BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LAQUIÈRE

Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 131-133
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__131_1>

Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité; par M. E. Laquière.

(Séance du 5 mai 1882.)

La Note de M. Laisant, insérée au *Bulletin* (t. X, n° 2, p. 40), rappelle un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* où

M. Resal étend aux polygones, plans ou gauches, le théorème de Pappus sur l'immobilité du centre de gravité de masses, égales entre elles, qui décrivent les côtés d'un triangle avec des vitesses de même sens et proportionnelles aux longueurs des côtés à parcourir, après être parties en même temps des sommets respectifs.

On pourrait donner à la généralisation du théorème de M. Resal la forme, d'apparence encore plus générale, suivante :

Si des masses partent en même temps des sommets d'un polygone fermé, plan ou gauche, pour en parcourir les côtés suivant une loi de mouvement identique, avec des vitesses à chaque instant proportionnelles aux côtés décrits, le centre de gravité du système des masses mobiles restera fixe.

L'observation sur le théorème de M. Resal, que j'ai faite dernièrement dans le Journal précité (3[e] série, t. I, p. 110) s'applique à cette nouvelle généralisation que l'on peut, par une convenable distribution des masses, considérer quasi comme évidente.

M. Laisant, de son côté, démontre dans sa Note précitée que :

Si l'on considère un système de droites quelconques A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n *dans l'espace et qu'on fasse tourner toutes ces droites, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par leurs premières extrémités* A_1, A_2, ..., A_n, *ce qui fait prendre aux secondes extrémités les nouvelles positions* B'_1, B'_2, ..., B'_n;

Désignant par G_a, G_b, $G_{b'}$ *les centres de gravité de la série des points* A, *de celle des points* B, *de celle des points* B', *affectés de masses quelconques, mais égales pour les trois points* A_i, B_i *et* B'_i, *de même indice :*

Le centre de gravité $G_{b'}$ *s'obtiendra par la rotation de* G_b, *du même angle et dans le même sens, autour d'un axe de rotation passant par* G_a *et parallèle aux premiers.*

L'auteur, qui s'est imposé la tache de divulguer en France la méthode des quaternions, donne de son théorème une élégante démonstration, basée sur ce genre de calcul. Toutefois, le théorème étant du domaine essentiel de la Mécanique rationnelle, nous ne croyons pas superflu d'observer qu'il est susceptible d'une démonstration immédiate et tout à fait élémentaire, par exemple de la suivante, qui aurait probablement été choisie par Poinsot, si ce grand géomètre avait songé au théorème de M. Laisant.

Désignons par $(A, \omega)B$ le déplacement linéaire, sens et grandeur, du point B tournant de l'angle ω, valeur donnée en grandeur et en signe, autour de l'axe mené par le point A parallèlement à une direction fixe. Il est évident que

$$(A, \omega)B + (B, \omega)A = 0.$$

On voit de même que, d'une manière générale,

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B + (A, \omega)C,$$

ou bien

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B - (C, \omega)A.$$

Par conséquent, dans le cas qui nous occupe,

$$BB' = (A, \omega)B = (G_a, \omega)B - (G_a, \omega)A.$$

Faisant la somme des n égalités semblables, appliquées aux n points B, et multipliées chacune par la masse m correspondante; considérant de plus que

$$(1) \qquad \Sigma m(G_a, \omega)A = M(G_a, \omega)G_a = 0,$$

on obtient immédiatement

$$(2) \qquad G_b G_{b'} = (G_a, \omega)G_b,$$

ce qui est le théorème général de M. Laisant.

Nota. — Les équations (1) et (2) ont été écrites suivant le mode usité dans le calcul des équipollences, les déplacements qui y figurent étant des droites géométriques. Pour conserver l'écriture vulgaire, il suffirait de considérer ces deux équations comme existant entre les projections de ces lignes sur un axe quelconque.