A.1}$$

où c désigne ici et dans la suite une constante ne dépendant que de Ω, c_1 et éventuellement r_0.

En effet, si on fixe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\varepsilon_0 \operatorname{diam}(\Omega) \leq r_0$, $\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}$, le principe de Harnack au bord assure que K_x/K_ζ est, sur

$$U = \bigl\{ y \in \Omega \setminus B'_x\,;\ \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 |x-\zeta| < |y-\zeta| < 2|x-\zeta| \bigr\},$$

compris entre deux multiples fixes de sa valeur en tout point de U. Par le principe du maximum, cet encadrement s'étend à

$$V = \bigl\{ y \in \Omega \setminus B'_x\,;\ |y-\zeta| \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 |x-\zeta| \bigr\}\,;$$

comme $K_\zeta(x_0) = K_x(x_0) = 1$, on obtient $K_x \leq c\,K_\zeta$ sur V et donc sur $\partial B'_x$. Et d'après le principe du maximum, on a bien $K_x \leq cK_\zeta$ sur $\Omega \setminus B'_x$.

D'autre part, on a évidemment

$$K_x(y) \leq \frac{c}{G(x_0,x)} |y-x|^{2-d}, \quad \forall y \in \Omega. \tag{A.2}$$

Soit alors μ la restriction à A^* de la mesure $\omega(x_0, .)$ et soit ν une mesure sur A telle que $\pi(\nu) = \mu$ (comme indiqué dans [LMT], l'existence de ν se déduit facilement du théorème de représentation de Riesz et du théorème de Hahn-Banach). D'après $(A.1)$ et les inégalités de Harnack, on a pour tout $x \in A$,

$$\int_{A\setminus B_x} K_y(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \leq c \int_{A^*} K_\zeta(x)\omega(x_0,\mathrm{d}\zeta) \leq c \int_{\partial\Omega} K_\zeta(x)\,\omega(x_0,\mathrm{d}\zeta) = c.$$

D'après $(A.2)$ et le caractère lipschitzien de π, on a, si $\widetilde{B}_x = \partial\Omega \cap B(\pi(x), c_1\delta(x))$,

$$\int_{A\cap B_x} K_y(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \leq \frac{c}{G(x_0,x)} \int_{\widetilde{B}_x} \bigl|\pi(x) - \zeta\bigr|^{2-d} \omega(x_0,\mathrm{d}\zeta).$$

Or,

$$\int_{\widetilde{B}_x} |\pi(x)-\zeta|^{2-d}\omega(x_0,\mathrm{d}\zeta) \le c\sum_{n\ge 0} 2^{-n(2-d)}\delta(x)^{2-d}\omega\big(x_0, B(\pi(x), c_1\, 2^{-n}\delta(x))\big).$$

Donc, si $x=\gamma(t,\eta)$,

$$\int_{\widetilde{B}_x} \left|\pi(x)-\zeta\right|^{2-d}\omega\big(x_0,d\zeta\big) \le c\sum_{n\ge 0} G(x_0,\gamma(t2^{-n},\eta)\big) \le c\, G(x,x_0)$$

en utilisant une inégalité de Dahlberg [Da1] et, pour finir, la propriété : $G(x_0,\gamma(\tau,\zeta)) \le c(\tau/t)^{\beta} G(x_0,x)$ pour $0<\tau\le t$ et des constantes $c\ge 1$ et $\beta>0$ convenables. On peut noter que l'inégalité de Dahlberg et cette propriété résultent facilement du principe de Harnack au bord.

On voit alors que $K_\nu \le c$ sur A et donc $K_\nu(x)\le c\,\omega(x,A)$ sur Ω. En particulier en prenant $x=x_0$, on obtient $\omega(x_0,A^*)=\|\mu\|=\|\nu\|\le c\omega(x_0,A)$. Ce qui achève la démonstration du théorème A1. □

A.2. — Du théorème A1, on déduit facilement et de manière tout à fait standard (voir [Doo], [LMT]) la version du théorème de Littlewood de [Zha]. Le cas où Ω est Lipschitzien est dû à Dahlberg [Da2].

THÉORÈME A2. — *Conservons les notations et les hypothèses du théorème et soit $u=G(\lambda)$ un potentiel de Green dans Ω. On a alors, pour ω_{x_0}-presque tout $\zeta\in E$, $\lim_{t\to 0} u(\gamma(t,\zeta))=0$.*

Il suffit de voir que pour tout $\varepsilon>0$, la mesure harmonique de

$$A_s^* = \big\{\zeta\in E\,;\ \exists\, t\in(0,s),\ u(\gamma(t,\zeta))\ge\varepsilon\big\}$$

tend vers 0 lorsque $s\to 0$. Or A_s^* est la π-projection de

$$A_s=\{u\ge\varepsilon\}\cap\big\{\gamma(t,\zeta)\,;\ (t,\zeta)\in\widetilde{E},\ t\le s\big\}$$

et, par définition, $\omega(x_0,A_s)\le\varepsilon^{-1}\widehat{R}_u^{A_s}(x_0)$. Comme u est un potentiel (*i.e.* sa plus grande minorante harmonique dans Ω est nulle) on a $\lim_{s\to 0} R_u^{A_s}=0$ dans Ω. Le résultat découle donc du théorème A1.

A.3. — L'argument précédent — ou plus exactement, grâce au principe de Harnack à l'infini de [An2], l'argument de [LMT] — peut être étendu à certaines variétés de Cartan-Hadamard à courbures sectionnelles ≤ -1 (voir aussi le A.4 plus bas). Soit M une telle variété supposée en outre à géométrie bornée (*cf.* les hypothèses (1.1) de [An2]), soit $x_0 \in M$ et supposons que le groupe G des isométries de M qui fixent x_0 opère transitivement sur la sphère à l'infini $S_\infty(M)$. Considérons l'opérateur elliptique $\mathcal{L} = \Delta + \alpha I$, avec $\alpha < \lambda_1(M)$, où Δ est le Laplacien de M et où $\lambda_1(M)$ désigne le fond du spectre de $-\Delta$.

Notons $\overline{M}$ la compactification standard de M par $S_\infty(M)$ et

$$K : (\zeta, x) \longmapsto K_\zeta(x), \quad (\zeta, x) \in \big(\overline{M} \setminus \{x_0\}\big) \times M,$$

le $\mathcal{L}$ noyau de Martin normalisé en x_0 (voir [An2]). Si σ est la mesure de probabilité G-invariante sur $S_\infty(M)$, la fonction $\Psi_\alpha(x) = \int_{S_\infty(M)} K_\zeta(x)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$, $x \in M$, est l'unique fonction $\mathcal{L}$-harmonique > 0 dans M ne dépendant que de $d(x_0, x)$ et telle que $\Psi_\alpha(x_0) = 1$; aussi pour $r > 0$, on a $\Psi_\alpha(x) = \int_{S_r} K_\zeta(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(\zeta)$ pour $x \in B(x_0, r)$, si σ_r désigne la probabilité G-invariante sur $S_r = \partial B(x_0, r)$. Posons maintenant, si A est une partie de M, $\omega(x, A) = \widehat{R}^A_{\Psi_\alpha}(x)$, et pour $A \subset S_\infty(M)$, $\omega(x, A) = \int_A K_\zeta(x)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta)$.

THÉORÈME A′1. — *Soit A un borélien de $M \setminus B(x_0, 1)$ et soit A^* la projection géodésique de A sur $S_\infty(M)$, à partir de x_0. On a alors, pour un $c > 0$ ne dépendant que de M et α,*

$$\omega(x_0, A^*) \leq c\,\omega(x_0, A).$$

La preuve est parallèle à celle du théorème A1 mais l'argument est encore plus proche de [LMT]. Observons d'abord ceci : soit $x \in M$ tel que $r = d(x_0, x) \geq 1$ et pour $y \in B_x := B(x, \frac{1}{2})$, soit $\bar{y}$ le point de la demi-géodésique ℓ issue de x_0 contenant y tel que $d(x_0, \bar{y}) = r$. On a alors

$$G(x, y) \leq c\,G(x, \bar{y}), \tag{A3}$$

pour une constante $c = c(M, \alpha)$. On sait en effet que $c^{-1} d(x, z)^{2-d} \leq G(x, z) \leq c\,d(x, z)^{2-d}$ pour $z \in B(x, 1)$ (en supposant $d = \dim(M) \geq 3$). De plus, si H est le point de ℓ le plus proche de x, on a

$$d(x, \bar{y}) \leq d(x, H) + d(H, \bar{y}) = d(x, H) + r - d(x_0, H) \leq 2\,d(x, H)\,;$$

d'où $d(x, \bar{y}) \leq 2\,d(x, y)$ et l'inégalité (A3). On en déduit, grâce aux inégalités de Harnack, que $K_y(x) \leq c\,K_{\bar{y}}(x)$.

D'autre part, si $y \in M \setminus B(x_0, 1)$, si $\zeta = \pi(y)$ (on note $\pi : M \setminus \{x_0\} \to S_\infty(M)$ la projection géodésique de centre x_0) et si $x \notin B_y$, le principe de Harnack à l'infini donne (comparer avec $(A1)$) : $K_y(x) \leq c\,K_\zeta(x)$.

Si alors ν est une mesure sur A se projettant par π sur $\mu = \mathbf{1}_{A^*} \cdot \sigma$, on a pour $x \in A$ et si $r = d(x_0, x)$,

$$\text{(A4)} \quad \begin{aligned} K\nu(x) &\le \int_{B_x} K_y(x)\,\mathrm{d}\nu(y) + \int_{B_x^c} K_y(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \\ &\le c\Big(\int_{S_r} K_z(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(z) + \int_{S_\infty(M)} K_\zeta(x)\,\mathrm{d}\mu(\zeta)\Big) \le 2c\Psi(x). \end{aligned}$$

On voit alors (comme en A.1) que $K_\nu(x) \le c\,\omega(x, A)$ sur M d'après le principe du maximum. En prenant $x = x_0$, on obtient $\omega(x_0, A^*) = \|\mu\| = \|\nu\| \le c\,\omega(x_0, A)$. □

Le théorème A$'$1 implique la variante suivante du corollaire 6.2 de [LMT] (*cf.* [An2] pour le théorème de Fatou disponible ici). Pour $\zeta \in S_\infty(M)$, soit $\gamma(t, \zeta)$ le point à distance $1 + t$ de x_0 sur le rayon $x_0\zeta$.

THÉORÈME A$'$2. — *Soit u une fonction $(\Delta + \alpha I)$-surharmonique positive dans M. Alors, pour σ-presque tout $\zeta \in S_\infty(M)$, $u(\gamma(t,\zeta))/\Phi_\alpha(t)$ admet une limite pour $t \to +\infty$.*

On peut, dans le même cadre, étendre l'inégalité de Doob et le théorème de Littlewood en prenant modèle sur l'énoncé de Zhao (théorème A2) ; on supposera de plus M à courbures sectionnelles minorées. Soient $E \subset S_\infty(M)$, $\gamma : \widetilde{E} = E \times [0, \infty[\to M$ et $c_1 \ge 1$ tels que :

(i) $d(\gamma(t,\zeta), x_0) \ge 1$, pour tout $(t, \zeta) \in \widetilde{E}$,

(ii) $\lim_{t\to\infty} \gamma(t, \zeta) = \zeta$, pour tout $\zeta \in E$,

(iii) $d(\gamma(t,\zeta), \overline{x_0\zeta}) \le c_1$, pour tout $(t, \zeta) \in \widetilde{E}$, et

(iv) pour $x = \gamma(t,\zeta)$, $x' = \gamma(t', \zeta')$ tels que $x' \in B_x = B(x, \frac{1}{2})$ on a $d(x, x') \ge c_1^{-1}\, d_x(\zeta, \zeta')$.

Ici, d_x désigne la métrique sur $S_\infty(M)$, image par π de la métrique induite sur $\partial B(x_0, d(x_0, x))$. Notons $\pi_\gamma(x) = \zeta$ pour $x = \gamma(t, \zeta) \in \gamma(\widetilde{E})$.

Maintenant dans la majoration analogue à (A4) on aura, si ν est une mesure sur le compact $K \subset \gamma(\widetilde{E})$ qui se projette par π_γ sur $\mathbf{1}_{\pi_\gamma(K)} \cdot \sigma$,

$$\int_{B_x} K_y(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \le \frac{1}{G(x, x_0)} \int_{B_{d_x}(\zeta_x, c_1)} \big(d_x(\zeta_x, \eta)\big)^{2-d}\,\mathrm{d}\sigma(\eta), \quad x \in K,$$

où $\zeta_x = \pi_\gamma(x)$. D'où, en utilisant encore les inégalités de Harnack, l'inégalité requise par la méthode :

$$\int_{B_x} K_y(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \le cK_{\zeta_x}(x)\sigma(B_{d_x}(\zeta_x, c_1)) \le c' \int_{S_\infty(M)} K_\zeta(x)\,\mathrm{d}\sigma(\zeta) = c'\,\Psi_\alpha(x).$$

On obtient ensuite comme avant $\omega(x_0, \pi_\gamma(K)) \le c\,\omega(x_0, K)$. Les détails sont laissés au lecteur.

A.4. — Considérons enfin le cas où, M étant toujours une variété de Cartan-Hadamard à courbures sectionnelles négatives pincées, on dispose d'un point $\zeta_0 \in S_\infty(M)$ tel que le groupe G des isométries de M qui laissent invariante chaque horosphère basée en ζ_0 opère transitivement sur $Y = S_\infty(M) \setminus \{\zeta_0\}$. (Cas particulier : les groupes résolubles $S = NA$ de rang 1 et à « courbure négative », voir [Hei]).

Notons $\pi : M \to Y$ la projection naturelle le long des géodésiques $\overline{\zeta_0\zeta}$, $\zeta \in Y$, et δ_x la métrique sur Y image par π de la métrique de l'horosphère H_x basée en ζ_0 et passant par x. Soit λ_x la mesure image par π du volume Riemannien sur H_x. Les λ_x sont G-invariantes, deux à deux proportionnelles. Fixons $\alpha < \lambda_1(M)$, $x_0 \in M$, posons $\mathcal{L} = \Delta + \alpha I$, $\lambda = \lambda_{x_0}$ et notons K le $\mathcal{L}$-noyau de Martin normalisé en x_0.

Si $\{x_n\}$ est une suite de points du rayon $\overline{x_0\zeta_0}$ convergeant vers ζ_0, on a $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \gamma(x_n)) = 1$ si $\gamma \in G$. Il s'ensuit que la minimale $F^\alpha = K_{\zeta_0}$ associée à ζ_0 est constante sur chaque H_x (*i.e.* G-invariante).

Le complémentaire U^c d'une horoboule U basée en ζ_0 est $\mathcal{L}$-effilé en ζ_0 (*cf.* [An3, p. 81]). La réduite $p_U = R_{F^\alpha}^{U^c}$ (pour $\Delta + \alpha I$ dans M) vérifie même, pour $x \in \overline{x_0\zeta_0}$, une estimée $p_U(x) \le c\mathrm{e}^{-\varepsilon d(x,x_0)}\, F^\alpha(x)$ avec $c > 0$ et $\varepsilon > 0$, et p_U est G-invariant. En passant à la limite sur des horoboules croissant vers M, et en normalisant sur H_{x_0}, on obtient une fonction $\Psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ $\Delta + \alpha I$-harmonique > 0, G-invariante et négligeable devant F^α le long de $x_0\zeta_0$. La représentation de Martin de Ψ_α est donc de la forme $\Psi_\alpha(x) = \int_Y K_\zeta(x)\, f(\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(\zeta)$, $x \in M$, avec f continue > 0 sur Y vérifiant $f(\zeta) = K_{\gamma\zeta}(\gamma x_0)\, f(\gamma\zeta)$ pour $\gamma \in G$, $x \in M$ et $\zeta \in Y$. En particulier, pour $\zeta_1 = \pi(x_0)$, on a $f(\gamma\zeta_1) = f(\zeta_1)/K_{\gamma\zeta_1}(\gamma x_0)$, $\gamma \in G$.

Soit U_1 l'horoboule basée en ζ_0 telle que $d(x_0, U_1^c) = 1$ et soit $E \subset Y$. Soit $\gamma : \widetilde{E} = [1, \infty[\, \times E \to M \setminus U_1$ telle que pour un réel $c_0 > 0$ et tout $x = \gamma(\zeta, t) \in \gamma(\widetilde{E})$, on ait :

(i) $d(\gamma(t,\zeta), \overline{\zeta_0\zeta}) \le c_0^{-1}$ et

(ii) $c_0\, \delta_x(\zeta, \zeta') \le d(\gamma(t,\zeta), \gamma(t',\zeta'))$ pour $(t',\zeta') \in \widetilde{E}$ tel que $\gamma(t',\zeta') \in B_x$.

Alors, si $A \subset \gamma(\widetilde{E})$ est borélien, si $A^* = \{\zeta \in E\,;\ \exists t \ge 1,\ \gamma(\zeta,t) \in A\}$, on a, pour un réel $c = c(M, c_0, \alpha) > 0$, l'estimation de type Doob :

$$\int_{A^*} f(\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(\zeta) \le c\, R_{\Psi_\alpha}^{A}(x_0).$$

Le point est que si ν est une mesure sur A se projetant sur $\mathbf{1}_{A^*} \cdot \omega = \mathbf{1}_{A^*} f \cdot \lambda$ (via $\pi_\gamma : \gamma(\zeta,t) \mapsto \zeta$), et si $x \in \gamma(\widetilde{E})$, $\overline{x} = \pi_\gamma(x)$ et $\rho = c_0^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{B_x} K_y(x)\, \mathrm{d}\nu(y) &\le \frac{c}{G(x_0,x)} \int_{B_{\delta_x}(\overline{x},\rho)} \delta_x(\overline{x},\zeta)^{2-d}\, \mathrm{d}\omega(\zeta)\\ &\le c' \frac{\omega(B_{\delta_x}(\overline{x},\rho))}{G(x_0,x)} \le c' \int_Y K_\zeta(x)\, \mathrm{d}\omega(\zeta) = c'\Psi_\alpha(x)\end{aligned}$$

grâce aux inégalités $\int_{B_{\delta_x}(\overline{x},\rho)} \delta_x(\overline{x},\zeta)^{2-d} \mathrm{d}\lambda_x(\zeta) \leq c$, $1/G(x_0,x) \leq c\, K_\zeta(x)$ et $f(\zeta) \leq c\, f(\zeta')$, ζ, $\zeta' \in B_{\delta_x}(\overline{x},\rho)$.

Si on suppose que $\lim_{t\to\infty} \gamma(t,\zeta) = \zeta$, pour tout $\zeta \in E$, on aura aussi la propriété de Littlewood : si v est un $\Delta + \alpha I$ potentiel sur M,

$$\lim_{t\to\infty} v(\gamma(t,\zeta))/\Psi_\alpha(\gamma(t,\zeta)) = 0$$

pour λ-presque tout $\zeta \in E$.

A.5. Remarque. — En A.3–A.4 on n'atteint pas le cas $\alpha = \lambda_1(M)$, traité par [LMT] pour M symétrique. Mais on peut remplacer $\Delta + \alpha$ par un opérateur elliptique adapté G-invariant et faiblement coercif.

BIBLIOGRAPHIE

[An1] Ancona (A.). — *Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés*, in École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII – 1988, Lecture Notes in Math. **1427**, Springer-Verlag, 1990, p. 5–112.

[An2] Ancona (A.). — *Negatively curved manifolds, elliptic operators and the Martin boundary*, Ann. of Math., t. **125**, 1987, p. 495–536.

[An3] Ancona (A.). — *First eigenvalues and comparisons of Green's functions for elliptic operators on manifolds or domains*, J. Anal. Math., t. **72**, 1997, p. 45–92.

[Ber] Berg (C.). — *Potential theory on the infinite dimensional torus*, Invent. Math., t. **32** (1), 1976, p. 49–100.

[Bre] Brelot (M.). — *Axiomatique des fonctions harmoniques.* — Les Presses de l'Université de Montréal, 1969.

[Che] Chevallier (N.). — *A note on lower limit of series and potential theory*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, t. **121A**, 1992, p. 273–277.

[Da1] Dahlberg (B.E.J.). — *On estimates of harmonic measure*, Arch. Rat. Mech. Anal., t. **1965**, 1977, p. 272–288.

[Da2] Dahlberg (B.E.J.). — *On the existence of radial boundary values for functions subharmonic in a Lipschitz domain*, Indiana Univ. Math. J., t. **27**, n° 3, 1978, p. 515—526.

[Den] Deny (J.). — *Un théorème sur les ensembles effilés*, Ann. Univ. Grenoble Sect. Sci. Math. Phys., t. **23**, 1948, p. 139–142.

[Doo] DOOB (J.L.). — *Some classical function theory theorems and their modern versions*, Ann. Inst. Fourier, t. **15** (1), 1965, p. 115–136.

[Hei] HEINTZE (E.). — *On homogeneous manifolds of negative curvature*, Math. Ann., t. **211**, 1974, p. 23–34.

[Her] HERVÉ (R.-M.). — *Recherche sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques et du Potentiel*, Ann. Inst. Fourier, t. **XII**, 1962, p. 415–471.

[J-K] JERISON (D.), KENIG (C.). — *Positive harmonic functions in non tangentially accessible domains*, Advances in Math., t. **46**, 1982, p. 80–147.

[Kan] KANNAI (Y.). — *Off diagonal short time asymptotics for fundamental solutions of diffusions equations*, Commun. Partial Differ. Equations, t. **2** (8), 1977, p. 781–830.

[KW] KAUFMAN (R.), WU (J.-M.). — *Parabolic Potential theory*, J. Diff. Equations, t. **43**, 1982, p. 204–234.

[KT] KORANYI (A.), TAYLOR (J.C.). — *Fine convergence and parabolic convergence for the Helmholtz equation and the heat equation*, Illinois J. Math., t. **27** (1), 1983, p. 77–93.

[Lel] LELONG-FERRAND (J.). — *Étude au voisinage d'un point frontière des fonctions surharmoniques positives dans un demi-espace*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **66**, 1947, p. 125–159.

[Lin] LINDEN (O.). — *Fatou theorem for eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator.* — Thesis, Yeshiva University, 1977.

[Lit] LITTLEWOOD (J.E.). — *On functions subharmonic in a circle,* II, Proc. Lond. Math. Soc., t. **28** (2), 1928, p. 383–394.

[LMT] LYONS (T.J.), MACGIBBON (K.B.), TAYLOR (J.C.). — *Projection theorems for hitting probabilities and a theorem of Littlewood*, J. Funct. Anal., t. **59**, 1984, p. 470–489.

[Naï] NAÏM (L.). — *Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, t. **7**, 1957, p. 183–281.

[TW] TAYLOR (S.J.), WATSON (N.A.). — *A Hausdorff measure classification of polar sets for the heat equation*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., t. **97**, 1985, p. 325–344.

[Zha] ZHAO (S.). — *Boundary behavior of subharmonic functions in nontangential accessible domains*, Studia Math., t. **108** (1), 1994, p. 25–48.